Kuisma Lappalainen

TÄRVELIKÖ PORTAIKKO JAKOLASKUN – ELI ONKO KAADETTU TEE HERKULLISEMPI

Esipuhe

Päätin kirjoittaa tämän teoksen luettuani Helsingin Sanomista elokuussa 2011 artikkelin siitä, miten joukko-opin käsitteiden lanseeraus ensimmäisen luokan matematiikassa tuhosi kokonaisen sukupolven matematiikan opinnot. Itse tämän koulukunnan voittokulun aikana koulun käyneenä matemaatikkona totesin tuota artikkelia lukiessani, että tämä 1970-luvun ”uusi matematiikka” on toisessakin suhteessa epäonnistunut – ja tämä toinen seikka on sellainen, joka tekee uudesta matematiikasta vanhaa matematiikkaa huomattavasti epäkäytännöllisemmän. Tässä kirjassa esittelen neljä eri maista lähtöisin olevaa jakokulmaa. Maat ovat Italia, Saksa, Yhdysvallat ja Ruotsi. Kun itselleni 1970-luvun lopulla ja 1980-luvun alussa tuli ajankohtaiseksi opetella laskemaan jakokulmassa, opin sen koulussa amerikkalaisen menetelmän mukaan. Myöhemmin olen kuitenkin havainnut, että on olemassa tilanteita, joissa italialainen menetelmä eli kaadettu tee on amerikkalaista porrasmenetelmää parempi. Näihin tilanteisiin kuuluu niinkin tärkeä asia kuin keskiarvon laskenta, ja syy tähän on se, että siinä jaettava on usean yhteenlaskettavan summa. Koska amerikkalaisessa järjestelmässä osamäärä kirjoitetaan jaettavan yläpuolelle, joudutaan numeroita turhaan kopioimaan yhteenlaskuviivan alta portaiden alle. Italialainen järjestelmä on tähän sopivampi, koska siinä riittää yhteenlaskuviivan alle jo kertaalleen kirjoitetun summan oikealle puolelle piirtää kaadettu tee ja merkitä sen päälle yhteenlaskettavien lukumäärä, minkä jälkeen yhteenlaskettavien lukumäärän alle aletaan suoraan kirjoittaa keskiarvoa numero kerrallaan.

Vaikka matematiikan opetuksessa tuolloin pääasiassa jakokulman opettamisessa keskityttiin amerikkalaisen jakokulman opetteluun, kertoi matematiikan opettajani, nimeltään Riitta Jalli, että siihen aikaan kun hän kävi kouluaan ja oli vielä nimeltään Riitta Hujanen, jakokulma oli ollut erilainen. Hän myös näytti, mitkä olivat tuon aiemmin käytetyn italialaisen menetelmän erot verrattuna siihen amerikkalaiseen menetelmään, jota hän samalla opetti meille. Lisäksi opettelimme tavan jakaa moninumeroinen luku yksinumeroisella ilman jakokulmaa pelkän jakoviivan avulla käyttäen samaa numero kerrallaan jakamisen periaatetta, jota myös sekä amerikkalainen että italialainen jakokulma käyttävät, merkitsemättä kuitenkaan minnekään niitä apulukuja, joita jakokulman alle kirjoitetaan jakojäännöstä laskettaessa. Tämäkin on parempi tapa laskea keskiarvo kuin amerikkalainen tässä mielessä kömpelö portaikkojakokulma, sen ruotsalaisesta peilikuvasta puhumattakaan.

Toinen tilanne, jossa portaikkojakokulma on kömpelö, on Gaussin pääsiäisenetsintäalgoritmi, joka perustuu jakojäännösten summien jakojäännöksiin. Rekursiiviseen jakoon soveltuu sekä italialainen jakokulma että sen lähisukulainen saksalainen jakokulma paljon amerikkalaista tai ruotsalaista paremmin.

Tämän kirjan rakenne on sellainen, että ensin esittelen yksinkertaisen laskuesimerkin (sataviisi pilkku neljäkaksi jaettuna seitsemällä on viisitoista pilkku nollakuusi) avulla kaikki neljä tässä kirjassa vertailtavaa eri jakokulmaa. Sen jälkeen tulee keskiarvoesimerkki (jälleen kaikille neljälle eri tavalle sama) ja pääsiäisalgoritmiesimerkki (esimerkkinä vuosi 2011, jolloin pääsiäinen oli myöhäinen, vain viikkoa ennen vappua). Lisäksi käsittelen myös aikayhteenlaskua 60-järjestelmässä.

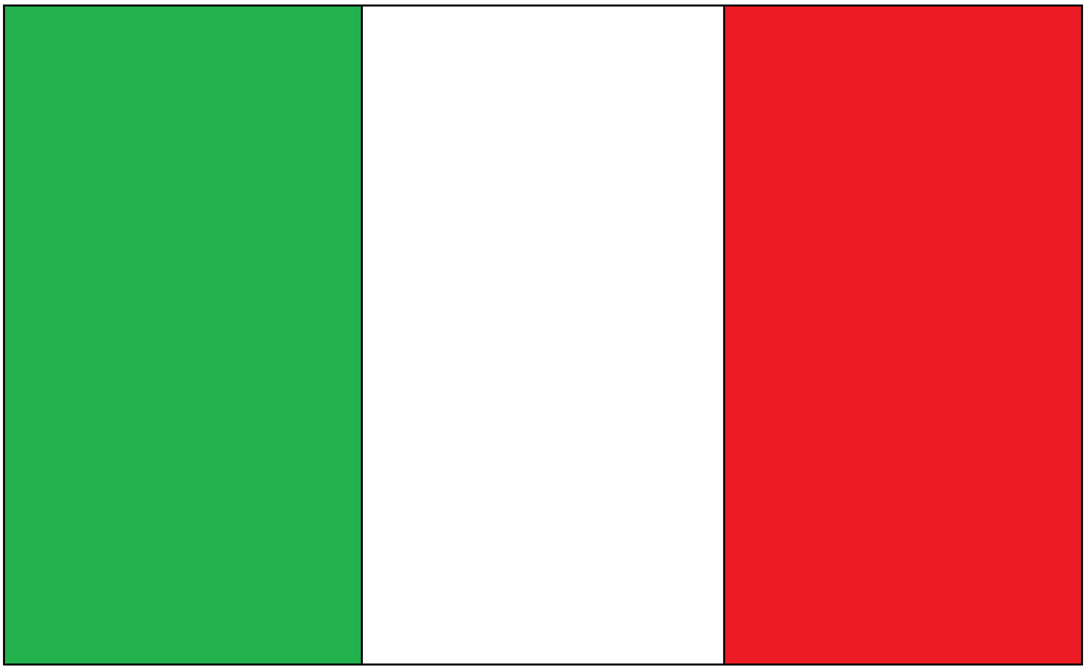
Jakokulman algoritmi ei riipu merkintätavasta, vaan kaikilla neljällä merkintätavalla sovelletaan täsmälleen samaa algoritmia. Ainoat erot muodostuvat erilaisista layouteista.

Tämän kirjan avulla yhden jakokulman opetellut voi opetella muut, jos kokee että se yksi, jonka aiemmin on osannut, on jossain tilanteessa kömpelö ja toinen menetelmä tuntuu paremmalle.

1. Yksinkertainen jakolasku eri jakokulmilla

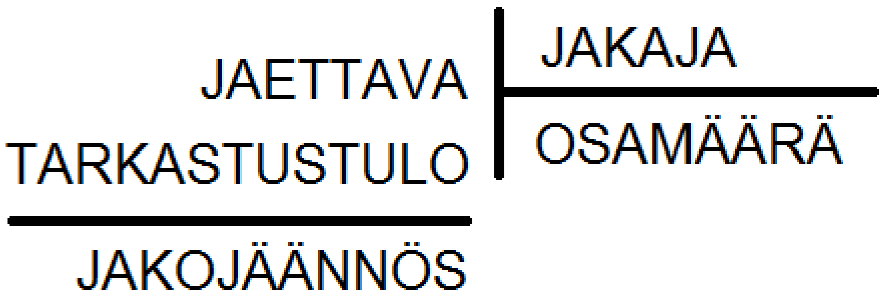
1.1. Italialainen jakokulma ("kaadettu tee")

Kuva 1. Italian lippu.

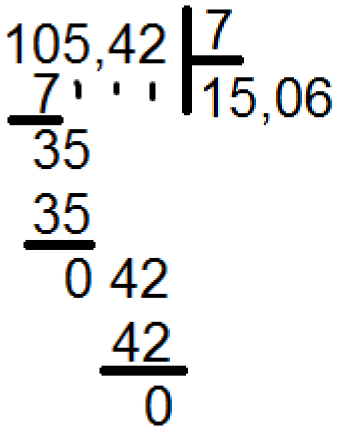


1970-luvun alkuun asti Suomessa oli käytössä italialainen jakokulma. Siinä 90 astetta vastapäivään kaadetun T-kirjaimen vasemmalle puolelle kirjoitetaan jaettava ja oikealle ylös jakaja. Sen jälkeen osamäärää aletaan kirjoittaa numero kerrallaan jakajan alle.

Kuva 2. Italialaisen jakokulman layout



Kuva 3. Esimerkki italialaisen jakokulman käytöstä (105,42:7=15,06)



Ensin todetaan, että jaettavan ensimmäinen numero, ykkönen, on pienempi kuin jakajan ensimmäinen numero, seiska. Siispä otetaan mukaan seuraavakin jaettavan numero, nolla, ja todetaan, että näistä muodostuva luku, kymmenen, on jakajaa suurempi. Tästä aloitetaan jako. Jakaja eli seitsemän mahtuu kymmeneen vain yhden kokonaisen kerran, eli osamäärän ensimmäiseksi numeroksi jakajan alle merkitään ykkönen. Sen jälkeen lasketaan kertolaskun avulla tarkastustuloksi seitsemän, joka vähennetään tämän vaiheen jaettavasta eli koko jaettavan ensimmäisistä numeroista muodostuneesta kympistä. Seuraavalle kierrokselle jää kolme, jonka perään pudotetaan alkuperäisen jaettavan seuraava numero, viitonen. Kolmeenkymmeneenviiteen seitsemän mahtuu viiteen kertaan, eli seuraava osamäärän numero on viitonen. Tämä jako päättyy tasan, seitsemän kertaa viisi on täsmälleen tuo kolmekymmentäviisi, joten vähennyksestä saadaan tulokseksi nolla. Kun sen perään pudotetaan nelonen, todetaan pari asiaa. Ensinnäkin se, että jaettavan desimaalipilkku saavutettiin, jolloin kokonaislukujakajan ollessa kyseessä on myös osamäärään merkittävä desimaalipilkku juuri tässä vaiheessa. Toisekseen nelonen on jälleen jakajana olevaa seiskaa pienempi. Desimaalipilkun perään on tällöin kirjoitettava nolla. Koska nolla kertaa mitä tahansa on nolla, ja nolla vähennettynä mistä tahansa on yhtä suuri kuin vähenevä, ei tässä vaiheessa tarvitse kirjoittaa nelosen alle nollaa ja sitten taas nelosta, vaan heti osamäärään nollan kirjoittamisen jälkeen voidaan pudottaa tähän jaettavaan vielä alkuperäisen jaettavan seuraavakin desimaali, kakkonen. Neljäkymmentäkaksi jaettuna seitsemällä on kuusi, joka on osamäärän seuraava numero, ja tässä vaiheessa jako myös päättyy tasan, koska kuusi kertaa seitsemän on juuri täsmälleen neljäkymmentäkaksi.

Tämän jakokulman hyvänä puolena voidaan mainita sekä jaettavan ja jakajan looginen sijainti toisiinsa nähden – jakaja on jaettavan oikealla puolella – että se, että jaettavan ja jakajan yläpuolelle ei jakolaskun aikana tehdä mitään merkintöjä, mistä on etua silloin, jos molemmat tai jompikumpi niistä on tulos jostain toisesta laskutoimituksesta. Jos kerran tällä italialaisella jakokulmalla on näin paljon hyviä puolia, herää väistämättä kysymys, miksi hyvä italialainen kaadettu tee piti vaihtaa huomattavasti huonompiin amerikkalaisiin portaisiin, joissa osamäärä ilmestyy jaettavan päälle?

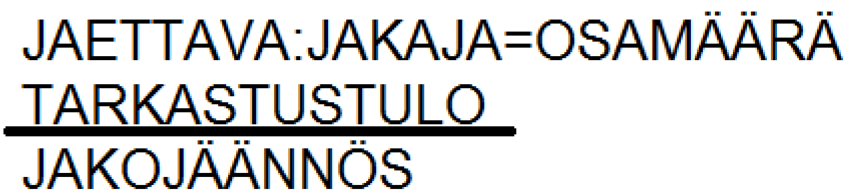
Vaikka amerikkalainen jakokulma, samoin kuin sen ruotsalainen peilikuva, ovat monella tavalla italialaista jakokulmaa huonompia, yksi seikka on kuitenkin italialaisessa amerikkalaista huonompi. Osamäärän ja jaettavan desimaalipilkut eivät italialaisessa jakokulmassa ole kohdakkain edes silloin kun jakaja on kokonaisluku. Tästä saattaa heikommilla oppilailla aiheutua laskuvirheitä, desimaalipilkku tai nollia saattaa jäädä pois tai tulla vääriin kohtiin. Mutta jos näissä osaa olla tarkka, silloin italialainen jakokulma on käytännöllisyydessään lyömätön, ja ainoastaan saksalainen vetää sille jollain tapaa vertoja.

1.2. Saksalainen jakokulma (”kaksoispiste”)

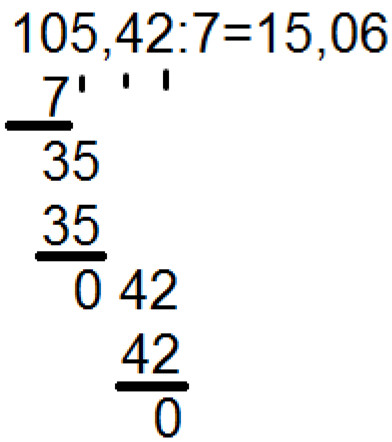
Kuva 4. Saksan lippu.

Saksalainen jakokulma ei oikeastaan ole varsinainen jakokulma. Sen hyvänä puolena on että kaikki kolme tärkeää lukua – jaettava, jakaja ja osamäärä – ovat samalla rivillä peräkkäin. Jaettavan ja jakajan välissä on kaksoispiste ja jakajan ja osamäärän välissä yhtäsuuruusmerkki – aivan kuin jakokulmattomassakin jakolaskussa. Jaettavan alle kirjoitetaan kuitenkin samat apuluvut kuin italialaisessakin jakokulmassa, ja muutoin tämä on täysin italialaisen jakokulman kaltainen. Ainoa ero italialaiseen jakokulmaan on osamäärän sijainti jakajan oikealla puolella eikä sen alla.

Kuva 5. Saksalaisen jakokulman layout



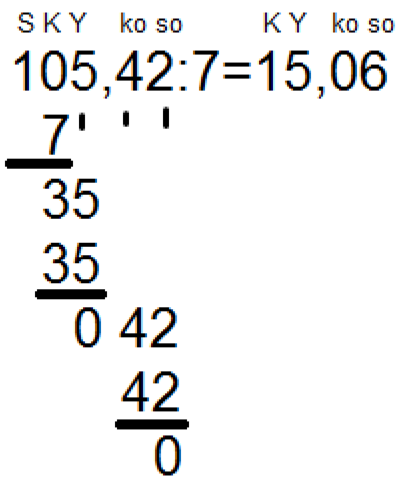
Kuva 6. Esimerkki saksalaisen jakokulman käytöstä (105,42:7=15,06)



Ensin todetaan, että jaettavan ensimmäinen numero, ykkönen, on pienempi kuin jakajan ensimmäinen numero, seiska. Siispä otetaan mukaan seuraavakin jaettavan numero, joka on nolla, ja todetaan, että näistä muodostuva luku, kymmenen, on jakajaa suurempi. Tästä aloitetaan jako. Jakaja eli seitsemän mahtuu kymmeneen vain yhden kokonaisen kerran, eli osamäärän ensimmäiseksi numeroksi yhtäsuuruusmerkin oikealle puolelle merkitään ykkönen. Sen jälkeen lasketaan kertolaskun avulla tarkastustuloksi seitsemän, joka vähennetään tämän vaiheen jaettavasta, eli koko jaettavan ensimmäisistä numeroista muodostuneesta kympistä. Seuraavalle kierrokselle jää kolme, jonka perään pudotetaan alkuperäisen jaettavan seuraava numero, viitonen. Kolmeenkymmeneenviiteen seitsemän mahtuu viiteen kertaan, eli seuraava osamäärän numero on viitonen. Tämä jako päättyy tasan, seitsemän kertaa viisi on täsmälleen tuo kolmekymmentäviisi, joten vähennyksestä saadaan tulokseksi nolla. Kun sen perään pudotetaan nelonen, todetaan pari asiaa. Ensinnäkin se, että jaettavan desimaalipilkku saavutettiin, jolloin kokonaislukujakajan ollessa kyseessä on myös osamäärään merkittävä desimaalipilkku juuri tässä vaiheessa. Toisekseen nelonen on jälleen jakajana olevaa seiskaa pienempi. Desimaalipilkun perään on tällöin kirjoitettava nolla. Koska nolla kertaa mitä tahansa on nolla, ja nolla vähennettynä mistä tahansa on yhtä suuri kuin vähenevä, ei tässä vaiheessa tarvitse kirjoittaa nelosen alle nollaa ja sitten taas nelosta, vaan heti osamäärään nollan kirjoittamisen jälkeen voidaan pudottaa tähän jaettavaan vielä alkuperäisen jaettavan seuraava desimaali, kakkonen. Neljäkymmentäkaksi jaettuna seitsemällä on kuusi, joka on osamäärän seuraava numero, ja tässä vaiheessa jako myös päättyy tasan, koska kuusi kertaa seitsemän on juuri täsmälleen neljäkymmentäkaksi.

Edellä toistin tarkoituksella saman tekstin, joka oli myös edellisessä luvussa lähes samasanaisesti. Algoritmi on todella saksalaisessa ja italialaisessa jakokulmassa täsmälleen sama kummassakin. Tässä jakokulmassa on myös täsmälleen samat hyvät ja täsmälleen samat huonot puolet kuin italialaisessa verrattuna seuraavaksi esiteltäviin kahteen muuhun. Verrattuna italialaiseen jakokulmaan tämä on sikäli parempi, että myöskään osamäärän yläpuolelle ei kirjoiteta mitään, jolloin niissä tapauksissa, joissa jaettava ei ole tulos muusta laskutoimituksesta, voidaan merkitä sekä jaettavan että osamäärän vastinnumeroiden yläpuolelle, mitä kymmenen potenssia ne vastaavat, mikä helpottaa hahmottamista, seuraavaan tapaan (S=sadat, K=kymmenet, Y=ykköset, ko=kymmenesosat, so=sadasosat):

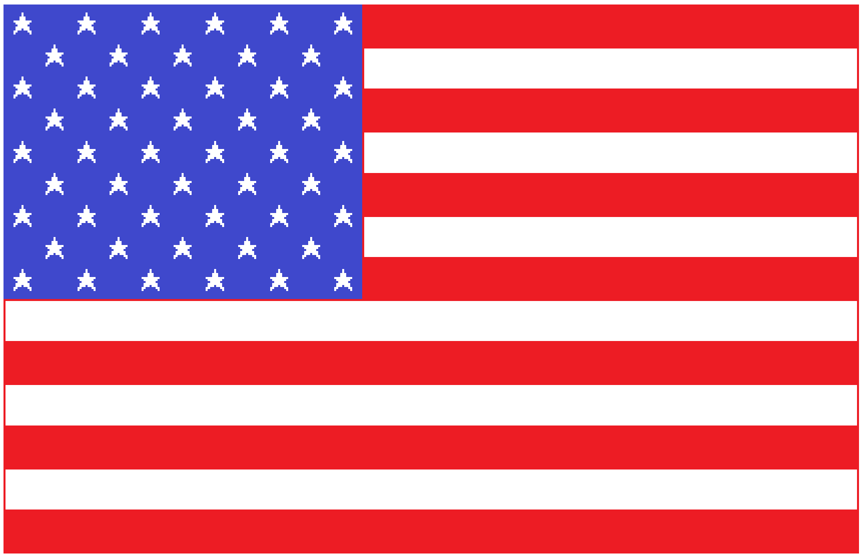
Kuva 7. Saksalainen jakokulma ja yksikkömerkit jaettavan ja osamäärän päällä



Tällä tavoin voidaan korjata ainakin osin se italialaisen jakokulman puute, joka Suomen koululaitoksessa 1970-luvulla johti amerikkalaiseen kömpelömpään porrasjakokulmaan siirtymiseen. Uudella vuosituhannella on kuitenkin joissakin matematiikan oppikirjoissa joko amerikkalaisen jakokulman kanssa rinnan tai muuten esitelty myös tämä saksalainen jakokulma, jota Saksan lisäksi myös Unkarissa on käytetty jo kauan. Lienee vain ajan kysymys, milloin suomalaisessa matematiikan opetuksessa amerikkalainen jakokulma jää historiaan ja korvataan saksalaisella. Se on melkein yhtä hyvä ellei parempikin vaihtoehto kuin palata takaisin italialaiseen jakokulmaan.

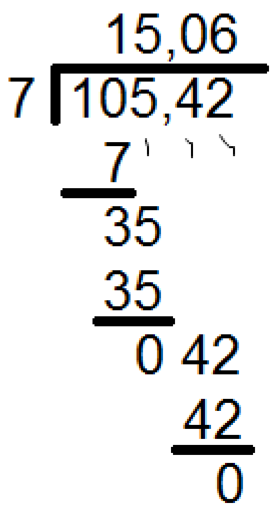
1.3. Amerikkalainen jakokulma (”portaat”)

Kuva 8. Yhdysvaltain lippu.



Tämä jakokulma on lähtöisin Yhdysvalloista. Se otettiin Suomen koululaitoksessa 1970-luvulla käyttöön italialaisen merkintätavan tilalle. Syynä uudistukseen oli, että sillä tavoin jaettavan ja osamäärän desimaalipilkut saatiin keskenään kohdakkain, mikä vähensi virheiden mahdollisuutta. Uusia virhelähteitä ja haittapuolia tästä uudistuksesta kuitenkin oli. Tämä on ainoa sellainen jakokulma, jossa jakaja on jaettavan vasemmalla eli väärällä puolella, ja myös osamäärän paikka jaettavan yläpuolella, eli sama syy miksi tähän siirryttiin, tuottaa joissakin tilanteissa ongelmia. Näin on erityisesti silloin, jos jaettava on jonkun muun laskutoimituksen tulos tai osamäärää on edelleen jatkokäsiteltävä. Mustetta kuluu, kun näiden kahden tärkeän luvun keskinäinen sijainti aiheuttaa ylimääräistä numeroidenkopiointitarvetta.

Kuva 9. Esimerkki amerikkalaisen jakokulman käytöstä (105,42:7=15,06)



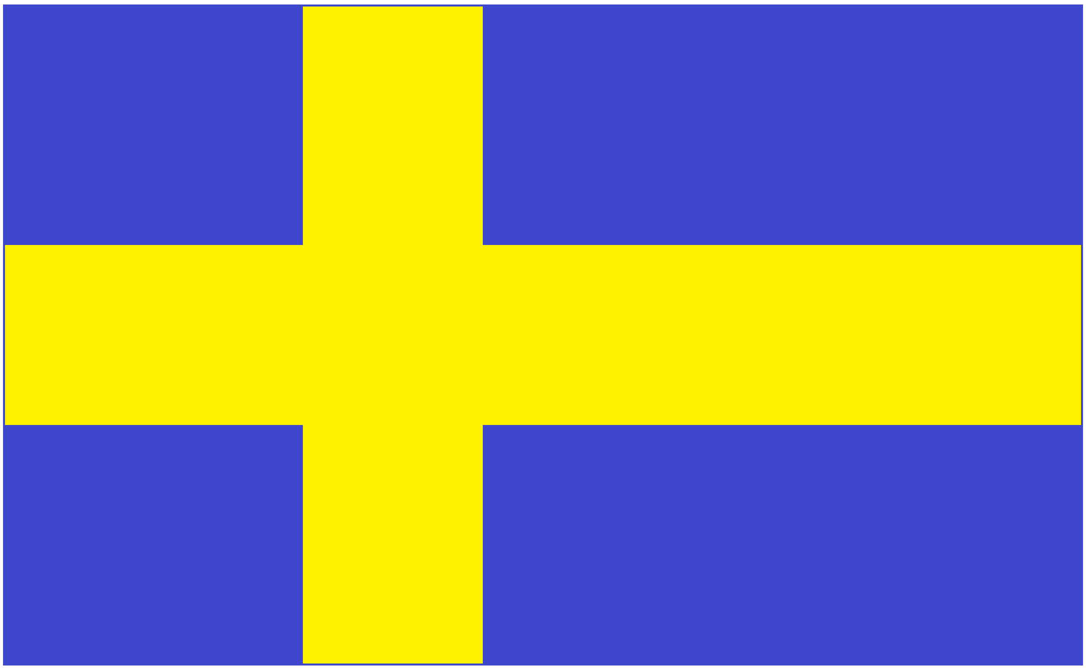
Ensin todetaan, että jaettavan ensimmäinen numero, ykkönen, on pienempi kuin jakajan ensimmäinen numero, seiska. Siispä otetaan mukaan seuraavakin jaettavan numero, joka on nolla, ja todetaan, että näistä muodostuva luku, kymmenen, on jakajaa suurempi. Tästä aloitetaan jako. Jakaja eli seitsemän mahtuu kymmeneen vain yhden kokonaisen kerran, eli osamäärän ensimmäiseksi numeroksi jaettavan kyseisen osan viimeisen numeron eli nollan päälle merkitään ykkönen. Sen jälkeen lasketaan kertolaskun avulla tarkastustuloksi seitsemän, joka vähennetään tämän vaiheen jaettavasta, eli koko jaettavan ensimmäisistä numeroista muodostuneesta kympistä. Seuraavalle kierrokselle jää kolme, jonka perään pudotetaan alkuperäisen jaettavan seuraava numero, viitonen. Kolmeenkymmeneenviiteen seitsemän mahtuu viiteen kertaan, eli seuraava osamäärän numero on viitonen. Tämä jako päättyy tasan, seitsemän kertaa viisi on täsmälleen tuo kolmekymmentäviisi, joten vähennyksestä saadaan tulokseksi nolla. Kun sen perään pudotetaan nelonen, todetaan pari asiaa. Ensinnäkin se, että jaettavan desimaalipilkku saavutettiin, jolloin kokonaislukujakajan ollessa kyseessä on myös osamäärään merkittävä desimaalipilkku juuri tässä vaiheessa, täsmälleen jaettavan desimaalipilkun päälle. Toisekseen nelonen on jälleen jakajana olevaa seiskaa pienempi. Desimaalipilkun perään on tällöin kirjoitettava nolla. Koska nolla kertaa mitä tahansa on nolla, ja nolla vähennettynä mistä tahansa on yhtä suuri kuin vähenevä, ei tässä vaiheessa tarvitse kirjoittaa nelosen alle nollaa ja sitten taas nelosta, vaan heti osamäärään nollan kirjoittamisen jälkeen voidaan pudottaa tähän jaettavaan vielä alkuperäisen jaettavan seuraava desimaali, kakkonen. Neljäkymmentäkaksi jaettuna seitsemällä on kuusi, joka on osamäärän seuraava numero, ja tässä vaiheessa jako myös päättyy tasan, koska kuusi kertaa seitsemän on juuri täsmälleen neljäkymmentäkaksi.

Edellä toistin tarkoituksella sen tekstin, joka oli myös edellisissä luvuissa lähes samasanaisesti. Algoritmi amerikkalaisessa jakokulmassa on todella sama kuin italialaisessa ja saksalaisessa. Tämän jakokulman hyvänä puolena on jaettavan ja osamäärän desimaalipilkkujen ja vastinnumeroiden sijoittuminen kohdakkain. Tästä piirteestä on kuitenkin myös haittaa. Haitat tulevat esiin silloin, jos jaettava muodostuu toisen laskutoimituksen tuloksena, tai jos osamäärää on jatkokäsiteltävä. Jos jatkokäsiteltävän luvun kopiointiin ei tällöin haluta tuhlata mustetta, joudutaan kirjoittamaan aiemmin paperilla olevien merkintöjen päälle, mistä luettavuus kärsii. Turhan musteenkulutuksen välttämiseksi tästä jakotavasta tulisikin pikaisesti luopua ja siirtyä joko italialaiseen tai saksalaiseen menetelmään. Huolimatta siitä, että aikanaan koulussa opin jakokulman juuri tällä amerikkalaisella tavalla, olen siirtynyt käyttämään pääasiassa italialaista tapaa, joka on vanhan koulukunnan tapa – tai niin kuin hiphop-kulttuurissa tavataan sanoa, ”old school”. Tässä kirjassa minun on tarkoitus myöhemmin, keskiarvolaskentaa ja Gaussin pääsiäisenetsintäalgoritmia koskevissa luvuissa, palata vielä niihin syihin, jotka johtivat siihen, että hylkäsin pois käytöstä näissä tapauksissa amerikkalaisen jakokulman ja siirryin käyttämään italialaista. Toinen huono puoli tällä jakokulmalla on jakajan sijainti jaettavaan nähden epäloogisessa paikassa, vasemmalla.

Jos siis tämän kirjan sellainen lukija, jolle koulussa opetettu jakokulma on amerikkalainen, päättää tämän kirjan luettuaan siirtyä käyttämään amerikkalaisen tilalla italialaista jakokulmaa, silloin tämä kirja on ainakin hänen kohdallaan täyttänyt tehtävänsä. Ja ennen pitkää tällainen henkilö varmasti huomaa sen kätevyyden, jonka minäkin olen italialaisesta jakokulmasta löytänyt – sen, että turhalta numeroiden kopioinnilta säästytään.

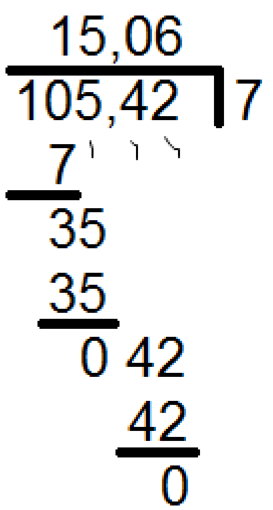
1.4. Ruotsalainen jakokulma (”portaat alas”, ”makaava tuoli”)

Kuva 10. Ruotsin lippu.



Kun amerikkalaista jakokulmaa kokeiltiin Ruotsin koululaitoksessa, havaittiin, että hahmotushäiriöisillä oppilailla oli taipumuksena kirjoittaa lukuja amerikkalaiseen jakokulmaan väärin päin, koska kyseinen jakokulma on sellainen, että jakaja on jaettavan vasemmalla puolella eli epäloogisessa paikassa. Niinpä 1980-luvulla Ruotsissa toteutettiin jälleen jakokulmauudistus. Se ei onneksi ole levinnyt tänne Suomen puolelle. Ruotsalainen jakokulma muistuttaa monessa suhteessa amerikkalaista. Ainoa ero on jakajan sijainti, joka ruotsalaisessa jakokulmassa on jaettavan oikealla puolella, kun amerikkalaisessa se oli vasemmalla. Seurauksena tästä kuitenkin on, että joissain tapauksissa jos jako ei päädy tasan ja jakoa halutaan jatkaa desimaaleihin, osamäärä tulee jaettavan lisäksi myös jakajan päälle. Tilanteissa, joissa jakaja on jonkun muun laskutoimituksen tulos, tästä on haittaa, minkä lisäksi tätä jakokulmaa koskevat samat haitat kuin amerikkalaista peilikuvaansa.

Kuva 11. Esimerkki ruotsalaisen jakokulman käytöstä (105,42:7=15,06)



Ensin todetaan, että jaettavan ensimmäinen numero, ykkönen, on pienempi kuin jakajan ensimmäinen numero, seiska. Siispä otetaan mukaan seuraavakin jaettavan numero, joka on nolla, ja todetaan, että näistä muodostuva luku, kymmenen, on jakajaa suurempi. Tästä aloitetaan jako. Jakaja eli seitsemän mahtuu kymmeneen vain yhden kokonaisen kerran, eli osamäärän ensimmäiseksi numeroksi jaettavan kyseisen osan viimeisen numeron eli nollan päälle merkitään ykkönen. Sen jälkeen lasketaan kertolaskun avulla tarkastustuloksi seitsemän, joka vähennetään tämän vaiheen jaettavasta, eli koko jaettavan ensimmäisistä numeroista muodostuneesta kympistä. Seuraavalle kierrokselle jää kolme, jonka perään pudotetaan alkuperäisen jaettavan seuraava numero, viitonen. Kolmeenkymmeneenviiteen seitsemän mahtuu viiteen kertaan, eli seuraava osamäärän numero on viitonen. Tämä jako päättyy tasan, seitsemän kertaa viisi on täsmälleen tuo kolmekymmentäviisi, joten vähennyksestä saadaan tulokseksi nolla. Kun sen perään pudotetaan nelonen, todetaan pari asiaa. Ensinnäkin se, että jaettavan desimaalipilkku saavutettiin, jolloin kokonaislukujakajan ollessa kyseessä on myös osamäärään merkittävä desimaalipilkku juuri tässä vaiheessa, täsmälleen jaettavan desimaalipilkun päälle. Toisekseen nelonen on jälleen jakajana olevaa seiskaa pienempi. Desimaalipilkun perään on tällöin kirjoitettava nolla. Koska nolla kertaa mitä tahansa on nolla, ja nolla vähennettynä mistä tahansa on yhtä suuri kuin vähenevä, ei tässä vaiheessa tarvitse kirjoittaa nelosen alle nollaa ja sitten taas nelosta, vaan heti osamäärään nollan kirjoittamisen jälkeen voidaan pudottaa tähän jaettavaan vielä alkuperäisen jaettavan seuraava desimaali, kakkonen. Neljäkymmentäkaksi jaettuna seitsemällä on kuusi, joka on osamäärän seuraava numero, ja tässä vaiheessa jako myös päättyy tasan, koska kuusi kertaa seitsemän on juuri täsmälleen neljäkymmentäkaksi.

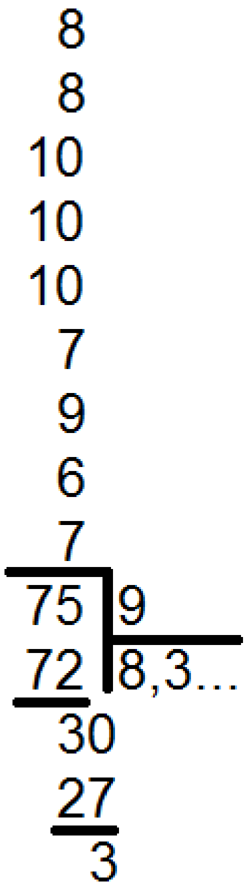
Edellä toistin tarkoituksella sen tekstin, joka oli myös edellisissä luvuissa lähes samasanaisesti. Algoritmi ruotsalaisessa jakokulmassa on todella sama kuin sen amerikkalaisessa peilikuvassa, samoin kuin muissakin tässä kirjassa esitellyissä jakokulmissa. Myös hyödyt ja haitat ovat suunnilleen samat kuin amerikkalaisessa jakokulmassa. Ruotsalaisessa on kuitenkin hyötyä siitä, että jakaja on jaettavan oikealla puolella, mutta haittaa siitä, että tämä seikka aiheuttaa, että joskus osamäärä on myös jakajan eikä ainoastaan jaettavan päällä.

On siis hyvä, että länsinaapurimme huonoa jakokulmaa ei otettu käyttöön täällä. Jos joku kuitenkin on siihen törmännyt, on tämä kirja täyttänyt tehtävänsä, jos hän ei enää tämän luettuaan tätä jakotapaa käytä.

2. Keskiarvon laskenta jakokulmassa eri tavoilla

2.1. Italialainen jakokulma

Kuva 12. Italialainen tapa laskea keskiarvo ((8+8+10+10+10+7+9+6+7):9=8,3)

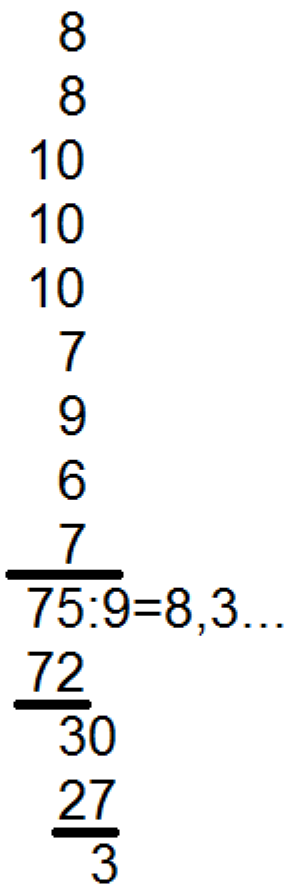


Ensin lasketaan yhteen lähtöarvot ja saadaan summaksi seitsemänkymmentäviisi. Seitsemän on lähtöarvojen lukumäärää eli yhdeksää pienempi, eli otetaan koko tuo luku jaettavaksi. Lähinnä seitsemääkymmentäviittä pienempi yhdeksän monikerta on kahdeksan, joka siis merkitään keskiarvon ensimmäiseksi numeroksi yhteenlaskettavien lukumäärän alle. Yhdeksän kertaa kahdeksan on seitsemänkymmentäkaksi, joka merkitään jaettavan alle. Erotukseksi tulee jakojäännöksenä kolme. Kun pudotettavia ei enää ole, merkitään keskiarvoon tähän kohtaan desimaalipilkku ja lisätään kolmosen perään nolla. Lähinnä kolmeakymmentä pienempi yhdeksän monikerta on kolme, joka merkitään keskiarvon seuraavaksi numeroksi. Yhdeksän kertaa kolme on kaksikymmentäseitsemän, joka merkitään tuon äskeisen kolmenkymmenen alle. Jakojäännökseksi saadaan taas kolme. Tässä vaiheessa todetaan, että tuo loppuun muodostunut kolmonen on desimaalikehitelmän jakso, joka toistuu äärettömän monta kertaa, eli jako voidaan keskeyttää ja ainoastaan todeta miten se jatkuisi.

Kuten tästä kuvasta näkyy, on italialainen jakokulma omiaan keskiarvolaskennassa. Samaa ei voida sanoa amerikkalaisesta eikä ruotsalaisesta jakokulmasta.

2.2. Saksalainen jakokulma

Kuva 13. Saksalainen tapa laskea keskiarvo ((8+8+10+10+10+7+9+6+7):9=8,3)

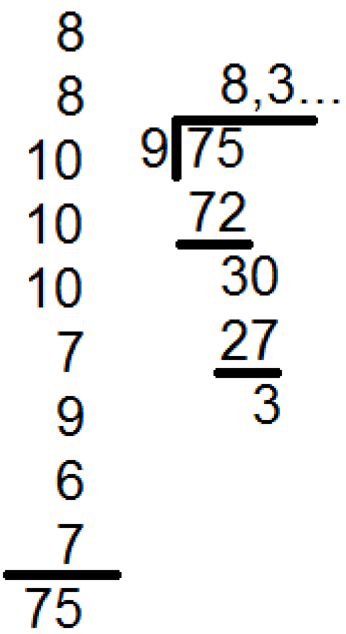


Ensin lasketaan yhteen lähtöarvot ja saadaan summaksi seitsemänkymmentäviisi. Seitsemän on lähtöarvojen lukumäärää eli yhdeksää pienempi, eli otetaan koko tuo luku jaettavaksi. Lähinnä seitsemääkymmentäviittä pienempi yhdeksän monikerta on kahdeksan, joka siis merkitään keskiarvon ensimmäiseksi numeroksi yhteenlaskettavien lukumäärän oikealle puolelle. Yhdeksän kertaa kahdeksan on seitsemänkymmentäkaksi, joka merkitään jaettavan alle. Erotukseksi tulee jakojäännöksenä kolme. Kun pudotettavia ei enää ole, merkitään keskiarvoon tähän kohtaan desimaalipilkku ja lisätään kolmosen perään nolla. Lähinnä kolmeakymmentä pienempi yhdeksän monikerta on kolme, joka merkitään keskiarvon seuraavaksi numeroksi. Yhdeksän kertaa kolme on kaksikymmentäseitsemän, joka merkitään tuon äskeisen kolmenkymmenen alle. Jakojäännökseksi saadaan taas kolme. Tässä vaiheessa todetaan, että tuo loppuun muodostunut kolmonen on desimaalikehitelmän jakso, joka toistuu äärettömän monta kertaa, eli jako voidaan keskeyttää ja ainoastaan todeta miten se jatkuisi.

Kuten tästä kuvasta näkyy, on saksalainen jakokulma omiaan keskiarvolaskennassa. Samaa ei voida sanoa amerikkalaisesta eikä ruotsalaisesta jakokulmasta.

2.3. Amerikkalainen jakokulma

Kuva 14. Amerikkalainen tapa laskea keskiarvo ((8+8+10+10+10+7+9+6+7):9=8,3)

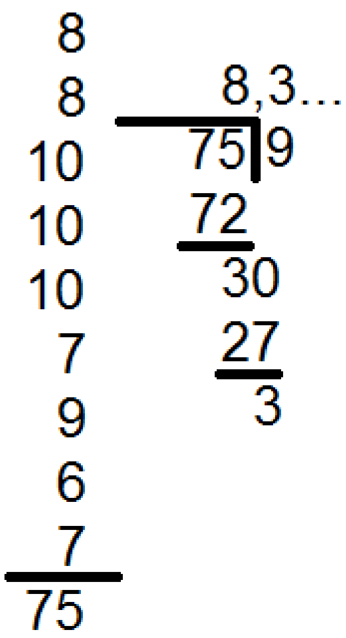


Kuten tästä kuvasta ilmenee, joudutaan tässä laskentatavassa lähtöarvojen yhteenlaskun jälkeen välisumma 75 kirjoittamaan kahteen eri paikkaan. Tämä välisumman kopiointi yhteenlaskuviivan alta portaiden alle on sekä ylimääräinen työvaihe että turhaa musteenkulutusta – sellaisenaan siis syy siihen, miksi amerikkalainen jakokulma tulisi hylätä. Kopioinnin jälkeen seuraavaksi todetaan, että jaettavan ensimmäinen numero seitsemän on lähtöarvojen lukumäärää eli yhdeksää pienempi, eli otetaan koko tuo luku jaettavaksi. Lähinnä seitsemääkymmentäviittä pienempi yhdeksän monikerta on kahdeksan, joka siis merkitään keskiarvon ensimmäiseksi numeroksi summan päälle. Yhdeksän kertaa kahdeksan on seitsemänkymmentäkaksi, joka merkitään jaettavan alle. Erotukseksi tulee jakojäännöksenä kolme. Kun pudotettavia ei enää ole, merkitään keskiarvoon tähän kohtaan desimaalipilkku ja lisätään kolmosen perään nolla. Lähinnä kolmeakymmentä pienempi yhdeksän monikerta on kolme, joka merkitään keskiarvon seuraavaksi numeroksi. Yhdeksän kertaa kolme on kaksikymmentäseitsemän, joka merkitään tuon äskeisen kolmenkymmenen alle. Jakojäännökseksi saadaan taas kolme. Tässä vaiheessa todetaan, että tuo loppuun muodostunut kolmonen on desimaalikehitelmän jakso, joka toistuu äärettömän monta kertaa, eli jako voidaan keskeyttää ja ainoastaan todeta miten se jatkuisi.

Tästä esimerkistä näkyy selvästi, miksi amerikkalaista jakokulmaa ei pitäisi käyttää keskiarvon laskemisessa. Jos välisummaa ei kopioitaisi, tulisi keskiarvo viimeisen yhteenlaskettavan (esimerkissämme siis seiskan) päälle. Tämä haittaa luettavuutta.

2.4. Ruotsalainen jakokulma

Kuva 15. Ruotsalainen tapa laskea keskiarvo ((8+8+10+10+10+7+9+6+7):9=8,3)



Kuten tästä kuvasta ilmenee, joudutaan tässä laskentatavassa lähtöarvojen yhteenlaskun jälkeen välisumma 75 kirjoittamaan kahteen eri paikkaan. Tämä välisumman kopiointi yhteenlaskuviivan alta portaiden alle on sekä ylimääräinen työvaihe että turhaa musteenkulutusta – sellaisenaan siis syy siihen, miksi ruotsalainen jakokulma tulisi hylätä. Kopioinnin jälkeen seuraavaksi todetaan, että jaettavan ensimmäinen numero seitsemän on lähtöarvojen lukumäärää eli yhdeksää pienempi, eli otetaan koko tuo luku jaettavaksi. Lähinnä seitsemääkymmentäviittä pienempi yhdeksän monikerta on kahdeksan, joka siis merkitään keskiarvon ensimmäiseksi numeroksi summan päälle. Yhdeksän kertaa kahdeksan on seitsemänkymmentäkaksi, joka merkitään jaettavan alle. Erotukseksi tulee jakojäännöksenä kolme. Kun pudotettavia ei enää ole, merkitään keskiarvoon tähän kohtaan desimaalipilkku ja lisätään kolmosen perään nolla. Lähinnä kolmeakymmentä pienempi yhdeksän monikerta on kolme, joka merkitään keskiarvon seuraavaksi numeroksi. Yhdeksän kertaa kolme on kaksikymmentäseitsemän, joka merkitään tuon äskeisen kolmenkymmenen alle. Jakojäännökseksi saadaan taas kolme. Tässä vaiheessa todetaan, että tuo loppuun muodostunut kolmonen on desimaalikehitelmän jakso, joka toistuu äärettömän monta kertaa, eli jako voidaan keskeyttää ja ainoastaan todeta miten se jatkuisi.

Tästä esimerkistä näkyy selvästi, miksi ruotsalaista jakokulmaa ei pitäisi käyttää keskiarvon laskemisessa. Jos välisummaa ei kopioitaisi, tulisi keskiarvo viimeisen yhteenlaskettavan (esimerkissämme siis seiskan) päälle. Tämä haittaa luettavuutta.

3. Karl Friedrich Gauss ja hänen pääsiäisenetsintäalgoritminsa

3.1. Kuka oli Karl Friedrich Gauss

Vappuaattona 1777 Saksassa syntyi erääseen Gaussin perheeseen matemaattisesti erittäin lahjakkaaksi osoittautunut poika, joka sai kasteessa nimet Karl Friedrich. Hän kehitti runsaasti matemaattisia ja tieteellisiä menetelmiä eri tarkoituksiin. Hänen matemaattinen lahjakkuutensa paljastui koulussa eräällä matematiikan tunnilla vuonna 1787. Matematiikanopettaja halusi saada luokkansa kolmeksi minuutiksi hiljaiseksi voidakseen keskittyä johonkin, mutta koska Karl Friedrich Gauss oli tuolla luokalla, epäonnistui opettaja tässä yrityksessään. Matematiikanopettaja nimittäin pyysi oppilaitaan laskemaan ”yksi plus kaksi plus kolme plus ja niin edelleen kaikki luvut sataan asti yhteen”. Ei mennyt kuin kymmenen sekuntia, kun juuri Karl Friedrich Gauss viittasi ja puheenvuoron saatuaan vastasi: ”Summa on viisituhattaviisikymmentä.” Opettaja ihmetteli, miten hänen oppilaansa oli voinut laskea niin huimaa vauhtia, ja kysyikin seuraavaksi: ”Summa on oikein, mutta miten päädyit tähän tulokseen niin nopeasti?” Tähän Karl Friedrich Gauss vastasi näin: ”Yhteenlaskuhan on tunnetusti sekä vaihdannainen että liitännäinen laskutoimitus. Yhteenlaskettavat voidaan siis järjestää mielivaltaiseen järjestykseen. En ajatellut asiaa yksi plus kaksi plus ja niin edelleen, vaan yksi plus sata plus kaksi plus yhdeksänkymmentäyhdeksän plus ja niin edelleen plus viisikymmentä plus viisikymmentäyksi. Sitten havaitsin että yksi plus sata on yhtä suuri kuin kaksi plus yhdeksänkymmentäyhdeksän ja niin edelleen. Tämä summa, joka esiintyy tällä tavoin viiteenkymmeneen kertaan, on satayksi. Sen jälkeen siirryin kertolaskuun ja laskin, että viisikymmentä kertaa satayksi on viisituhattaviisikymmentä.” Näin Gauss keksi jo 10-vuotiaana aritmeettisen sarjan kaavan.

Jakojäännösten summien jakojäännöksiin perustuvan pääsiäisenetsintäalgoritmin, jota tässä kirjassa käytetään, on kehittänyt täsmälleen sama Karl Friedrich Gauss myöhemmin. Siitä tarkemmin seuraavassa luvussa.

3.2. Pääsiäisen etsintä Gaussin algoritmilla

Kirjassaan ”Pikku jättiläinen” Yrjö Karilas (1937, s. 41) esittelee seuraavan, Karl Friedrich Gaussin kehittämän menetelmän määrittää tämän tärkeän kuun vaiheiden mukaan siirtyvän pyhän ajankohdan. Uudemmissa painoksissa tätä ei ole. Samaa menetelmää voidaan käyttää myös määrittämään muiden kuun vaiheiden mukaan siirtyvien pyhien ajankohdat, koska niiden etäisyys tästä tärkeimmästä pyhästä on vakio.

Ensimmäinen kahdesta yhteenlaskettavasta määritetään siten, että haluttu vuosiluku jaetaan ensin yhdeksällätoista. Tämän laskutoimituksen jakojäännös kerrotaan sitten yhdeksällätoista, ja siihen lisätään tämän jälkeen korjaustermi, joka muodostuu myös vuosiluvusta. Korjaustermiä laskettaessa vuosilukuun lisätään ensin sata ja sen jälkeen summa jaetaan kahdellasadalla. Jakojäännös tästä jaosta jätetään huomiotta. Osamäärään lisätään neljätoista. Näin saadusta summasta otetaan ensimmäiseksi yhteenlaskettavaksi jakojäännös jaettaessa kolmellakymmenellä.

Toista yhteenlaskettavaa määritettäessä haluttu vuosiluku jaetaan neljällä ja seitsemällä. Näistä laskutoimituksista ensin mainitun jakojäännös kerrotaan kahdella ja toisen neljällä. Lisäksi edellä saatu ensimmäinen yhteenlaskettava kerrotaan kuudella. Näin saadut kolme tuloa lasketaan yhteen ja tähän summaan lisätään vielä toisenlainen korjaustermi. Sitä laskettaessa vuosiluku jaetaan ensin sadalla ja saatu osamäärä vielä neljällä. Ensimmäisen jaon osamäärästä vähennetään toisen jaon osamäärä, ja tähän erotukseen lisätään neljä. Näin saadusta summasta otetaan toiseksi yhteenlaskettavaksi jakojäännös jaettaessa seitsemällä.

Tällä tavoin muodostettujen kahden yhteenlaskettavan summa osoittaa useimmissa tapauksissa sellaisenaan siirtyvien pyhien ajankohdat. Pääsiäissunnuntai on huhtikuussa, jos tämä summa on kaksinumeroinen, ja maaliskuussa, jos summa on yksinumeroinen. Maaliskuun päivä saadaan lisäämällä summaan kaksikymmentäkaksi ja huhtikuun päivä vähentämällä summasta yhdeksän.

Myöhäisen pääsiäisen tapauksessa tästä säännöstä on kuitenkin kaksi poikkeusta. Jos tällä laskutoimituksella saadaan pääsiäisen ajankohdaksi huhtikuun 26. päivä, on pääsiäinen jo huhtikuun 19. päivä. Jos taas ajankohdaksi saadaan huhtikuun 25. päivä, voi pääsiäinen olla joko huhtikuun 25. päivä tai huhtikuun 18. päivä riippuen yksittäisistä yhteenlaskettavista. Silloin kun vuosiluvun jakojäännös seitsemällä on kuusi ja vuosiluvun jakojäännös yhdeksällätoista on vähintään yksitoista, on tässä tapauksessa pääsiäinen huhtikuun 18. päivänä, muissa tapauksissa huhtikuun 25. päivänä.

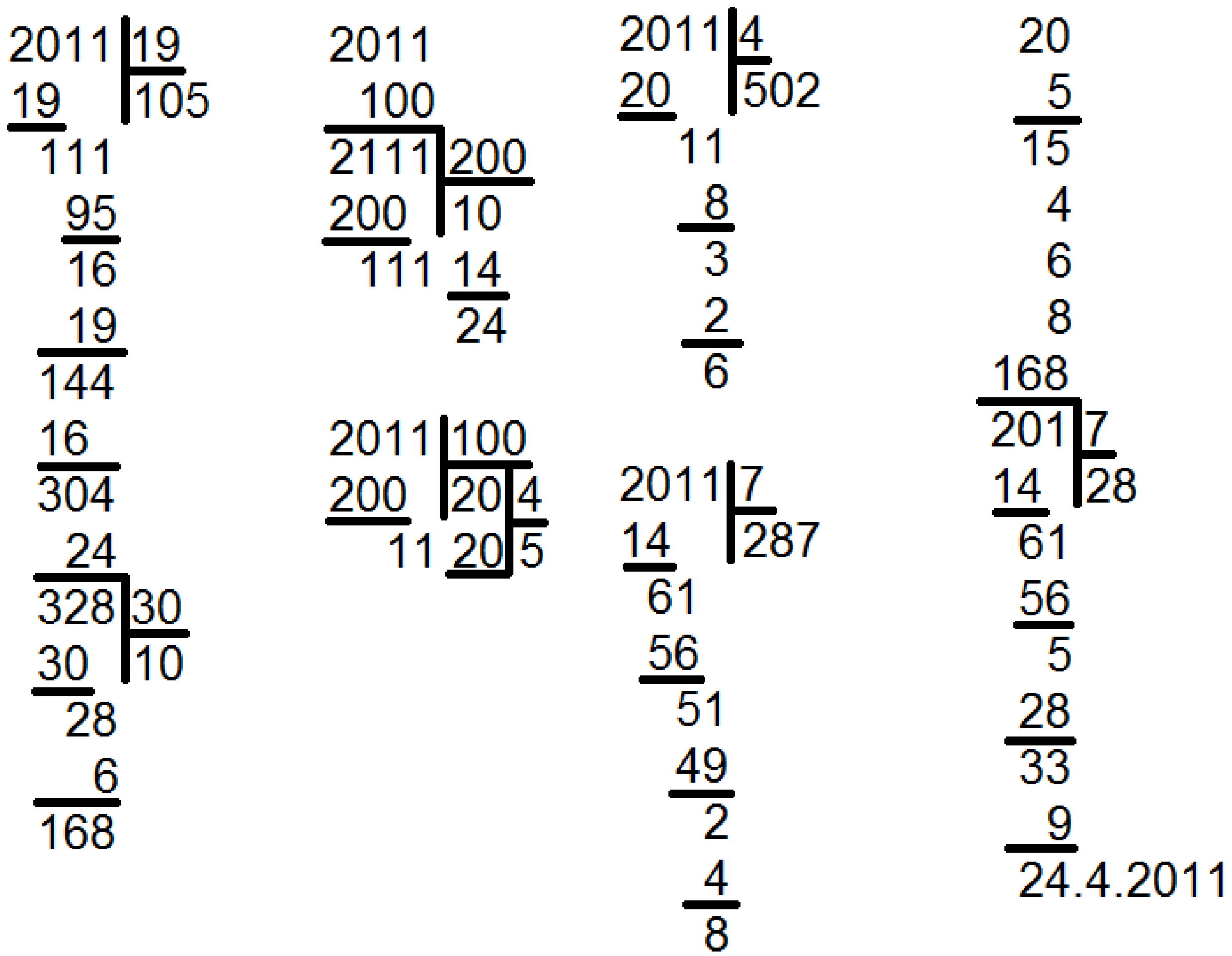
Tässä luvussa viitatun kirjan lähdeviite:

Karilas, Yrjö, 1937. Pikku jättiläinen, 3. painos. Porvoo, WSOY, 1328 s.

4. Gaussin pääsiäisenetsintäalgoritmin soveltaminen eri jakokulmilla

4.1. Italialainen jakokulma

Kuva 16. Pääsiäisen 2011 määritys italialaista jakokulmaa käyttäen



Ensin määritetään vuosiluvun jakojäännös yhdeksällätoista. Ensimmäiset kaksi numeroa muodostavat numeron kaksikymmentä, johon yhdeksäntoista sisältyy kerran. Osamäärän ensimmäinen numero, joka merkitään jakajan alle, on siis ykkönen, mutta tällä on väliä ainoastaan määritettäessä vähentäjää jakojäännöksen määrittämiseksi. Yksi kertaa yhdeksäntoista on yhdeksäntoista, jolloin erotukseksi jää yksi. Sen perään otetaan vuosiluvun seuraava numero, ykkönen. Yksitoista on pienempi kuin yhdeksäntoista, joten osamäärän perään kirjoitetaan nolla ja sitten otetaan vain seuraava vuosiluvun numero, joka sekin on ykkönen. Näin saatuun lukuun, sataanyhteentoista, yhdeksäntoista sisältyy viisi kertaa. Osamäärän perään kirjoitetaan nyt siis viitonen, ja vähentäjäksi kirjoitetaan viisi kertaa yhdeksäntoista eli yhdeksänkymmentäviisi. Vähennettäessä tämä luku sadastayhdestätoista saadaan erotukseksi kuusitoista, ja koska enempää pudotettavia ei ole, tämä on jakojäännös. Se pitää kertoa yhdeksällätoista. Yhdeksän kertaa kuusi on viisikymmentäneljä, josta saadaan kertojan viimeisen numeron mukaisen rivin loppuun nelonen, ja viitosesta tulee muistinumero. Yhdeksän kertaa yksi on yhdeksän, ja siihen lisätään tuo viitonen, jolloin saadaan neljätoista, joka kirjoitetaan tälle riville siellä ennestään olevan nelosen vasemmalle puolelle. Kertojan seuraavaksi käsittelyyn tuleva numero on ykkönen, joten tämän alle kirjoitetaan kerrottava eli jakojäännös sellaisenaan siten, että sen oikea reuna on tuon kertojassa olevan ykkösen kohdalla. Tämän jälkeen kohdakkain olevat numerot lasketaan yhteen. Viimeinen nelonen, jonka alla on vain tyhjää, pudotetaan alimman viivan alle sellaisenaan. Neljä plus kuusi on kymmenen, eli seuraavaksi tuon nelosen vasemmalle puolelle merkitään nolla, ja ykkönen jää muistinumeroksi. Yksi plus yksi on kaksi, ja siihen lisättynä muistinumerona oleva ykkönen tuottaa kolmosen, joka merkitään nollan vasemmalle puolelle. Tuloksi saamme siis kolmesataaneljä, ja siihen on seuraavaksi lisättävä korjaustermi. Tätä varten lisäämme vuosilukuun ensin sata vuotta ja päädymme lukuun 2111. Se jaetaan kahdellasadalla. Ensimmäisiin kolmeen numeroon, joista muodostuu luku kaksisataayksitoista, sisältyy kaksisataa yhden kerran. Merkitsemme nyt siis ykkösen jakajan alle ja jakajan sellaisenaan jaettavan alle. Vähennyslasku tuottaa tulokseksi yksitoista, jonka perään pudotetaan jaettavan seuraava numero, ykkönen. Satayksitoista on pienempi kuin kaksisataa, eli osamäärän seuraavaksi numeroksi merkitsemme edellä saadun ykkösen perään nollan. Satayksitoista jää jakojäännökseksi, mutta sillä ei enää tässä vaiheessa ole väliä. Osamäärään sen sijaan lisätään neljätoista, jolloin summaksi saadaan kaksikymmentäneljä. Se lisätään aiemmin saatuun kolmeensataanneljään, jolloin summaksi saadaan kolmesataakaksikymmentäkahdeksan, josta on otettava jakojäännös kolmellakymmenellä. Ensimmäisistä kahdesta numerosta muodostuu kolmekymmentäkaksi, johon kolmekymmentä sisältyy yhden kerran. Jakajan alle osamäärän ensimmäiseksi numeroksi, jolla taas tässä tilanteessa on vain tarkastustulon määrittämisessä väliä, merkitään siis ykkönen, ja jakaja kirjoitetaan sellaisenaan jaettavan alle. Vähennyslaskun tuloksena saamme kakkosen. Sen perään pudotamme jaettavan seuraavan numeron, joka on kahdeksikko. Kaksikymmentäkahdeksan on kuitenkin jakajaa eli kolmeakymmentä pienempi, joten osamäärän seuraavaksi numeroksi pannaan nolla. Koska enempää pudotettavia ei ole, on tämä kaksikymmentäkahdeksan samalla haluttu jakojäännös ja ensimmäinen yhteenlaskettava. Se on vielä kerrottava kuudella syistä, jotka liittyvät toisen yhteenlaskettavan määrittämiseen. Tämä tulo on satakuusikymmentäkahdeksan.

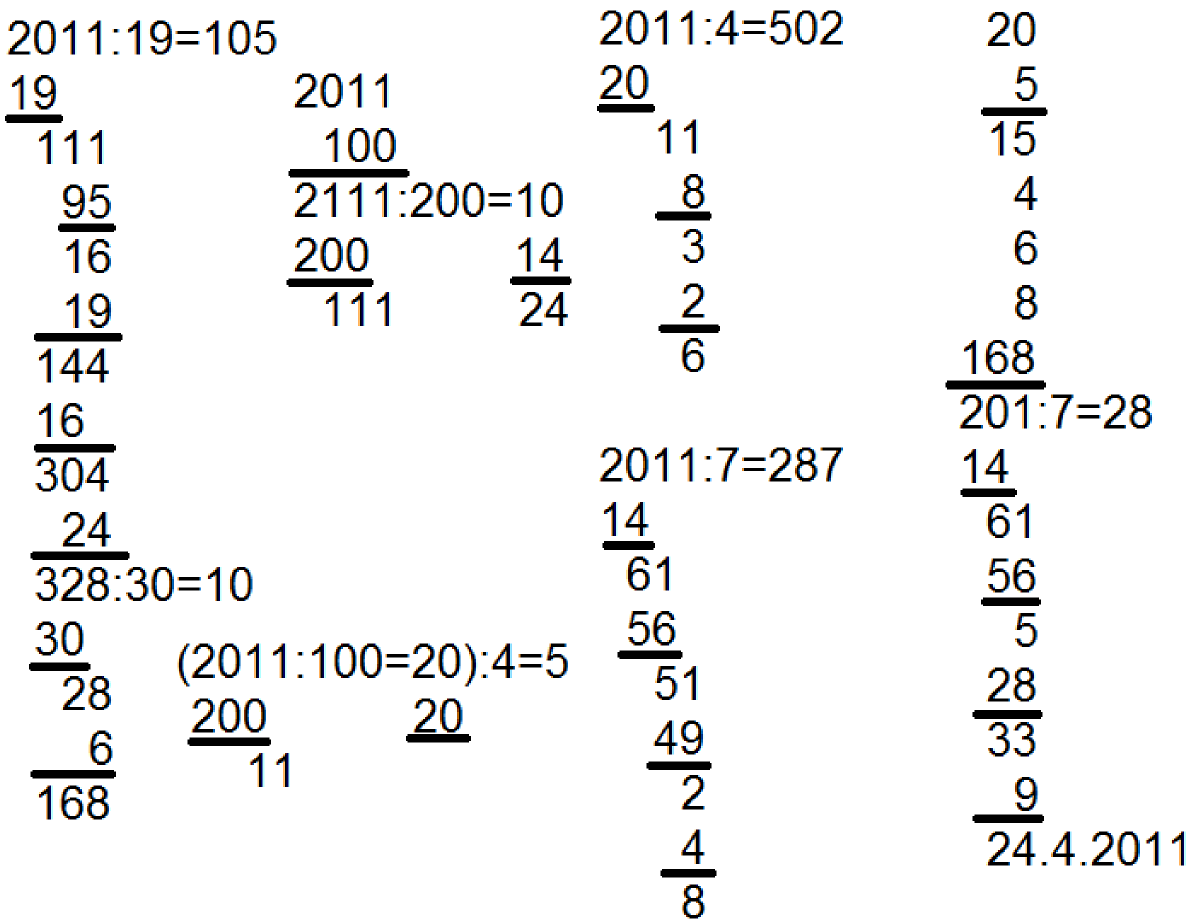
Toista yhteenlaskettavaa määritettäessä määritämme vuosiluvusta ensin jakojäännökset jaettaessa neljällä ja seitsemällä. Neljällä jaettaessa toteamme ensin, että vuosiluvun ensimmäinen numero, kakkonen, on nelosta pienempi, joten otamme myös seuraavan nollan mukaan. Kahteenkymmeneen mahtuu nelonen viiteen kertaan, eli osamäärän ensimmäinen numero on siis viitonen, joka merkitään jakajan alle. Viisi kertaa neljä on täsmälleen kaksikymmentä, eli seuraavalle kierrokselle jää tästä erotukseksi nolla. Sen perään otamme vuosiluvun seuraavan numeron, ykkösen. Koska näin muodostunut luku on yksi ja se on pienempi kuin neljä, kirjoitamme osamäärän perään nollan ja pudotamme mukaan vuosiluvusta vielä seuraavan numeron, joka sekin on ykkönen. Näin muodostunut luku on yksitoista ja siihen mahtuu nelonen kahteen kertaan, eli osamäärän kolmas numero on siis kakkonen. Kaksi kertaa neljä on kahdeksan, eli nyt erotukseksi saadaan kolme. Koska pudotettavia ei enää ole, on tämä kyseinen jakojäännös. Se on vielä jatkoa varten kerrottava kakkosella, jolloin tuloksi saadaan kuusi. Seitsemällä jaettaessa toteamme ensin, että vuosiluvun ensimmäinen numero, kakkonen, on seitsemää pienempi, joten otamme mukaan myös vuosiluvun seuraavan numeron, nollan. Kahteenkymmeneen mahtuu seiska kahteen kertaan, eli osamäärän ensimmäinen numero on kaksi. Se merkitään jakajan alle. Kaksi kertaa seitsemän on neljätoista, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi kuusi. Sen perään otamme vuosiluvun seuraavan numeron, ykkösen. Kuuteenkymmeneenyhteen mahtuu seiska kahdeksaan kertaan, eli osamäärän seuraava numero on kahdeksan. Kahdeksan kertaa seitsemän on viisikymmentäkuusi, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi viisi. Sen perään otamme vuosiluvun seuraavan numeron, ykkösen. Viiteenkymmeneenyhteen mahtuu seiska seitsemään kertaan, eli osamäärän seuraava numero on seitsemän. Seitsemän kertaa seitsemän on neljäkymmentäyhdeksän, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi kaksi. Koska pudotettavia ei enää ole, on tämä kyseinen jakojäännös. Se on vielä jatkoa varten kerrottava neljällä, jolloin tuloksi saadaan kahdeksan.

Tämän jälkeen lasketaan korjaustermi. Sitä varten vuosiluku jaetaan ensin sadalla. Vuosiluvun kolme ensimmäistä numeroa muodostavat luvun kaksisataayksi. Siihen sata mahtuu kahteen kertaan. Kakkonen merkitään jakajan alle. Kaksi kertaa sata on kaksisataa, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi ykkösen, jonka perään vuosiluvun viimeinen ykkönen pudotetaan. Kun yksitoistakin on pienempi kuin sata, merkitään seuraavaksi osamäärän perään nolla, ja kun pudotettavia ei enää ole, jää jakojäännökseksi yksitoista. Tämän jälkeen saatu osamäärä, kaksikymmentä, jaetaan edelleen neljällä, ja uudeksi osamääräksi saadaan tasan viisi. Tämä jälkimmäinen jako päättyy tasan. Korjaustermi on näiden perättäisten jakolaskutoimitusten yhteydessä saatujen osamäärien erotus plus neljä. Vähennyslasku tuottaa tulokseksi viisitoista. Siihen lisätään ensin neljä ja sen jälkeen vielä vuosiluvun edellä mainituista jakojäännöksistä lasketut tulot eli kuusi, kahdeksan ja satakuusikymmentäkahdeksan. Summaksi tulee kaksisataayksi, josta otetaan jakojäännös seitsemällä. Kakkonen on pienempi kuin seitsemän, eli myös seuraava nolla otetaan mukaan. Kahteenkymmeneen seitsemän mahtuu kahdesti, eli osamäärän ensimmäinen numero on kakkonen, joka merkitään jakajan alle. Kaksi kertaa seitsemän on neljätoista, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi kuusi. Sen perään otetaan viimeinen ykkönen. Kuuteenkymmeneenyhteen seitsemän mahtuu kahdeksan kertaa, eli osamäärän seuraava numero on kahdeksan. Kahdeksan kertaa seitsemän on viisikymmentäkuusi, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi viisi. Koska pudotettavia ei enää ole, on tämä jakojäännös ja siten toinen yhteenlaskettava. Ensimmäinen yhteenlaskettava, joksi saatiin kaksikymmentäkahdeksan, lisätään siihen, ja summaksi saadaan kolmekymmentäkolme. Se on kaksinumeroinen luku, eli vähennetään yhdeksän. Erotukseksi saadaan kaksikymmentäneljä, mikä tarkoittaa, että pääsiäinen 2011 on huhtikuun 24. päivä.

Vaikka tässäkin laskennassa esiintyy jonkin verran numeroiden kopiointia, sitä ei esiinny läheskään yhtä paljoa kuin käytettäessä amerikkalaista tai ruotsalaista jakokulmaa, mikä puhuu sen puolesta, että pääsiäisen ajankohdan määrittämiseen italialaisella menetelmällä kuluu vähemmän mustetta.

4.2. Saksalainen jakokulma

Kuva 17. Pääsiäisen 2011 määritys saksalaista jakokulmaa käyttäen



Ensin määritetään vuosiluvun jakojäännös yhdeksällätoista. Ensimmäiset kaksi numeroa muodostavat numeron kaksikymmentä, johon yhdeksäntoista sisältyy kerran. Osamäärän ensimmäinen numero, joka merkitään jakajan oikealle puolelle, on siis ykkönen, mutta tällä on väliä ainoastaan määritettäessä vähentäjää jakojäännöksen määrittämiseksi. Yksi kertaa yhdeksäntoista on yhdeksäntoista, jolloin erotukseksi jää yksi. Sen perään otetaan vuosiluvun seuraava numero, ykkönen. Yksitoista on pienempi kuin yhdeksäntoista, joten osamäärän perään kirjoitetaan nolla ja sitten otetaan vain seuraava vuosiluvun numero, joka sekin on ykkönen. Näin saatuun lukuun, sataanyhteentoista, yhdeksäntoista sisältyy viisi kertaa. Osamäärän perään kirjoitetaan nyt siis viitonen, ja vähentäjäksi kirjoitetaan viisi kertaa yhdeksäntoista eli yhdeksänkymmentäviisi. Vähennettäessä tämä luku sadastayhdestätoista saadaan erotukseksi kuusitoista, ja koska enempää pudotettavia ei ole, tämä on jakojäännös. Se pitää kertoa yhdeksällätoista. Yhdeksän kertaa kuusi on viisikymmentäneljä, josta saadaan kertojan viimeisen numeron mukaisen rivin loppuun nelonen, ja viitosesta tulee muistinumero. Yhdeksän kertaa yksi on yhdeksän, ja siihen lisätään tuo viitonen, jolloin saadaan neljätoista, joka kirjoitetaan tälle riville siellä ennestään olevan nelosen vasemmalle puolelle. Kertojan seuraavaksi käsittelyyn tuleva numero on ykkönen, joten tämän alle kirjoitetaan kerrottava eli jakojäännös sellaisenaan siten, että sen oikea reuna on tuon kertojassa olevan ykkösen kohdalla. Tämän jälkeen kohdakkain olevat numerot lasketaan yhteen. Viimeinen nelonen, jonka alla on vain tyhjää, pudotetaan alimman viivan alle sellaisenaan. Neljä plus kuusi on kymmenen, eli seuraavaksi tuon nelosen vasemmalle puolelle merkitään nolla, ja ykkönen jää muistinumeroksi. Yksi plus yksi on kaksi, ja siihen lisättynä muistinumerona oleva ykkönen tuottaa kolmosen, joka merkitään nollan vasemmalle puolelle. Tuloksi saamme siis kolmesataaneljä, ja siihen on seuraavaksi lisättävä korjaustermi. Tätä varten lisäämme vuosilukuun ensin sata vuotta ja päädymme lukuun 2111. Se jaetaan kahdellasadalla. Ensimmäisiin kolmeen numeroon, joista muodostuu luku kaksisataayksitoista, sisältyy kaksisataa yhden kerran. Merkitsemme nyt siis ykkösen jakajan alle ja jakajan sellaisenaan jaettavan alle. Vähennyslasku tuottaa tulokseksi yksitoista, jonka perään pudotetaan jaettavan seuraava numero, ykkönen. Satayksitoista on pienempi kuin kaksisataa, eli osamäärän seuraavaksi numeroksi merkitsemme edellä saadun ykkösen perään nollan. Satayksitoista jää jakojäännökseksi, mutta sillä ei enää tässä vaiheessa ole väliä. Osamäärään sen sijaan lisätään neljätoista, jolloin summaksi saadaan kaksikymmentäneljä. Se lisätään aiemmin saatuun kolmeensataanneljään, jolloin summaksi saadaan kolmesataakaksikymmentäkahdeksan, josta on otettava jakojäännös kolmellakymmenellä. Ensimmäisistä kahdesta numerosta muodostuu kolmekymmentäkaksi, johon kolmekymmentä sisältyy yhden kerran. Jakajan oikealle puolelle osamäärän ensimmäiseksi numeroksi, jolla taas tässä tilanteessa on vain tarkastustulon määrittämisessä väliä, merkitään siis ykkönen, ja jakaja kirjoitetaan sellaisenaan jaettavan alle. Vähennyslaskun tuloksena saamme kakkosen. Sen perään pudotamme jaettavan seuraavan numeron, joka on kahdeksikko. Kaksikymmentäkahdeksan on kuitenkin jakajaa eli kolmeakymmentä pienempi, joten osamäärän seuraavaksi numeroksi pannaan nolla. Koska enempää pudotettavia ei ole, on tämä kaksikymmentäkahdeksan samalla haluttu jakojäännös ja ensimmäinen yhteenlaskettava. Se on vielä kerrottava kuudella syistä, jotka liittyvät toisen yhteenlaskettavan määrittämiseen. Tämä tulo on satakuusikymmentäkahdeksan.

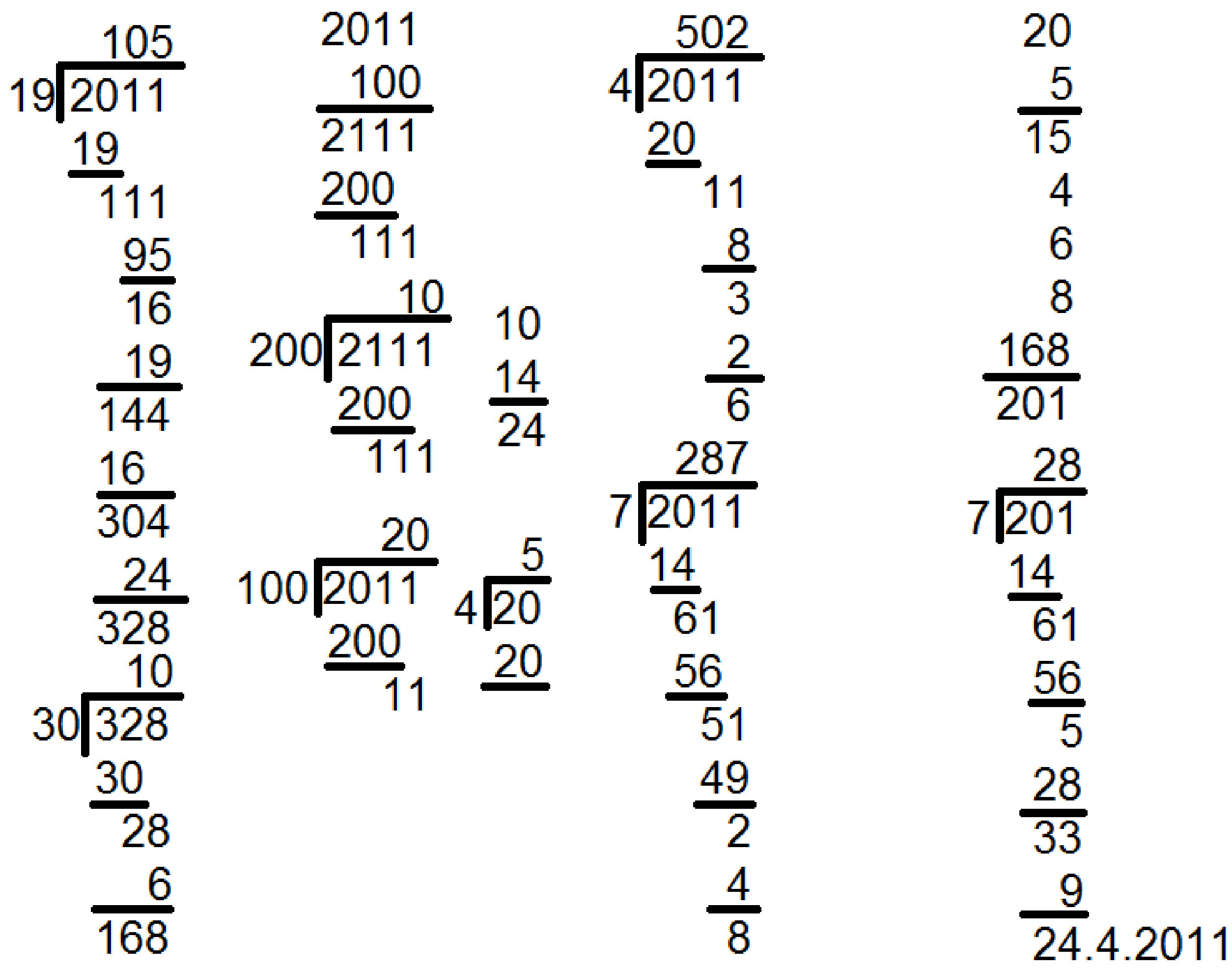
Toista yhteenlaskettavaa määritettäessä määritämme vuosiluvusta ensin jakojäännökset jaettaessa neljällä ja seitsemällä. Neljällä jaettaessa toteamme ensin, että vuosiluvun ensimmäinen numero, kakkonen, on nelosta pienempi, joten otamme myös seuraavan nollan mukaan. Kahteenkymmeneen mahtuu nelonen viiteen kertaan, eli osamäärän ensimmäinen numero on siis viitonen, joka merkitään jakajan oikealle puolelle. Viisi kertaa neljä on täsmälleen kaksikymmentä, eli seuraavalle kierrokselle jää tästä erotukseksi nolla. Sen perään otamme vuosiluvun seuraavan numeron, ykkösen. Koska näin muodostunut luku on yksi ja se on pienempi kuin neljä, kirjoitamme osamäärän perään nollan ja pudotamme mukaan vuosiluvusta vielä seuraavan numeron, joka sekin on ykkönen. Näin muodostunut luku on yksitoista ja siihen mahtuu nelonen kahteen kertaan, eli osamäärän kolmas numero on siis kakkonen. Kaksi kertaa neljä on kahdeksan, eli nyt erotukseksi saadaan kolme. Koska pudotettavia ei enää ole, on tämä kyseinen jakojäännös. Se on vielä jatkoa varten kerrottava kakkosella, jolloin tuloksi saadaan kuusi. Seitsemällä jaettaessa toteamme ensin, että vuosiluvun ensimmäinen numero, kakkonen, on seitsemää pienempi, joten otamme mukaan myös vuosiluvun seuraavan numeron, nollan. Kahteenkymmeneen mahtuu seiska kahteen kertaan, eli osamäärän ensimmäinen numero on kaksi. Se merkitään jakajan alle. Kaksi kertaa seitsemän on neljätoista, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi kuusi. Sen perään otamme vuosiluvun seuraavan numeron, ykkösen. Kuuteenkymmeneenyhteen mahtuu seiska kahdeksaan kertaan, eli osamäärän seuraava numero on kahdeksan. Kahdeksan kertaa seitsemän on viisikymmentäkuusi, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi viisi. Sen perään otamme vuosiluvun seuraavan numeron, ykkösen. Viiteenkymmeneenyhteen mahtuu seiska seitsemään kertaan, eli osamäärän seuraava numero on seitsemän. Seitsemän kertaa seitsemän on neljäkymmentäyhdeksän, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi kaksi. Koska pudotettavia ei enää ole, on tämä kyseinen jakojäännös. Se on vielä jatkoa varten kerrottava neljällä, jolloin tuloksi saadaan kahdeksan.

Tämän jälkeen lasketaan korjaustermi. Sitä varten vuosiluku jaetaan ensin sadalla. Vuosiluvun kolme ensimmäistä numeroa muodostavat luvun kaksisataayksi. Siihen sata mahtuu kahteen kertaan. Kakkonen merkitään jakajan oikealle puolelle. Kaksi kertaa sata on kaksisataa, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi ykkösen, jonka perään vuosiluvun viimeinen ykkönen pudotetaan. Kun yksitoistakin on pienempi kuin sata, merkitään seuraavaksi osamäärän perään nolla, ja kun pudotettavia ei enää ole, jää jakojäännökseksi yksitoista. Tämän jälkeen saatu osamäärä, kaksikymmentä, jaetaan edelleen neljällä, ja uudeksi osamääräksi saadaan tasan viisi. Tämä jälkimmäinen jako päättyy tasan. Korjaustermi on näiden perättäisten jakolaskutoimitusten yhteydessä saatujen osamäärien erotus plus neljä. Vähennyslasku tuottaa tulokseksi viisitoista. Siihen lisätään ensin neljä ja sen jälkeen vielä vuosiluvun edellä mainituista jakojäännöksistä lasketut tulot eli kuusi, kahdeksan ja satakuusikymmentäkahdeksan. Summaksi tulee kaksisataayksi, josta otetaan jakojäännös seitsemällä. Kakkonen on pienempi kuin seitsemän, eli myös seuraava nolla otetaan mukaan. Kahteenkymmeneen seitsemän mahtuu kahdesti, eli osamäärän ensimmäinen numero on kakkonen, joka merkitään jakajan oikealle puolelle. Kaksi kertaa seitsemän on neljätoista, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi kuusi. Sen perään otetaan viimeinen ykkönen. Kuuteenkymmeneenyhteen seitsemän mahtuu kahdeksan kertaa, eli osamäärän seuraava numero on kahdeksan. Kahdeksan kertaa seitsemän on viisikymmentäkuusi, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi viisi. Koska pudotettavia ei enää ole, on tämä jakojäännös ja siten toinen yhteenlaskettava. Ensimmäinen yhteenlaskettava, joksi saatiin kaksikymmentäkahdeksan, lisätään siihen, ja summaksi saadaan kolmekymmentäkolme. Se on kaksinumeroinen luku, eli vähennetään yhdeksän. Erotukseksi saadaan kaksikymmentäneljä, mikä tarkoittaa, että pääsiäinen 2011 on huhtikuun 24. päivä.

Vaikka tässäkin laskennassa esiintyy jonkin verran numeroiden kopiointia, sitä ei esiinny läheskään yhtä paljoa kuin käytettäessä amerikkalaista tai ruotsalaista jakokulmaa, mikä puhuu sen puolesta, että pääsiäisen ajankohdan määrittämiseen saksalaisella menetelmällä kuluu vähemmän mustetta.

4.3. Amerikkalainen jakokulma

Kuva 18. Pääsiäisen 2011 määritys amerikkalaista jakokulmaa käyttäen



Ensin määritetään vuosiluvun jakojäännös yhdeksällätoista. Ensimmäiset kaksi numeroa muodostavat numeron kaksikymmentä, johon yhdeksäntoista sisältyy kerran. Osamäärän ensimmäinen numero, joka merkitään jaettavan päälle, on siis ykkönen, mutta tällä on väliä ainoastaan määritettäessä vähentäjää jakojäännöksen määrittämiseksi. Yksi kertaa yhdeksäntoista on yhdeksäntoista, jolloin erotukseksi jää yksi. Sen perään otetaan vuosiluvun seuraava numero, ykkönen. Yksitoista on pienempi kuin yhdeksäntoista, joten osamäärän perään kirjoitetaan nolla ja sitten otetaan vain seuraava vuosiluvun numero, joka sekin on ykkönen. Näin saatuun lukuun, sataanyhteentoista, yhdeksäntoista sisältyy viisi kertaa. Osamäärän perään kirjoitetaan nyt siis viitonen, ja vähentäjäksi kirjoitetaan viisi kertaa yhdeksäntoista eli yhdeksänkymmentäviisi. Vähennettäessä tämä luku sadastayhdestätoista saadaan erotukseksi kuusitoista, ja koska enempää pudotettavia ei ole, tämä on jakojäännös. Se pitää kertoa yhdeksällätoista. Yhdeksän kertaa kuusi on viisikymmentäneljä, josta saadaan kertojan viimeisen numeron mukaisen rivin loppuun nelonen, ja viitosesta tulee muistinumero. Yhdeksän kertaa yksi on yhdeksän, ja siihen lisätään tuo viitonen, jolloin saadaan neljätoista, joka kirjoitetaan tälle riville siellä ennestään olevan nelosen vasemmalle puolelle. Kertojan seuraavaksi käsittelyyn tuleva numero on ykkönen, joten tämän alle kirjoitetaan kerrottava eli jakojäännös sellaisenaan siten, että sen oikea reuna on tuon kertojassa olevan ykkösen kohdalla. Tämän jälkeen kohdakkain olevat numerot lasketaan yhteen. Viimeinen nelonen, jonka alla on vain tyhjää, pudotetaan alimman viivan alle sellaisenaan. Neljä plus kuusi on kymmenen, eli seuraavaksi tuon nelosen vasemmalle puolelle merkitään nolla, ja ykkönen jää muistinumeroksi. Yksi plus yksi on kaksi, ja siihen lisättynä muistinumerona oleva ykkönen tuottaa kolmosen, joka merkitään nollan vasemmalle puolelle. Tuloksi saamme siis kolmesataaneljä, ja siihen on seuraavaksi lisättävä korjaustermi. Tätä varten lisäämme vuosilukuun ensin sata vuotta ja päädymme lukuun 2111. Se jaetaan kahdellasadalla. Tässä vaiheessa on kopioitava luku 2111 yhteenlaskuviivan alta jakoportaiden alle, mitä ei italialaisessa tai saksalaisessa jakokulmassa tarvita. Tämä ylimääräinen välivaihe on kömpelö ja mustetta kuluttava. Ensimmäisiin kolmeen numeroon, joista muodostuu luku kaksisataayksitoista, sisältyy kaksisataa yhden kerran. Merkitsemme nyt siis ykkösen jaettavan päälle ja jakajan sellaisenaan jaettavan alle. Vähennyslasku tuottaa tulokseksi yksitoista, jonka perään pudotetaan jaettavan seuraava numero, ykkönen. Satayksitoista on pienempi kuin kaksisataa, eli osamäärän seuraavaksi numeroksi merkitsemme edellä saadun ykkösen perään nollan. Satayksitoista jää jakojäännökseksi, mutta sillä ei enää tässä vaiheessa ole väliä. Osamäärään sen sijaan lisätään neljätoista, jolloin summaksi saadaan kaksikymmentäneljä. Tätä yhteenlaskua varten osamäärä 10 pitää jälleen kopioida jakoportaiden päältä yhteenlaskun ensimmäiseksi yhteenlaskettavaksi, mitä ei italialaisessa tai saksalaisessa jakokulmassa tarvita. Tämä ylimääräinen välivaihe on kömpelö ja mustetta kuluttava. Summa kaksikymmentäkahdeksan lisätään aiemmin saatuun kolmeensataanneljään, jolloin summaksi saadaan kolmesataakaksikymmentäkahdeksan, josta on otettava jakojäännös kolmellakymmenellä. Tässä vaiheessa tuo luku 328 on jälleen kopioitava yhteenlaskuviivan alta jakoportaiden alle, mikä on kömpelöä ja mustetta kuluttavaa. Ensimmäisistä kahdesta numerosta muodostuu kolmekymmentäkaksi, johon kolmekymmentä sisältyy yhden kerran. Jaettavan päälle osamäärän ensimmäiseksi numeroksi, jolla taas tässä tilanteessa on vain tarkastustulon määrittämisessä väliä, merkitään siis ykkönen, ja jakaja kirjoitetaan sellaisenaan jaettavan alle. Vähennyslaskun tuloksena saamme kakkosen. Sen perään pudotamme jaettavan seuraavan numeron, joka on kahdeksikko. Kaksikymmentäkahdeksan on kuitenkin jakajaa eli kolmeakymmentä pienempi, joten osamäärän seuraavaksi numeroksi pannaan nolla. Koska enempää pudotettavia ei ole, on tämä kaksikymmentäkahdeksan samalla haluttu jakojäännös ja ensimmäinen yhteenlaskettava. Se on vielä kerrottava kuudella syistä, jotka liittyvät toisen yhteenlaskettavan määrittämiseen. Tämä tulo on satakuusikymmentäkahdeksan.

Toista yhteenlaskettavaa määritettäessä määritämme vuosiluvusta ensin jakojäännökset jaettaessa neljällä ja seitsemällä. Neljällä jaettaessa toteamme ensin, että vuosiluvun ensimmäinen numero, kakkonen, on nelosta pienempi, joten otamme myös seuraavan nollan mukaan. Kahteenkymmeneen mahtuu nelonen viiteen kertaan, eli osamäärän ensimmäinen numero on siis viitonen, joka merkitään jaettavan päälle. Viisi kertaa neljä on täsmälleen kaksikymmentä, eli seuraavalle kierrokselle jää tästä erotukseksi nolla. Sen perään otamme vuosiluvun seuraavan numeron, ykkösen. Koska näin muodostunut luku on yksi ja se on pienempi kuin neljä, kirjoitamme osamäärän perään nollan ja pudotamme mukaan vuosiluvusta vielä seuraavan numeron, joka sekin on ykkönen. Näin muodostunut luku on yksitoista ja siihen mahtuu nelonen kahteen kertaan, eli osamäärän kolmas numero on siis kakkonen. Kaksi kertaa neljä on kahdeksan, eli nyt erotukseksi saadaan kolme. Koska pudotettavia ei enää ole, on tämä kyseinen jakojäännös. Se on vielä jatkoa varten kerrottava kakkosella, jolloin tuloksi saadaan kuusi. Seitsemällä jaettaessa toteamme ensin, että vuosiluvun ensimmäinen numero, kakkonen, on seitsemää pienempi, joten otamme mukaan myös vuosiluvun seuraavan numeron, nollan. Kahteenkymmeneen mahtuu seiska kahteen kertaan, eli osamäärän ensimmäinen numero on kaksi. Se merkitään jaettavan päälle. Kaksi kertaa seitsemän on neljätoista, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi kuusi. Sen perään otamme vuosiluvun seuraavan numeron, ykkösen. Kuuteenkymmeneenyhteen mahtuu seiska kahdeksaan kertaan, eli osamäärän seuraava numero on kahdeksan. Kahdeksan kertaa seitsemän on viisikymmentäkuusi, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi viisi.

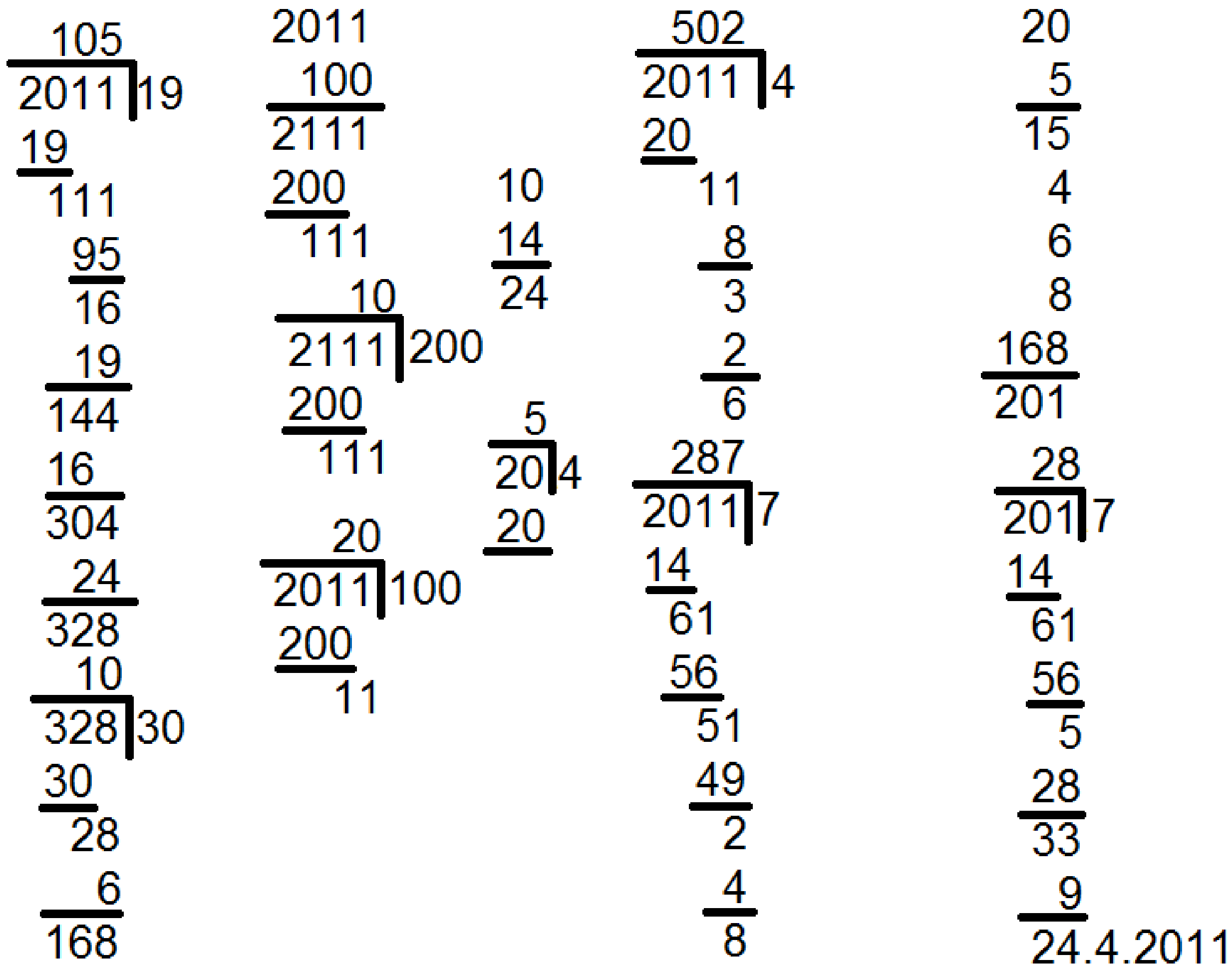
Sen perään otamme vuosiluvun seuraavan numeron, ykkösen. Viiteenkymmeneenyhteen mahtuu seiska seitsemään kertaan, eli osamäärän seuraava numero on seitsemän. Seitsemän kertaa seitsemän on neljäkymmentäyhdeksän, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi kaksi. Koska pudotettavia ei enää ole, on tämä kyseinen jakojäännös. Se on vielä jatkoa varten kerrottava neljällä, jolloin tuloksi saadaan kahdeksan.

Tämän jälkeen lasketaan korjaustermi. Sitä varten vuosiluku jaetaan ensin sadalla. Vuosiluvun kolme ensimmäistä numeroa muodostavat luvun kaksisataayksi. Siihen sata mahtuu kahteen kertaan. Kakkonen merkitään jaettavan päälle. Kaksi kertaa sata on kaksisataa, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi ykkösen, jonka perään vuosiluvun viimeinen ykkönen pudotetaan. Kun yksitoistakin on pienempi kuin sata, merkitään seuraavaksi osamäärän perään nolla, ja kun pudotettavia ei enää ole, jää jakojäännökseksi yksitoista. Tämän jälkeen saatu osamäärä, kaksikymmentä, jaetaan edelleen neljällä, ja uudeksi osamääräksi saadaan tasan viisi. Tässä vaiheessa luku 20 pitää jälleen kopioida jakoportaiden päältä seuraavien jakoportaiden alle, mikä on ylimääräinen työvaihe ja sellaisena kömpelö ja mustetta kuluttava. Tämä jälkimmäinen jako päättyy tasan. Korjaustermi on näiden perättäisten jakolaskutoimitusten yhteydessä saatujen osamäärien erotus plus neljä. Vähennyslasku tuottaa tulokseksi viisitoista. Siihen lisätään ensin neljä ja sen jälkeen vielä vuosiluvun edellä mainituista jakojäännöksistä lasketut tulot eli kuusi, kahdeksan ja satakuusikymmentäkahdeksan. Summaksi tulee kaksisataayksi, josta otetaan jakojäännös seitsemällä. Tässä vaiheessa on taas luku 201 ylimääräisen kerran kopioitava yhteenlaskuviivan alta jakoportaiden alle. Tämä on jälleen kerran ylimääräinen työvaihe ja sellaisena kömpelö ja mustetta kuluttava. Kakkonen on pienempi kuin seitsemän, eli myös seuraava nolla otetaan mukaan. Kahteenkymmeneen seitsemän mahtuu kahdesti, eli osamäärän ensimmäinen numero on kakkonen, joka merkitään jakajan alle. Kaksi kertaa seitsemän on neljätoista, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi kuusi. Sen perään otetaan viimeinen ykkönen. Kuuteenkymmeneenyhteen seitsemän mahtuu kahdeksan kertaa, eli osamäärän seuraava numero on kahdeksan. Kahdeksan kertaa seitsemän on viisikymmentäkuusi, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi viisi. Koska pudotettavia ei enää ole, on tämä jakojäännös ja siten toinen yhteenlaskettava. Ensimmäinen yhteenlaskettava, joksi saatiin kaksikymmentäkahdeksan, lisätään siihen, ja summaksi saadaan kolmekymmentäkolme. Se on kaksinumeroinen luku, eli vähennetään yhdeksän. Erotukseksi saadaan kaksikymmentäneljä, mikä tarkoittaa, että pääsiäinen 2011 on huhtikuun 24. päivä.

Vaikka myös italialaisessa ja saksalaisessa laskennassa esiintyy jonkin verran numeroiden kopiointia, sitä ei esiinny läheskään yhtä paljoa kuin käytettäessä amerikkalaista jakokulmaa, mikä puhuu sen puolesta, että pääsiäisen ajankohdan määrittämiseen italialaisella menetelmällä kuluu vähemmän mustetta.

4.4. Ruotsalainen jakokulma

Kuva 19. Pääsiäisen 2011 määritys ruotsalaista jakokulmaa käyttäen



Ensin määritetään vuosiluvun jakojäännös yhdeksällätoista. Ensimmäiset kaksi numeroa muodostavat numeron kaksikymmentä, johon yhdeksäntoista sisältyy kerran. Osamäärän ensimmäinen numero, joka merkitään jaettavan päälle, on siis ykkönen, mutta tällä on väliä ainoastaan määritettäessä vähentäjää jakojäännöksen määrittämiseksi. Yksi kertaa yhdeksäntoista on yhdeksäntoista, jolloin erotukseksi jää yksi. Sen perään otetaan vuosiluvun seuraava numero, ykkönen. Yksitoista on pienempi kuin yhdeksäntoista, joten osamäärän perään kirjoitetaan nolla ja sitten otetaan vain seuraava vuosiluvun numero, joka sekin on ykkönen. Näin saatuun lukuun, sataanyhteentoista, yhdeksäntoista sisältyy viisi kertaa. Osamäärän perään kirjoitetaan nyt siis viitonen, ja vähentäjäksi kirjoitetaan viisi kertaa yhdeksäntoista eli yhdeksänkymmentäviisi. Vähennettäessä tämä luku sadastayhdestätoista saadaan erotukseksi kuusitoista, ja koska enempää pudotettavia ei ole, tämä on jakojäännös. Se pitää kertoa yhdeksällätoista. Yhdeksän kertaa kuusi on viisikymmentäneljä, josta saadaan kertojan viimeisen numeron mukaisen rivin loppuun nelonen, ja viitosesta tulee muistinumero. Yhdeksän kertaa yksi on yhdeksän, ja siihen lisätään tuo viitonen, jolloin saadaan neljätoista, joka kirjoitetaan tälle riville siellä ennestään olevan nelosen vasemmalle puolelle. Kertojan seuraavaksi käsittelyyn tuleva numero on ykkönen, joten tämän alle kirjoitetaan kerrottava eli jakojäännös sellaisenaan siten, että sen oikea reuna on tuon kertojassa olevan ykkösen kohdalla. Tämän jälkeen kohdakkain olevat numerot lasketaan yhteen. Viimeinen nelonen, jonka alla on vain tyhjää, pudotetaan alimman viivan alle sellaisenaan. Neljä plus kuusi on kymmenen, eli seuraavaksi tuon nelosen vasemmalle puolelle merkitään nolla, ja ykkönen jää muistinumeroksi. Yksi plus yksi on kaksi, ja siihen lisättynä muistinumerona oleva ykkönen tuottaa kolmosen, joka merkitään nollan vasemmalle puolelle. Tuloksi saamme siis kolmesataaneljä, ja siihen on seuraavaksi lisättävä korjaustermi. Tätä varten lisäämme vuosilukuun ensin sata vuotta ja päädymme lukuun 2111. Se jaetaan kahdellasadalla. Tässä vaiheessa on kopioitava luku 2111 yhteenlaskuviivan alta jakoportaiden alle, mitä ei italialaisessa tai saksalaisessa jakokulmassa tarvita. Tämä ylimääräinen välivaihe on kömpelö ja mustetta kuluttava. Ensimmäisiin kolmeen numeroon, joista muodostuu luku kaksisataayksitoista, sisältyy kaksisataa yhden kerran. Merkitsemme nyt siis ykkösen jaettavan päälle ja jakajan sellaisenaan jaettavan alle. Vähennyslasku tuottaa tulokseksi yksitoista, jonka perään pudotetaan jaettavan seuraava numero, ykkönen. Satayksitoista on pienempi kuin kaksisataa, eli osamäärän seuraavaksi numeroksi merkitsemme edellä saadun ykkösen perään nollan. Satayksitoista jää jakojäännökseksi, mutta sillä ei enää tässä vaiheessa ole väliä. Osamäärään sen sijaan lisätään neljätoista, jolloin summaksi saadaan kaksikymmentäneljä. Tätä yhteenlaskua varten osamäärä 10 pitää jälleen kopioida jakoportaiden päältä yhteenlaskun ensimmäiseksi yhteenlaskettavaksi, mitä ei italialaisessa tai saksalaisessa jakokulmassa tarvita. Tämä ylimääräinen välivaihe on kömpelö ja mustetta kuluttava. Summa kaksikymmentäkahdeksan lisätään aiemmin saatuun kolmeensataanneljään, jolloin summaksi saadaan kolmesataakaksikymmentäkahdeksan, josta on otettava jakojäännös kolmellakymmenellä. Tässä vaiheessa tuo luku 328 on jälleen kopioitava yhteenlaskuviivan alta jakoportaiden alle, mikä on kömpelöä ja mustetta kuluttavaa. Ensimmäisistä kahdesta numerosta muodostuu kolmekymmentäkaksi, johon kolmekymmentä sisältyy yhden kerran. Jaettavan päälle osamäärän ensimmäiseksi numeroksi, jolla taas tässä tilanteessa on vain tarkastustulon määrittämisessä väliä, merkitään siis ykkönen, ja jakaja kirjoitetaan sellaisenaan jaettavan alle. Vähennyslaskun tuloksena saamme kakkosen. Sen perään pudotamme jaettavan seuraavan numeron, joka on kahdeksikko. Kaksikymmentäkahdeksan on kuitenkin jakajaa eli kolmeakymmentä pienempi, joten osamäärän seuraavaksi numeroksi pannaan nolla. Koska enempää pudotettavia ei ole, on tämä kaksikymmentäkahdeksan samalla haluttu jakojäännös ja ensimmäinen yhteenlaskettava. Se on vielä kerrottava kuudella syistä, jotka liittyvät toisen yhteenlaskettavan määrittämiseen. Tämä tulo on satakuusikymmentäkahdeksan.

Toista yhteenlaskettavaa määritettäessä määritämme vuosiluvusta ensin jakojäännökset jaettaessa neljällä ja seitsemällä. Neljällä jaettaessa toteamme ensin, että vuosiluvun ensimmäinen numero, kakkonen, on nelosta pienempi, joten otamme myös seuraavan nollan mukaan. Kahteenkymmeneen mahtuu nelonen viiteen kertaan, eli osamäärän ensimmäinen numero on siis viitonen, joka merkitään jaettavan päälle. Viisi kertaa neljä on täsmälleen kaksikymmentä, eli seuraavalle kierrokselle jää tästä erotukseksi nolla. Sen perään otamme vuosiluvun seuraavan numeron, ykkösen. Koska näin muodostunut luku on yksi ja se on pienempi kuin neljä, kirjoitamme osamäärän perään nollan ja pudotamme mukaan vuosiluvusta vielä seuraavan numeron, joka sekin on ykkönen. Näin muodostunut luku on yksitoista ja siihen mahtuu nelonen kahteen kertaan, eli osamäärän kolmas numero on siis kakkonen. Kaksi kertaa neljä on kahdeksan, eli nyt erotukseksi saadaan kolme. Koska pudotettavia ei enää ole, on tämä kyseinen jakojäännös. Se on vielä jatkoa varten kerrottava kakkosella, jolloin tuloksi saadaan kuusi. Seitsemällä jaettaessa toteamme ensin, että vuosiluvun ensimmäinen numero, kakkonen, on seitsemää pienempi, joten otamme mukaan myös vuosiluvun seuraavan numeron, nollan. Kahteenkymmeneen mahtuu seiska kahteen kertaan, eli osamäärän ensimmäinen numero on kaksi. Se merkitään jaettavan päälle. Kaksi kertaa seitsemän on neljätoista, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi kuusi. Sen perään otamme vuosiluvun seuraavan numeron, ykkösen. Kuuteenkymmeneenyhteen mahtuu seiska kahdeksaan kertaan, eli osamäärän seuraava numero on kahdeksan. Kahdeksan kertaa seitsemän on viisikymmentäkuusi, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi viisi.

Sen perään otamme vuosiluvun seuraavan numeron, ykkösen. Viiteenkymmeneenyhteen mahtuu seiska seitsemään kertaan, eli osamäärän seuraava numero on seitsemän. Seitsemän kertaa seitsemän on neljäkymmentäyhdeksän, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi kaksi. Koska pudotettavia ei enää ole, on tämä kyseinen jakojäännös. Se on vielä jatkoa varten kerrottava neljällä, jolloin tuloksi saadaan kahdeksan.

Tämän jälkeen lasketaan korjaustermi. Sitä varten vuosiluku jaetaan ensin sadalla. Vuosiluvun kolme ensimmäistä numeroa muodostavat luvun kaksisataayksi. Siihen sata mahtuu kahteen kertaan. Kakkonen merkitään jaettavan päälle. Kaksi kertaa sata on kaksisataa, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi ykkösen, jonka perään vuosiluvun viimeinen ykkönen pudotetaan. Kun yksitoistakin on pienempi kuin sata, merkitään seuraavaksi osamäärän perään nolla, ja kun pudotettavia ei enää ole, jää jakojäännökseksi yksitoista. Tämän jälkeen saatu osamäärä, kaksikymmentä, jaetaan edelleen neljällä, ja uudeksi osamääräksi saadaan tasan viisi. Tässä vaiheessa luku 20 pitää jälleen kopioida jakoportaiden päältä seuraavien jakoportaiden alle, mikä on ylimääräinen työvaihe ja sellaisena kömpelö ja mustetta kuluttava. Tämä jälkimmäinen jako päättyy tasan. Korjaustermi on näiden perättäisten jakolaskutoimitusten yhteydessä saatujen osamäärien erotus plus neljä. Vähennyslasku tuottaa tulokseksi viisitoista. Siihen lisätään ensin neljä ja sen jälkeen vielä vuosiluvun edellä mainituista jakojäännöksistä lasketut tulot eli kuusi, kahdeksan ja satakuusikymmentäkahdeksan. Summaksi tulee kaksisataayksi, josta otetaan jakojäännös seitsemällä. Tässä vaiheessa on taas luku 201 ylimääräisen kerran kopioitava yhteenlaskuviivan alta jakoportaiden alle. Tämä on jälleen kerran ylimääräinen työvaihe ja sellaisena kömpelö ja mustetta kuluttava. Kakkonen on pienempi kuin seitsemän, eli myös seuraava nolla otetaan mukaan. Kahteenkymmeneen seitsemän mahtuu kahdesti, eli osamäärän ensimmäinen numero on kakkonen, joka merkitään jakajan alle. Kaksi kertaa seitsemän on neljätoista, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi kuusi. Sen perään otetaan viimeinen ykkönen. Kuuteenkymmeneenyhteen seitsemän mahtuu kahdeksan kertaa, eli osamäärän seuraava numero on kahdeksan. Kahdeksan kertaa seitsemän on viisikymmentäkuusi, ja vähennyslasku tuottaa tulokseksi viisi. Koska pudotettavia ei enää ole, on tämä jakojäännös ja siten toinen yhteenlaskettava. Ensimmäinen yhteenlaskettava, joksi saatiin kaksikymmentäkahdeksan, lisätään siihen, ja summaksi saadaan kolmekymmentäkolme. Se on kaksinumeroinen luku, eli vähennetään yhdeksän. Erotukseksi saadaan kaksikymmentäneljä, mikä tarkoittaa, että pääsiäinen 2011 on huhtikuun 24. päivä.

Vaikka myös italialaisessa ja saksalaisessa laskennassa esiintyy jonkin verran numeroiden kopiointia, sitä ei esiinny läheskään yhtä paljoa kuin käytettäessä ruotsalaista jakokulmaa, mikä puhuu sen puolesta, että pääsiäisen ajankohdan määrittämiseen italialaisella menetelmällä kuluu vähemmän mustetta.

5. Aikayhteenlasku ja 60-järjestelmä

5.1. Ajan eri mittayksikköjen välisistä suhteista ja historiasta

Luonto on tarjonnut ihmiselle kolme eri ajan mittayksikköä, jotka kuitenkin ovat monessa asiassa liian pitkäkestoisia. Vuosi on yksi Maapallon kierros Auringon ympäri, kuukausi yksi Kuun kierros Maapallon ympäri ja päivä on yksi Maapallon pyörähdys akselinsa ympäri. Näiden väliset lukusuhteet eivät tarkkaan ottaen ole edes kokonaislukuja, saati sitten lukujärjestelmämme kantaluvun eli kympin tasaisia potensseja. Yhdessä tavallisessa vuodessa on 12 kuukautta ja 365 päivää. Jotta vuoteen saadaan kokonainen lukumäärä kuukausia, ei kalenterikuukausi ole aivan täsmälleen Kuun kierroksen pituinen vaan hieman siitä poikkeava. Jotta vuoteen saadaan kokonainen lukumäärä päiviä, on suunnilleen joka neljäs vuosi karkausvuosi, jonka helmikuu on pitempi kuin tavallinen helmikuu. Viikon määritelmä puolestaan pohjautuu Raamattuun, jossa sanotaan, että Jumala loi maailman kuudessa päivässä ja lepäsi seitsemäntenä (1. Moos. 2:3). Viikkoja yhdessä vuodessa on suunnilleen tasaluku, 52 viikkoa on nimittäin vain 1-2 päivää vähemmän kuin kalenterivuosi. Myöskään 52 ei kuitenkaan ole kymmenen tasapotenssi.

Myös päivää lyhempiä ajan mittayksiköitä tarvittiin jo antiikin aikana. Ensin keksittiin jakaa päivän valoisa ja yön pimeä aika kumpikin kahteentoista tuntiin sen mukaan, että jokaisella vuoden kuukaudella oli eri tähtikuvio, jossa aurinko näytti olevan. Kevätpäiväntasauksesta alkaen nämä kaksitoista tähtikuviota ovat Oinas, Härkä, Kaksoset, Rapu, Leijona, Neitsyt, Vaaka, Skorpioni, Jousimies, Kauris, Vesimies ja Kalat. Myöhemmin huomattiin, että tällä tavoin määritelty tunti ei ollut yhtä pitkä päivällä kuin yöllä, ja siirryttiin määrittelemään tunti yhdeksi kahdeskymmenesneljäsosaksi kahden perättäisen auringonnousun väliä päiväntasaajan horisontin mukaan. Tätäkin lyhemmät aikayksiköt olivat kuitenkin tarpeen, mikä havaittiin sillä seudulla, jossa nykyisin sijaitsee valtio nimeltä Irak.

Kuva 20. Irakin lippu.

Tuolla Eufrat- ja Tigris-jokien välissä sijaitsi varhaisantiikin aikaan hyvin merkittävä babylonialainen korkeakulttuuri. Heidän kielensä, nimeltään sumeri, oli tiettävästi maailman vanhin kirjoitettu kieli, jota kirjoitettiin nuolenpäillä. Ainakin se on maailman vanhin sellainen kirjoitettu kieli, jota nykypäivän historiantutkijat ovat pystyneet lukemaan.

Heidän lukujärjestelmässään peruslukuna oli 60, eikä 10 kuten meillä. Sumerin kielen lukua kolmesataakuusikymmentäviisi tarkoittava sana jäsentyy siis kuusikuuttakymmentäviisi. Tämä ilmeisesti pohjautuu siihen, että 60 on hyvin monella luvulla tasan jaollinen. Se on jaollinen luvuilla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 20, 30 ja 60. Tähän seikkaan pohjautuu sekä tunnin jakaminen kuuteenkymmeneen minuuttiin että minuutin jakaminen kuuteenkymmeneen sekuntiin. Tämä on säilynyt myös nykypäivänä, vaikka sekunnin määritelmä nykyisin onkin tähtitaivaan tapahtumista erotettu. Nykyisin sekunti määritellään johdannaisyksikkönsä hertsin kautta siten, että cesium-133-atomin värähdystaajuus on 9192631770 hertsiä, missä hertsi tarkoittaa yhtä värähdystä sekunnissa. Edelleenkin on kuitenkin tässäkin määritelmässä säilynyt se, että minuutti on 60 sekuntia ja tunti on 60 minuuttia.

Myös trigonometriassa tarvitaan 60-järjestelmää – kulman mittayksikkö aste on nimittäin ympyrän kuudesosa jaettuna juuri 60 osaan, ja siitäkin minuutti ja sekunti muodostetaan samoin kuin tunnista. Tämä huolimatta siitä että yhdessä sekunnissa tämän määritelmän mukaan maapallo pyörähtää viisitoista sekuntia akselinsa ympäri.

Koska 60:n 10-kantainen logaritmi ei kuitenkaan ole kokonaisluku vaan irrationaalinen, ei 60-järjestelmän mukaisten mittayksiköiden yhteenlaskua voida suorittaa aivan samalla tavalla kuin tavallinen allekkainen yhteenlasku, paitsi jos kaikki ajat muunnetaan ensin sekunteihin ja sitten yhteenlaskun jälkeen taas tunteihin, minuutteihin ja sekunteihin.

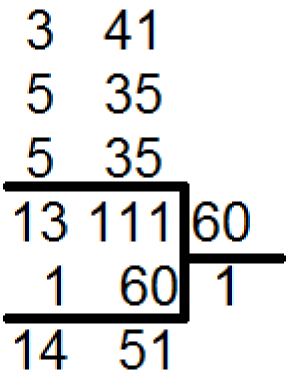
5.2. Esimerkki missä aikayhteenlaskua tarvitaan

Tehtäessä äänitallennetta, jos yksittäisten kappaleiden kestoajat tunnetaan ja halutaan selvittää mitä nauhalle tai levylle saadaan mahtumaan, tai minkä pituinen kasetti on ostettava, jotta sille mahtuisivat kaikki halutut kappaleet, on kyettävä laskemaan yhteen aikoja. Nämä ajat on yleensä ilmoitettu minuutteina ja sekunteina – siis kuusikymmenjärjestelmällä. Otan hyvin lyhyen esimerkin tästä asiasta. Elokuvanäyttelijä Mark Wahlberg tunnetaan myös hiphop-rap-muusikkona. Joskus viime vuosituhannen lopulla häneltä ilmestyi single nimeltä ”Hey DJ”, jossa on nimikkokappaleesta kolme versiota. Nämä ovat ”radio edit”, joka kestää kolme minuuttia ja neljäkymmentäyksi sekuntia, ”extended version”, joka kestää viisi minuuttia ja kolmekymmentäviisi sekuntia, ja ”remix”, joka kestää myös viisi minuuttia ja kolmekymmentäviisi sekuntia. Esimerkissä lasken kaikilla tavoilla, paljonko nämä kestoajat ovat yhteensä. Ironista tässä on, että tämä näyttelijä on kotoisin juuri samoista Yhdysvalloista kuin tässä vertailtavista jakokulmista toinen kömpelöimmistä kahdesta, ja hänen sukunsa joskus 1800-luvulla on alun perin kotoisin juuri samasta Ruotsista kuin se toinen kömpelö jakotapa, ja paremmat jakotavat ovat kotoisin täysin muualta. Tosin niistä maista, joiden lippuja tässä kirjassa aiemmilla sivuilla on ollut, on hänellä tietyillä tavoilla sidoksia myös sekä Italiaan että Irakiin elokuvarooliensa kautta. Elokuvassa ”Kolme kuningasta” hän on Troy Barlow, yksi kolmesta amerikkalaissotilaasta, jotka osallistuvat merkittävään Saddam Husseinin Bagdadiin takavarikoimien kuwaitilaisrikkauksien takaisinnouto-operaatioon Kuwaitin ja Irakin välisessä sodassa vuonna 1991, jossa Yhdysvallat oli Kuwaitin liittolainen, mikä on hänen kytköksensä Irakiin. Elokuvassa ”The Italian Job” hän on puolestaan Charlie Croker, joka on erään Venetsiassa asunnon lattia räjäyttämällä tapahtuvan 27 miljoonan euron arvoisen kultaharkkosaaliin varastusoperaation pääkonna, mikä puolestaan on hänen kytköksensä Italiaan.

6. Aikayhteenlasku eri jakokulmissa

6.1. Italialainen jakokulma

Kuva 21. Aikayhteenlasku italialaisessa jakokulmassa

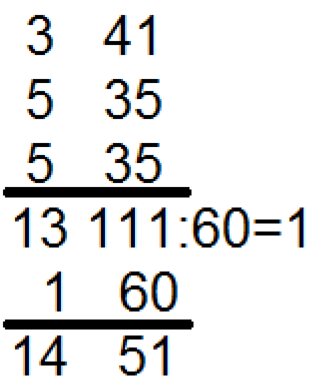


Ensin kirjoitetaan minuutit ja sekunnit toisistaan erilleen ja lasketaan yhteen eri sarakkeissa siten, että minuutteja ja sekunteja ei yhdistetä toisiinsa, tavallisella yhteenlaskulla. Sen jälkeen sekuntien lukumäärän oikealle puolelle merkitään jakajaksi 60. Koska sekä yksi että yksitoista ovat kuuttakymmentä pienempiä, jaetaan kuudellakymmenellä koko satayksitoista. Sataanyhteentoista kuusikymmentä mahtuu yhden kerran, eli osamääräksi saadaan yksi. Kun yksi kertaa kuusikymmentä eli kuusikymmentä vähennetään sadastayhdestätoista, saadaan jakojäännökseksi viisikymmentäyksi. Osamäärä eli yksi lisätään puolestaan minuuttien summaan eli kolmeentoista, ja tulokseksi näin ollen saadaan, että näiden kolmen edellä luettelemani kestoajan yhteissumma on neljätoista minuuttia ja viisikymmentäyksi sekuntia.

Italialainen laskutapa tässä tarkoituksessa on hyödyllinen, numeroiden kopiointia on vain vähän. Ainoat kopioitavat numerot ovat osamäärät.

6.2. Saksalainen jakokulma

Kuva 22. Aikayhteenlasku saksalaisessa jakokulmassa

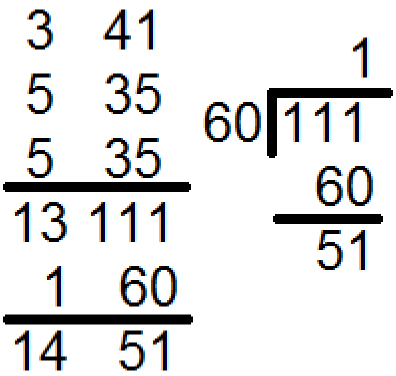


Ensin kirjoitetaan minuutit ja sekunnit toisistaan erilleen ja lasketaan yhteen eri sarakkeissa siten, että minuutteja ja sekunteja ei yhdistetä toisiinsa, tavallisella yhteenlaskulla. Sen jälkeen sekuntien lukumäärän oikealle puolelle merkitään jakajaksi 60. Koska sekä yksi että yksitoista ovat kuuttakymmentä pienempiä, jaetaan kuudellakymmenellä koko satayksitoista. Sataanyhteentoista kuusikymmentä mahtuu yhden kerran, eli osamääräksi saadaan yksi. Kun yksi kertaa kuusikymmentä eli kuusikymmentä vähennetään sadastayhdestätoista, saadaan jakojäännökseksi viisikymmentäyksi. Osamäärä eli yksi lisätään puolestaan minuuttien summaan eli kolmeentoista, ja tulokseksi näin ollen saadaan, että näiden kolmen edellä luettelemani kestoajan yhteissumma on neljätoista minuuttia ja viisikymmentäyksi sekuntia.

Saksalainen laskutapa tässä tarkoituksessa on hyödyllinen, numeroiden kopiointia on vain vähän. Ainoat kopioitavat numerot ovat osamäärät.

6.3. Amerikkalainen jakokulma

Kuva 23. Aikayhteenlasku amerikkalaisessa jakokulmassa

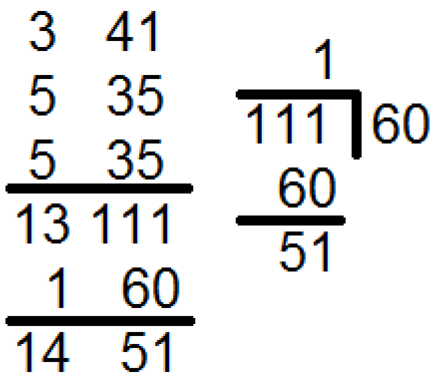


Ensin kirjoitetaan minuutit ja sekunnit toisistaan erilleen ja lasketaan yhteen eri sarakkeissa siten, että minuutteja ja sekunteja ei yhdistetä toisiinsa, tavallisella yhteenlaskulla. Sen jälkeen sekuntien lukumäärä kopioidaan oikealle puolelle, ja sekuntien lukumäärän vasemmalle puolelle merkitään jakajaksi 60. Koska sekä yksi että yksitoista ovat kuuttakymmentä pienempiä, jaetaan kuudellakymmenellä koko satayksitoista. Sataanyhteentoista kuusikymmentä mahtuu yhden kerran, eli osamääräksi saadaan yksi. Kun yksi kertaa kuusikymmentä eli kuusikymmentä vähennetään sadastayhdestätoista, saadaan jakojäännökseksi viisikymmentäyksi. Osamäärä eli yksi lisätään puolestaan minuuttien summaan eli kolmeentoista, ja tarkastustulo eli kuusikymmentä vähennetään sekuntien summasta eli sadastayhdestätoista, ja tulokseksi näin ollen saadaan, että näiden kolmen edellä luettelemani kestoajan yhteissumma on neljätoista minuuttia ja viisikymmentäyksi sekuntia.

Amerikkalainen laskutapa tässä tarkoituksessa on kömpelö. Osamäärän lisäksi myös jaettava, tarkastustulo ja jakojäännös on kopioitava toisaanne, pelkästään siitä syystä, että amerikkalaisessa jakokulmassa osamäärä ilmestyy aikayhteenlaskun kannalta mahdollisimman epäkäytännölliseen paikkaan, jaettavan päälle.

6.4. Ruotsalainen jakokulma

Kuva 24. Aikayhteenlasku ruotsalaisessa jakokulmassa



Ensin kirjoitetaan minuutit ja sekunnit toisistaan erilleen ja lasketaan yhteen eri sarakkeissa siten, että minuutteja ja sekunteja ei yhdistetä toisiinsa, tavallisella yhteenlaskulla. Sen jälkeen sekuntien lukumäärä kopioidaan oikealle puolelle, ja sekuntien lukumäärän oikealle puolelle merkitään jakajaksi 60. Koska sekä yksi että yksitoista ovat kuuttakymmentä pienempiä, jaetaan kuudellakymmenellä koko satayksitoista. Sataanyhteentoista kuusikymmentä mahtuu yhden kerran, eli osamääräksi saadaan yksi. Kun yksi kertaa kuusikymmentä eli kuusikymmentä vähennetään sadastayhdestätoista, saadaan jakojäännökseksi viisikymmentäyksi. Osamäärä eli yksi lisätään puolestaan minuuttien summaan eli kolmeentoista, ja tarkastustulo eli kuusikymmentä vähennetään sekuntien summasta eli sadastayhdestätoista, ja tulokseksi näin ollen saadaan, että näiden kolmen edellä luettelemani kestoajan yhteissumma on neljätoista minuuttia ja viisikymmentäyksi sekuntia.

Ruotsalainen laskutapa tässä tarkoituksessa on kömpelö. Osamäärän lisäksi myös jaettava, tarkastustulo ja jakojäännös on kopioitava toisaanne, pelkästään siitä syystä, että ruotsalaisessa jakokulmassa, joka on amerikkalaisen peilikuva, osamäärä ilmestyy aikayhteenlaskun kannalta mahdollisimman epäkäytännölliseen paikkaan, jaettavan päälle.

Epilogi

Kuten edellä olevista yksinkertaisista laskuesimerkeistä ilmenee, heti jos jaettava on jonkun muun laskutoimituksen tulos, koulussa pääasiassa oppimani amerikkalainen jakokulma osoittaa käyttökelvottomuutensa. Tästä syystä itse suosittelen italialaisen jakokulman käyttöä näissä tilanteissa, ja olen itse myös siirtynyt tähän ”old school” tapaan erityisesti näiltä osin. Tämä kirja on siis täyttänyt tehtävänsä, jos uuden matematiikan koulussa oppinut lukija ryhtyy näissä asioissa sen asemesta soveltamaan vanhaa matematiikkaa. Molemmilla menetelmillä saadaan kyllä samat tulokset, mutta vanhalla matematiikalla ne saadaan käytännöllisemmin ja tietyllä tavoin helpommin kuin uudella.