Sisällys

1 Tämän monisteen kuvaus **3**

2 Matematiikan perusteet tietotekniikassa 1 (3op) **4**
2.0.1 Tehtäviä: murtoluvut ja potenssit 4
2.0.2 Tehtäviä: ensimmäisen asteen yhtälö 5
2.0.3 Tehtäviä: toisen asteen yhtälö 7
2.0.4 Tehtäviä: juuriyhtälö ja yhtälöpari 8
2.0.5 Tehtäviä: funktiot 9
2.0.6 Tehtäviä: logaritmi 10
2.0.7 Tehtäviä: trigonometria 11
2.0.8 Tehtäviä: trigonometria2 12
2.1 Piirtotehtävä 12
2.2 Trigonometria 13
2.2.1 Suorakulmainen kolmio 13
2.2.2 Teräväkulmainen kolmio (kaikki kulmat alle 90°) 14
2.2.3 Tylppäkulmainen kolmio (yksi kulma yli 90°) 15
2.2.4 Yksikköympyrä 16
2.3 Kaavoja, matematiikan perusteet 19

3 Vektorit ja kompleksiluvut (3op) **21**
3.1 vektorin esitystavat, pituus, yksikkövektori 21
3.2 pallokoordinaatit 22
3.3 vektorien pistetulo ja vektorien välinen kulma 23
3.4 suorat 24
3.5 tasot 25
3.6 ristitulo 26
3.7 kompleksiluvut 28
3.8 Kaavoja, vektorit ja kompleksiluvut 30

4 Sov: Derivaatta ja integraali (2.5op) **31**
4.1 numeerista derivointia ja integrointia 31
4.2 numeerista derivointia 32
4.3 numeerista integrointia 33
4.4 derivointia 34
4.5 lisää derivointia, ääriarvo, Newton 35
4.6 integraalifunktio 36
4.7 määrätty integraali 37
4.8 Kaavoja, derivointi ja integrointi 37

5 Sov: fysiikka (2.5op) **38**
5.1 SI-yksiköt 38
5.2 merkitsevät numerot 38
5.3 liikelaskuja 39
5.4 vino heittoliike 39
5.5 voima 40
5.6 Kaavoja, soveltava fysiikka 40

6 Difyhtälöt ja Fourier (2.5op) **42**
6.1 Derivoinnin kertausta 42
6.2 Integroinnin kertausta 43
6.3 Differentiaaliyhtälöt 43
6.4 Fourier-sarjat 45

7 Applied mathematics ... in programming (2.5op) 46
7.1 Recall differentiation . . . 46
7.2 Recall integration . . . 48
7.3 Basics of differential equations . . . 49
7.4 Integrable equations . . . 50
7.5 Separable equations . . . 51
7.6 Solution formula for first order linear equations . . . 52
7.7 Basics of Fourier analysis . . . 54
7.8 Fourier series . . . 55
7.9 Discrete Fourier transformation / FFT . . . 56
7.10 Numerical solutions (not asked in exam) . . . 57
7.11 Formulas . . . 58
7.11.1 Differentiation and integration . . . 58
7.11.2 Solution formula . . . 59
7.11.3 Fourier series . . . 59
7.11.4 Discrete Fourier transform / FFT . . . 59

8 Todennäköisyys ja tilastot (2op) 60
8.1 Todennäköisyyksien perusteita . . . 60
8.2 Permutaatiot, k-permutaatiot, kombinaatiot . . . 62
8.3 Jakaumia . . . 62
8.4 Poisson-jakauma . . . 63
8.5 Normaalijakauma . . . 63
8.6 Luottamusväli . . . 64

9 Vanhoja tenttejä 66
9.1 Mat.per. Loppukoe 3.11.2023 . . . 66
9.2 Vek.komp. Harjoituskoe 23.11.2023 . . . 68
9.3 Tod.näk. ja tilastot, mallikoe 12.12.2023 . . . 70

10 Kuvia 74
10.1 Muistikolmiot . . . 74
10.2 Summan sini . . . 75

11 Taulukoita 76
11.1 Alkutekijöitä . . . 76
11.2 Lukuja korkeintaan neljän neliön summina . . . 77

12 Extra 78
12.1 Normaalijakauman kertymäfunktio, sarjalla . . . 78
12.2 Binomijakauman raja-arvona Poisson-jakauma . . . 78

13 Kaavoja 79
13.1 Kaavoja, matematiikan perusteet . . . 79
13.2 Kaavoja, vektorit ja kompleksiluvut . . . 80
13.3 Kaavoja, derivointi ja integrointi . . . 81
13.4 Kaavoja, soveltava fysiikka . . . 81
13.5 Formulas, differential equations and Fourier analysis . . . 82
13.5.1 Differentiation and integration . . . 82
13.5.2 Solution formula . . . 84
13.5.3 Fourier series . . . 84
13.5.4 Discrete Fourier transform / FFT . . . 84

1 Tämän monisteen kuvaus

Tässä monisteessa on matematiikan kurssien tehtäviä esimerkeillä höystettynä.

2 Matematiikan perusteet tietotekniikassa 1 (3op)

2.0.1 Tehtäviä: murtoluvut ja potenssit

1. Laske

   (a) $\frac{1}{7} + \frac{2}{3}$ Ratkaisu: $\frac{17}{21}$

   (b) $\frac{1}{7} - \frac{2}{3}$ Ratkaisu: $-\frac{11}{21}$

   (c) $\frac{1}{7} \times \frac{2}{3}$ Ratkaisu: $\frac{2}{21}$

   (d) $\frac{1}{7}/\frac{2}{3}$ Ratkaisu: $\frac{3}{14}$

   (e) $\frac{3}{14}\left(\frac{2}{3} + 4\right)$ Ratkaisu: 1

   (f) $\left(\frac{1}{9} + \frac{7}{3}\right) / \left(2 + \frac{26}{9}\right)$ Ratkaisu: $\frac{1}{2}$

2. Sievennä

   (a) $3a + b - 2a + b - 4b$ Ratkaisu: $a - 2b$

   (b) $(2a + b) + (5b - 3a)$ Ratkaisu: $6b - a$

   (c) $(2a + b) - (5b - 3a)$ Ratkaisu: $5a - 4b$

   (d) $x(x + 2) - x^2 - 2x$ Ratkaisu: 0

   (e) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{x^2-1}$ Ratkaisu: 0

3. Sievennä (tässä voi käyttää potenssin laskusääntöjä tai vain potenssin määritelmää ja murtolukujen supistamista)

   (a) $2a^2b \cdot 3a^3b^2$ Ratkaisu: $6a^5b^3$

   (b) $xy^3 \times 2xy^4$ Ratkaisu: $2x^2y^7$

   (c) $\frac{4s^3k^2}{2k^3s}$ Ratkaisu: $\frac{2s^2}{k}$

   (d) $\frac{6x^2yz^3}{3xy^3z}$ Ratkaisu: $\frac{2xz^2}{y^2}$

   (e) $(2m^2n)^2$ Ratkaisu: $4m^4n^2$

   (f) $(5q/r^2)^3$ Ratkaisu: $\frac{125q^3}{r^6}$

   (g) $\frac{(tz^2)^3}{t(tz^3)^2}$ Ratkaisu: 1

2.0.2 Tehtäviä: ensimmäisen asteen yhtälö

4. [1, 1.2.3, s. 10] Kirjan tehtävä 1.2.3 (sivulla 10): Sievennä

   (a) $x^4 x^7$ Ratkaisu: x^{11}
   (b) $x^2(-x)$ Ratkaisu: $-x^3$
   (c) $\frac{x^2}{x}$ Ratkaisu: x
   (d) $\frac{x^{-2}}{x^{-1}}$ Ratkaisu: x^{-1}
   (e) $(x^{-2})^4$ Ratkaisu: x^{-8}
   (f) $(x^{-2.5}x^{-3.5})^2$ Ratkaisu: x^{-12}

5. Kirjan tehtävä 1.2.4 (sivulla 10): Sievennä mahdollisimman paljon.

   (a) $\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}}$ Ratkaisu: $x^{1/6}$
   (b) $(16x^4)^{0.25}$ Ratkaisu: $2x$
   (c) $\left(\frac{27}{y^3}\right)^{1/3}$ Ratkaisu: $3/y$
   (d) $\frac{2xy^2}{(2xy)^2}$ Ratkaisu: $1/2x$
   (e) $\sqrt{a^2b^6c^4}$ Ratkaisu: $|a|b^3c^2$
   (f) $(64t^3)^{2/3}$. Ratkaisu: $16t^2$

6. Kirjan tehtävä 1.4.6 (sivulla 26): Tarkista, että annetut arvot ovat polynomiyhtälöiden ratkaisuja. (Sijoita arvo yhtälöön ja tarkista, että yhtälö pätee.)

   (a) $x^2 + x - 2 = 0 \quad x = -2, x = 1$
   (b) $2t^3 - 3t^2 - 3t + 2 = 0 \quad t = -1, t = 0.5$
   (c) $y^3 + y^2 + y + 1 = 0 \quad y = -1$
   (d) $v^4 + 4v^3 + 6v^2 + 3v = 0 \quad v = -1, v = 0$

7. Kirjan tehtävä 2.4.1.1 (sivulla 74): Aste tarkoittaa korkeinta muuttujan potenssia. Esimerkiksi polynomin $x^3 + 2x^7 - 3$ aste on 7. Mikä on polynomilausekkeen aste?

   (a) $z^3 + 2z^2 - 8 + 13z$ Ratkaisu: 3
   (b) $t^2 - 5t^5 + 2 - 8t^3$ Ratkaisu: 5
   (c) $3w - 5w^2 + 12w^4$ Ratkaisu: 4
   (d) $7x - x^2$ Ratkaisu: 2
   (e) $3(2t^2 - 9t + 1)$ Ratkaisu: 2
   (f) $2z(2z + 1)(2z - 1)$ Ratkaisu: 3

8. Sievennä polynomit

   (a) $x(x + 2) - 2(x^2 + 1)$ Ratkaisu: $-x^2 + 2x - 2$
   (b) $(x + 2)(x^2 + 1)$ Ratkaisu: $x^3 + 2x^2 + x + 2$
   (c) $x\left\{x^2 - 1 - 2\left[x - (1 - 2x)\right] + 1\right\}$ Ratkaisu: $x^3 - 6x^2 + 2x$
   (d) $(x + a)^2 - (x - a)^2$ Ratkaisu: $4ax$
   (e) $(x + 2a)^2 - (x + a)(x - a)$ Ratkaisu: $5a^2 + 4ax$
   (f) $(2x + 1)^3$ Ratkaisu: $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$.

9. Kirjan tehtävä 1.4.1 (sivulla 25): Ratkaise ensimmäisen asteen yhtälöt

   (a) $4x - 12 = 0$ Ratkaisu: $x = 3$
   (b) $5t + 20 = 0$ Ratkaisu: $t = -4$

(c) $t + 10 = 2t$ Ratkaisu: $t = 10$

(d) $\frac{y}{2} - 1 = 3$ Ratkaisu: $y = 8$

(e) $0.5t - 6 = 0$ Ratkaisu: $t = 12$

(f) $2x + 3 = 5x - 6$ Ratkaisu: $x = 3$

(g) $\frac{3x}{2} - 17 = 0$ Ratkaisu: $x = 34/3$

(h) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$ Ratkaisu: $x = 6/5$

(i) $2x - 1 = \frac{x}{2} + 2$ Ratkaisu: $x = 2$

(j) $2(y + 1) = 6$ Ratkaisu: $y = 2$

(k) $3(2y - 1) = 2(y + 2)$ Ratkaisu: $y = 7/4$

(l) $\frac{3}{2}(t + 3) = \frac{2}{3}(4t - 1)$ Ratkaisu: $t = 23/7$

10. Selvitä laskimen avulla kokeilemalla luvut a ja b.

p	2^p
0	1
1	2
2	4
3	8
a	10
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
b	1000
10	1024

2.0.3 Tehtäviä: toisen asteen yhtälö

11. Millä parametrin a arvolla yhtälöllä $2(ax-1) = ax+1$ on ratkaisu $x = 2$? (Vihje. Sijoita $x = 2$ ja ratkaise a)
    Ratkaisu: $a = \frac{3}{2}$

12. [1, 1.4.4](Kirjan tehtävästä 1.4.4 (sivuilla 25-26).] Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisukaavaa $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ käyttämällä ratkaise seuraavat yhtälöt.
    (a) $x^2 + x - 1 = 0$ Ratkaisu: $-1.6180, 0.6180$
    (b) $t^2 - 3t - 2 = 0$ Ratkaisu: $-0.5616, 3.5616$
    (c) $h^2 + 5h + 1 = 0$ Ratkaisu: $-4.7913, -0.2087$
    (d) $3r^2 = 7r + 2$ Ratkaisu: $-0.2573, 2.5907$
    (e) $3x^2 = 50$ Ratkaisu: $-4.0825, 4.0825$

13. Millä parametrin a arvolla yhtälöllä $x^2 + 2x + a = 3$ on
    (a) kaksi, Ratkaisu: $a < 4$
    (b) yksi, Ratkaisu: $a = 4$
    (c) nolla reaalista ratkaisua? Ratkaisu: $a > 4$

14. Ratkaise
    (a) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = 3$ Ratkaisu: $x = \frac{5}{6}$
    (b) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x} = 1$ Ratkaisu: $x = 1$
    (c) $\frac{x-1}{2x+2} + \frac{x-1}{x+1} = 1$ Ratkaisu: $x = 5$
    (d) $\frac{2}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$ Ratkaisu: Ei ratkaisua.

2.0.4 Tehtäviä: juuriyhtälö ja yhtälöpari

15. Kolmen peräkkäisen kokonaisluvun summa on 93. Etsi luvut. Ratkaisu: 30, 31 ja 32

16. Suorakulmion pituus on 6 m enemmän kuin sen leveys. Piiri on 52 m. Laske lävistäjän pituus. Ratkaisu: $\sqrt{356} \approx 18{,}9\,\mathrm{m}$

17. Ratkaise

    (a) $\sqrt{x+3} = 5$, Ratkaisu: $x = 22$

    (b) $\sqrt{x+2} = 2x$, Ratkaisu: $x = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$

    (c) $\sqrt{2x-1} + 1 = 3x$, Ratkaisu: Ei ratkaisua.

    (d) $\sqrt{1+\sqrt{2+x}} = 3$, Ratkaisu: $x = 62$

    (e) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1$. Ratkaisu: $x = 0$

18. Ratkaise

    (a) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 0, \end{cases}$ Ratkaisu: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$

    (b) $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 14x + 7y = 0, \end{cases}$ Ratkaisu: Ei ratkaisuja.

    (c) $\begin{cases} x + 2y + 3 = 0, \\ 2x + 3y + 4 = 0, \end{cases}$ Ratkaisu: $x = 1$, $y = -2$

    (d) $\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0, \\ 9x - 6y - 3 = 0. \end{cases}$ Ratkaisu: $x \in \mathbb{R}$, $y = \frac{3x-1}{2}$

2.0.5 Tehtäviä: funktiot

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = \sqrt{x+2}$ määrittelyjoukko. Ratkaisu. Neliöjuuren alle ei voi laittaa negatiivista lukua. Siis $x + 2 \geq 0$. Siirtämällä 2 epäyhtälön oikealle puolelle saadaan ratkaisu $x \geq -2$.

19. Määritä funktion
    (a) $f(x) = \sqrt{4-2x}$, Ratkaisu: f on määritelty, kun $x \leq 2$, ja se saa positiivisia arvoja.
    (b) $f(x) = \frac{x+2}{3x+1}$, Ratkaisu: Funktio f on määritelty, kun $x \neq -\frac{1}{3}$. Käänteisfunktion lauseke on $\frac{y-2}{1-3y}$, mikä on määritelty, kun $y \neq \frac{1}{3}$. Siis funktion f arvojoukko on $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$.
    (c) $f(x) = x^2 + 1$, Ratkaisu: Funktio f on määritelty kaikilla muuttujan x arvoilla. Käänteisrelaation lauseke on $\pm\sqrt{y-1}$, mikä on määritelty, kun $y \geq 1$. Siis funktion f arvojoukko on $y \geq 1$.

    määrittelyjoukko ja arvojoukko.

    Vihje. Tehtävän voi tehdä myös tietokoneella. Piirretään funktion kuvaaja ja luetaan muuttujan x arvot (=määrittelyjoukko) ja muuttujan y arvot (=arvojoukko).

20. Laske $f(-2)$, kun
    (a) $f(x) = \sqrt{4-2x}$, Ratkaisu: $\sqrt{8}$
    (b) $f(x) = \frac{x+2}{3x+1}$, Ratkaisu: 0
    (c) $f(x) = x^2 + 1$. Ratkaisu: 5

21. Tarkastellaan funktiota $f(x) = 5x + 4$. Määritä
    (a) $f(3)$, Ratkaisu: 19
    (b) $f(-3)$, Ratkaisu: -11
    (c) $f(\alpha)$, Ratkaisu: $5\alpha + 4$
    (d) $f(x+1)$, Ratkaisu: $5x + 9$
    (e) $f(3\beta)$, Ratkaisu: $15\beta + 4$
    (f) $f(x^2)$. Ratkaisu: $5x^2 + 4$

22. Olkoot $f(x) = 2x$, $g(x) = x - 1$ ja $h(x) = x^2$. Määritä
    (a) $f(g(x))$, Ratkaisu: $2x - 2$
    (b) $f(h(x))$, Ratkaisu: $2x^2$
    (c) $g(h(x))$, Ratkaisu: $x^2 - 1$
    (d) $g(f(x))$, Ratkaisu: $2x - 1$
    (e) $f(g(h(x)))$. Ratkaisu: $2x^2 - 2$

23. Etsi käänteisfunktio funktiolle
    (a) $f(x) = x + 4$, Ratkaisu: $f^{-1}(x) = x - 4$
    (b) $g(x) = 3x + 1$, Ratkaisu: $g^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$
    (c) $h(x) = \frac{x-8}{3}$, Ratkaisu: $h^{-1}(x) = 3x + 8$
    (d) $k(x) = 3x^2 - 2$. Ratkaisu: Funktiolla $k(x)$ ei ole yksikäsitteistä käänteisfunktiota (laskusta saadaan kaksi ratkaisua $k^{-1}(x) = \pm\sqrt{\frac{x+2}{3}}$).

2.0.6 Tehtäviä: logaritmi

24. Aukaise käyttäen logaritmin laskusääntöjä
    (a) $\lg\left(\frac{2ab^2}{c}\right)$, Ratkaisu: $\lg 2 + \lg a + 2\lg b - \lg c$
    (b) $\ln\left(\frac{(a+b)^2}{\sqrt{c}}\right)$. Ratkaisu: $2\ln(a+b) - \frac{1}{2}\ln c$
25. Sievennä yhdeksi logaritmiksi
    (a) $\ln(xy) + \ln(y^2)$, Ratkaisu: $\ln(xy^3)$
    (b) $\lg\left(\frac{x^3y^2}{z}\right) - 2\lg\left(\frac{xy}{z}\right)$, Ratkaisu: $\lg(xz)$
    (c) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln\left(\frac{b}{c}\right) + \ln\left(\frac{c}{d}\right) + \ln\left(\frac{d}{a}\right)$, Ratkaisu: 0
    (d) $\log_2(t^3) - \log_2(2t) + 2\log_2 t$. Ratkaisu: $\log_2\left(\frac{t^4}{2}\right)$
26. Laske
27. $\log_2 8$, Ratkaisu: 3
28. $\log_3 27$, Ratkaisu: 3
29. $\lg\frac{1}{100}$. Ratkaisu: -2
30. Ratkaise
    (a) $16 = 10^x$,
    (b) $3^{2x+1} = 7$, Ratkaisu: $x = \lg 16$
    (c) $2e^x = 9$, Ratkaisu: $x = \frac{\log_3 7 - 1}{2}$
    (d) $e^{2x} = 7e^x$, Ratkaisu: $x = \ln\left(\frac{9}{2}\right)$
    (e) $3^{3x} = 7^{x+1}$, Ratkaisu: $x = \ln 7$
    (f) $2^{x-1} = 4^{2x}$. Ratkaisu: $x = \frac{\ln 7}{3\ln 3 - \ln 7}$

    Ratkaisu: $x = -\frac{1}{3}$
31. Ratkaise
    (a) $\ln(x^2 - 1) = 3$, Ratkaisu: $x = \pm\sqrt{1 + e^3}$
    (b) $2\ln x + 5 = 1$, Ratkaisu: $x = e^{-2}$
    (c) $\ln(x+1) + \ln x = \ln 12$, Ratkaisu: $x = 3$
    (d) $\lg(x-1) + 1 = \lg(x^2 - 1)$. Ratkaisu: $x = 9$

2.0.7 Tehtäviä: trigonometria

32. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 4 ja 7. Laske hypotenuusan pituus ja kolmion pinta-ala. Laske lisäksi kulmien suuruudet Ratkaisu: Hypotenuusa $\sqrt{65}$, pinta-ala 14, kulmat $90°$, $\arctan\left(\frac{4}{7}\right) \approx 29{,}74°$ ja $\arctan\left(\frac{7}{4}\right) \approx 60{,}26°$.

33. Paljonko on

    (a) $15°$ radiaaneina, Ratkaisu: $\frac{\pi}{12}$ rad

    (b) $\frac{\pi}{4}$ rad asteina? Ratkaisu: $45°$

34. Laske $\tan x$, kun $\sin x = \frac{1}{3}$. (Vihje. Piirrä jokin kolmio, jonka yhdelle kulmalle x pätee $\sin(x) = 1/3$. Selvitä toisen kateetin pituus.) Ratkaisu: $\tan(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

35. Ratkaise

    (a) $\sin x = 2$, Ratkaisu: Ei ratkaisua, koska sinin arvojoukko $[-1, 1]$,

    (b) $\sin x = \frac{1}{3}$, Ratkaisu: $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi n$ tai $x = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi n$, missä $n \in \mathbb{Z}$,

    (c) $\cos(2x + 1) = 0$. Ratkaisu: $x = \pm\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \pi n$, missä $n \in \mathbb{Z}$.

2.0.8 Tehtäviä: trigonometria2

2.1 Piirtotehtävä

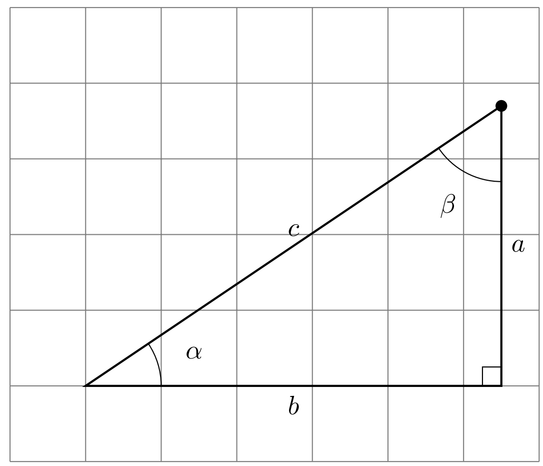
Piirtotehtävien opetus/tarkoitus. Jos jotakin asiaa ei osata laskea, piirretään se paperille ja mitataan.

Kuvien piirtelystä on sekin etu, että ollaan "jalat maassa" ja ymmärretään, mitä ollaan tekemässä.

(Galileo Galilei määritti sykloidin pinta-alan leikkaamalla sen muotoisen kuvion lyijylevystä ja punnitsemalla kuvion. Maanläheinen ja tarpeeksi tarkka tulos sovelluksiin!)

36. Leikkaa paperista saksilla kolmio (minkä muotoinen tahansa). Revi kolmion kulmat irti ja aseta vierekkäin. Tarkista, että kulmien summa on noin 180°.

37. Ruutupaperille on piirretty kolmio. Kopioi kuva paperille.



(a) Mittaa sivujen pituudet a, b ja c. Esimerkiksi viivottimella.

(b) Tarkista, että $a^2 + b^2 = c^2$.

(c) Määritä $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$

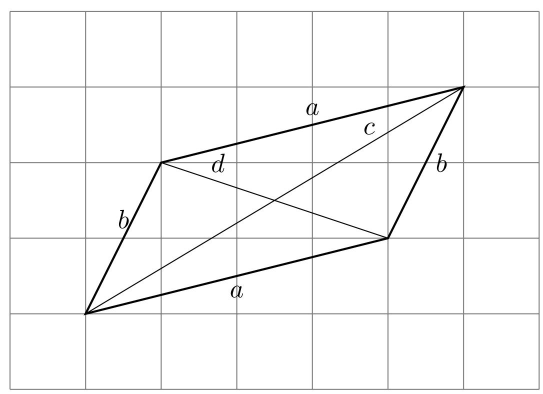
(d) Määritä $\cos(\alpha) = \frac{a}{c}$

(e) Määritä $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$

(f) Jos sinulla on kulmaviivotin, mittaa kulmat α ja β. Tarkista, että kulmien summa on noin 90°

38. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat $5cm$ ja $2cm$ pitkiä. Piirrä kolmio ruutupaperille ja mittaa sen hypotenuusa viivottimella. Tarkista, että Pythagoraan lause $a^2 + b^2 = c^2$ pätee suurinpiirtein kolmiossa.

39. Ruutupaperille on piirretty suunnikas. Kopioi kuva paperille.



(a) Mittaa sivujen pituudet a ja b sekä lävistäjät c ja c

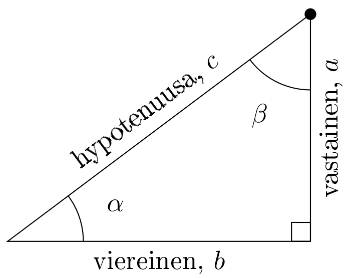
(b) Tarkista, että suunnikassääntö $c^2+d^2 = 2(a^2+b^2)$ pätee suurinpiirtein suunnikkaassa.

2.2 Trigonometria

Trigonometriset funktiot voidaan määritellä aluksi suorakulmaiselle kolmiolle, sitten yleiselle kolmiolle, ja sitten yksikköympyrän avulla.

Kulmien nimet ovat kreikkalaisia kirjaimia α (alfa), β (beta), γ (gamma) ja δ (delta). (Joskus muitakin kirjaimia tarvitaan.)

2.2.1 Suorakulmainen kolmio



- Sivu a on kulman α vastainen (β viereinen) kateetti.
- Sivu b on kulman α viereinen (β vastainen) kateetti.
- Sivu c on hypotenuusa.

Trigonometriset funktiot

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{vastainen}}{\text{hypotenuusa}} = \frac{a}{c}, \quad \cos(\alpha) = \frac{\text{viereinen}}{\text{hypotenuusa}} = \frac{b}{c}, \quad \tan(\alpha) = \frac{\text{vastainen}}{\text{viereinen}} = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Esimerkiksi kuvassa $\alpha \approx 37°$ ja $a = 3$, $b = 4$ ja $c = 5$. Siis

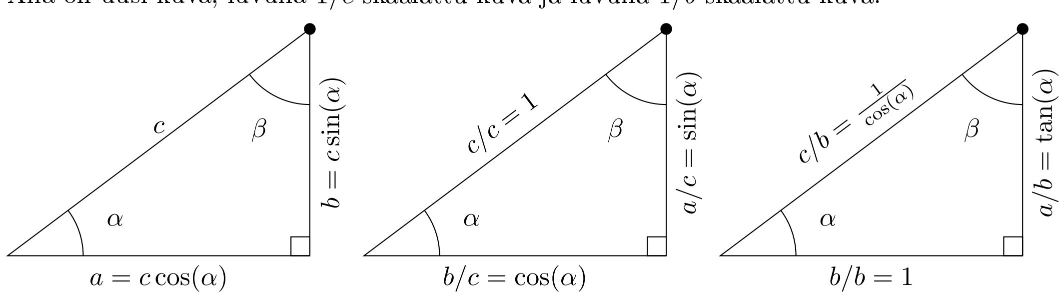
$$\sin(\alpha) = \frac{3}{5} = 0.6, \quad \cos(\alpha) = \frac{4}{5} = 0.8, \quad \tan(\alpha) = \frac{3}{4} = 0.75.$$

Pythagoraan lause kertoo $a^2 + b^2 = c^2$. (Esimerkiksi kuvassa $3^2 + 4^2 = 5^2$.)
Pituudet

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = c\sin(\alpha) = b\tan(\alpha), \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} = c\cos(\alpha) = \frac{a}{\tan(\alpha)}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\cos(\alpha)}$$

Joskus ylläoleva kuva joudutaan piirtämään uusiksi skaalattuna. Kolmion pituudet voidaan muuttaa esimerkiksi 1.2-kertaisiksi ilman, että kolmion muoto muuttuu.

Alla on uusi kuva, luvulla $1/c$ skaalattu kuva ja luvulla $1/b$ skaalattu kuva.

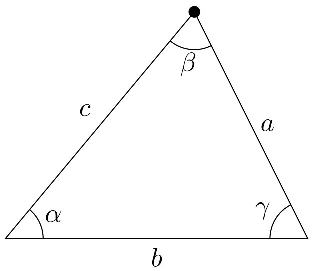


Puute. Kaikki kolmiot eivät ole suorakulmaisia. Miten toimitaan, kun on jokin muu kolmio kyseessä?

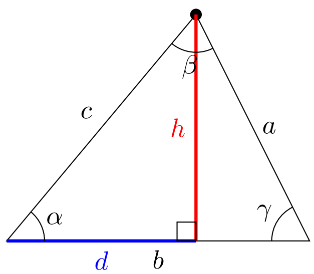
2.2.2 Teräväkulmainen kolmio (kaikki kulmat alle $90°$)

Alla olevassa kolmiossa on teräväkulmainen kolmio (kaikki kulmat alle $90°$).

Koska kolmio ei ole suorakulmainen, ei puhuta kateeteista eikä hypotenuusasta. Puhutaan vain sivuista a, b ja c.



Mitä ovat $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ ja $\tan(\alpha)$? Täytyy piirrellä. Jos kolmiolle piirretään korkeusjana, kolmio jakautuu kahteen suorakulmaiseen kolmioon.



Syntyneessä suorakulmaisessa kolmiossa

- Sivu h on kulman α vastainen kateetti. (Alunperin korkeusjana.)
- Sivu d on kulman α viereinen kateetti. (Alunperin kannan osa.)
- Sivu c on hypotenuusa. (Alunperin yksi sivu.)

Trigonometriset funktiot

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{c}, \quad \cos(\alpha) = \frac{d}{c}, \quad \tan(\alpha) = \frac{h}{d}$$

Pätee sinilause

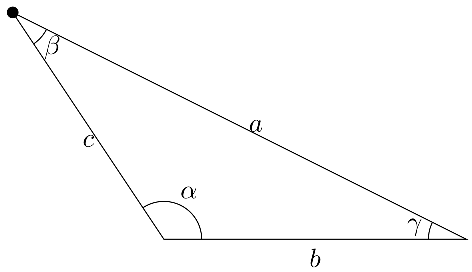
$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

ja kosinilause (laajennettu Pythagoraan lause)

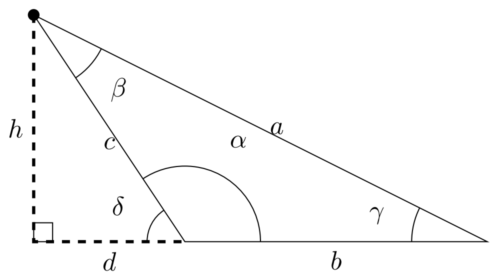
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma).$$

2.2.3 Tylppäkulmainen kolmio (yksi kulma yli $90°$)

Alla olevassa kolmiossa on tylppäkulmainen kolmio (yksi kulma yli $90°$).



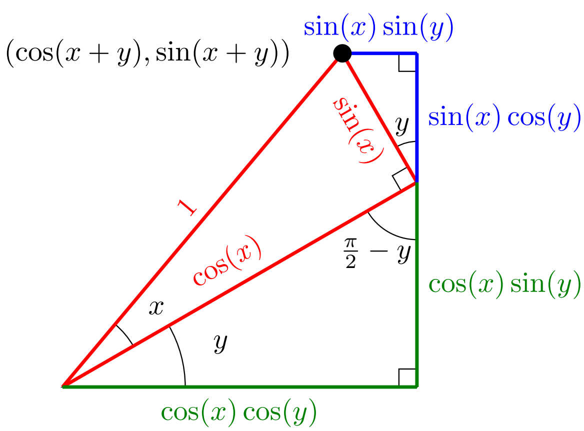
Mitä ovat $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ ja $\tan(\alpha)$? Täytyy piirrellä paljon.



Trigonometriset funktiot

- $\sin(\alpha) = \sin(\delta) = \frac{h}{c}$
- $\cos(\alpha) = -\cos(\delta) = \frac{d}{c}$
- $\tan(\alpha) = -\tan(\delta) = \frac{h}{d}$

Pätee sinin ja kosinin summakaavat.



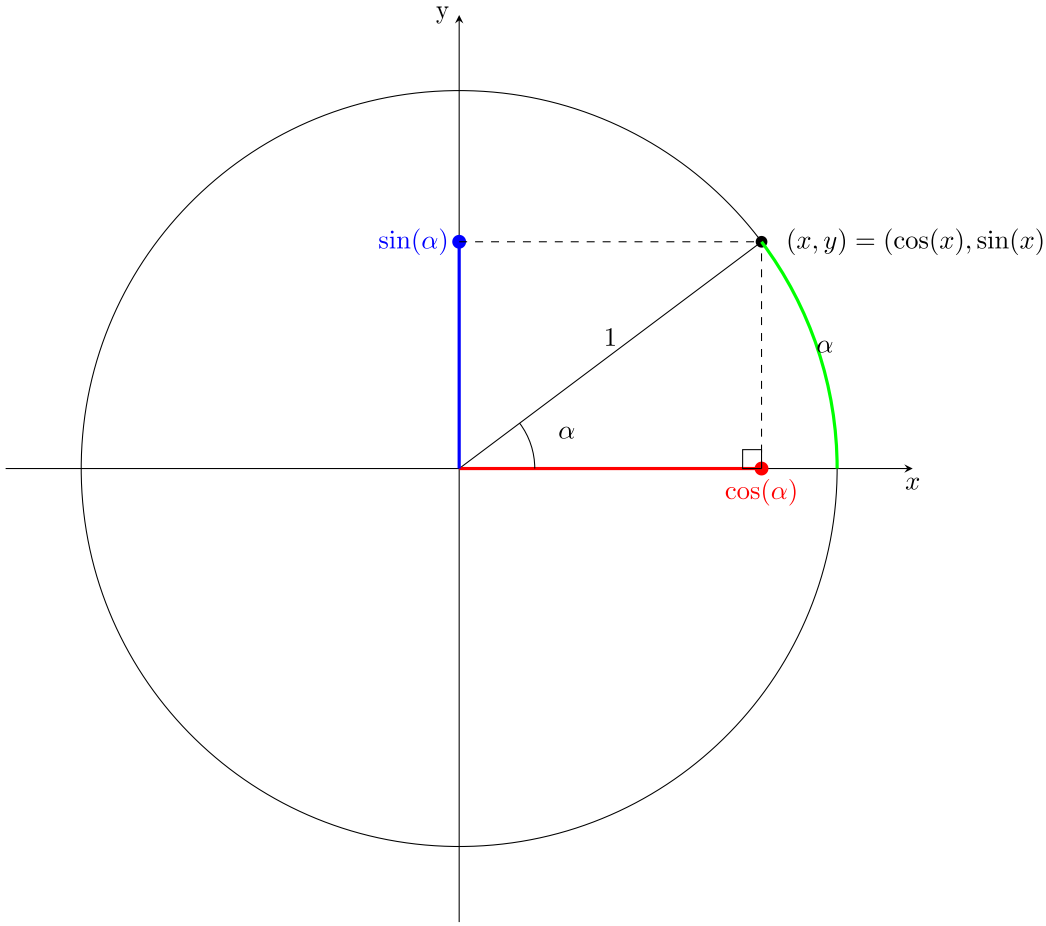
$$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

Puute. Sinin summakaavalla saadaan esimerkiksi

$$\sin(240°) = \sin(120° + 120°) = 2\sin(120°)\cos(120°) = 2\sin(60°)(-\cos(60°) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0.866.$$

Mutta kulma $240°$ ei esiinny missään kolmiossa. Miten aiheesta voidaan piirtää kuva?

2.2.4 Yksikköympyrä



Kun $r = 1$, niin ympyrän kehän pituus $2\pi r = 2\pi$ ja ympyrän pinta-ala on $\pi r^2 = \pi$.

Näistä tehtävistä on Moodlessa erillinen laskintehtävä

40. Määritä laskimella kolmen desimaalin tarkkuudella

(a) $\sin(10°)$ Ratkaisu: 0,174

(b) $\cos(10°)$ Ratkaisu: 0,985

(c) $\tan(10°)$ Ratkaisu: 0,176

(d) $\sin(40°)$ Ratkaisu: 0,643

(e) $\cos(40°)$ Ratkaisu: 0,766

(f) $\tan(40°)$ Ratkaisu: 0,839

41. Määritä laskimella kulman α suuruus, kun

(a) $\sin(\alpha) = 0,766$ Ratkaisu: $\alpha \approx 50°$

(b) $\cos(\alpha) = 0,766$ Ratkaisu: $\alpha \approx 60°$

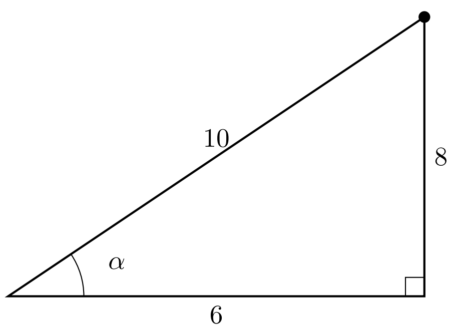
(c) $\tan(\alpha) = 0,364$ Ratkaisu: $\alpha \approx 20°$

42. Onko merkitty suhde sini, kosini vai tangentti

(a) $\frac{6}{10}$ Ratkaisu: kosini

(b) $\frac{8}{10}$ Ratkaisu: sini

(c) $\frac{8}{6}$ Ratkaisu: tangentti



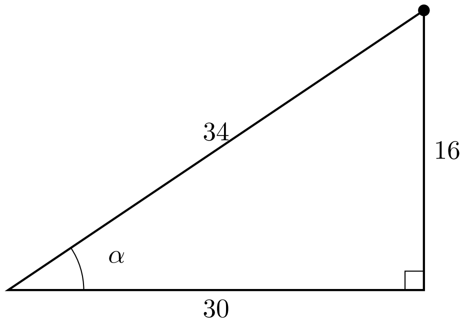
43. Määritä ja laske

(a) $\sin(\alpha)$ Ratkaisu: $\frac{16}{34}$

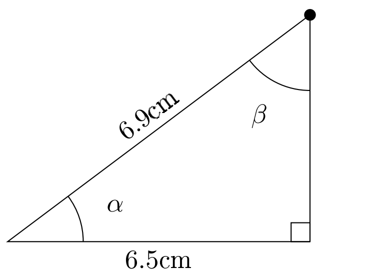
(b) $\cos(\alpha)$ Ratkaisu: $\frac{30}{34}$

(c) $\tan(\alpha)$ Ratkaisu: $\frac{16}{30}$

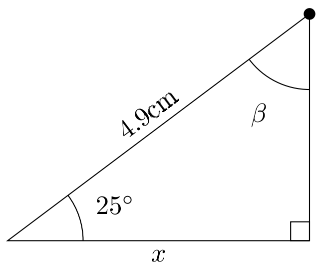
Palautettavat tehtävät



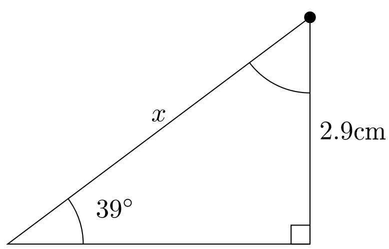
44. Laske kulmien α ja β suuruudet. Ratkaisu: $\alpha \approx 70,4°$, $\beta \approx 19,6°$



45. Laske kateetin x pituus. Ratkaisu: $5.4cm$



46. Laske hypotenuusan x pituus. Ratkaisu: $4.6cm$



47. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 36 ja terävä kulma on 19°. Laske kolmion muut osat. Ratkaisu: $\alpha = 19°$, $\beta = 71°$, $11,720$, $34,038$

Ensi syksynä opiskellaan vektoreita ja kompleksilukuja $z = a + bi$. Kompleksilukujen avulla voi laskea kulmalaskuja.

48. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat $a = 2$ ja $b = 7$. Määritä kateettia a vastainen kulma α kahdella tavalla.

    (a) $\alpha = \arctan(a/b)$

    (b) $\alpha = \text{imag}(\log(b + ai)$ `https://www.wolframalpha.com/input?i=imag%28log%287%2B2i%29%29`

    Viitataan kirjaan[1]

2.3 Kaavoja, matematiikan perusteet

Murtoluvut

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Potenssit

$$a^b a^c = a^{b+c}, \quad \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}, \quad (a^b)^c = a^{bc}, \quad (ab)^c = a^b a^c, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^b}{b^c}$$

Juuret

$$(a^b)^{\frac{1}{b}} = a^{b \cdot \frac{1}{b}} = a^1 = a, \quad \text{jos} \quad a > 0, \quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$$

Ensimmäisen asteen yhtälö

$$ax = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{b}{a}$$

Toisen asteen yhtälö

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Yhtälöpari

$$\begin{cases} ax + by & = U \\ cx + dy & = V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} acx + bcy & = cU \\ -acx + -ady & = -aV \end{cases} \Rightarrow \ldots$$

$$\begin{cases} ax + by & = U \\ cx + dy & = V \end{cases} \Rightarrow y = \frac{U - ax}{b} \quad \Rightarrow cx + d\frac{U - ax}{b} = V \Rightarrow \ldots$$

$$\begin{cases} ax + by & = U \\ cx + dy & = V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = \frac{Ud - bV}{ad - bc} \\ y & = \frac{aV - Uc}{ad - bc} \end{cases}$$

Funktio $f(x)$ ja käänteisfunktio $g(x) = f^{-1}(x)$

$$f(g(x)) = x, \quad g(f(x)) = x$$

Logaritmit

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \quad \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b), \quad \ln(a^b) = b\ln(a)$$

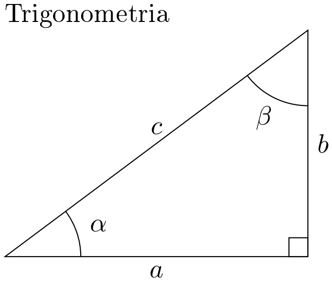
$$\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

$$\log_a(1) = 0, \quad \log_a(a) = 1, \quad \log_a(a^x) = x, \quad a^{\log_a(x)} = x$$

$$\begin{aligned} \log_a(b^c) &= c\log_a(b) \\ \log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\ \log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \end{aligned}$$

$$\mathrm{lb}(x) = \log_2(x), \quad \lg(x) = \log_{10}(x), \quad \ln(x) = \log_e(x), \quad e \approx 2,72$$

Trigonometria



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{c}, \quad \cos(\alpha) = \frac{a}{c}, \quad \tan(\alpha) = \frac{b}{a},$$

$$\alpha = \arcsin\frac{b}{c}, \quad = \arccos\frac{b}{c}, \quad = \arctan\frac{b}{c},$$

$$\alpha = \mathrm{Imag}(\ln(a + bi)) \cdot \frac{180°}{\pi}$$

3 Vektorit ja kompleksiluvut (3op)

3.1 vektorin esitystavat, pituus, yksikkövektori

1. Esitä muodossa (a, b, c) vektori
   (a) $2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ Ratkaisu: $(2, 3, 4)$
   (b) $5(2\hat{\jmath} + 3\hat{\imath} + 4\hat{k})$ Ratkaisu: $(15, 10, 20)$
   (c) $2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ Ratkaisu: $(0, 2, 4)$
   (d) $\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ Ratkaisu: $(1, -1)$ tai $(1, -1, 0)$
2. Esitä muodossa $a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$ vektori
   (a) $(1, 2, 3)$ Ratkaisu: $\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$
   (b) $-2\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ Ratkaisu: $-4\hat{\jmath} - 6\hat{k}$
   (c) $(-1, 0, 3)$ Ratkaisu: $-\hat{\imath} + 3\hat{k}$
3. Olkoon $\overline{u} = (2, 1)$ ja $\overline{v} = (1, -1)$. Laske
   (a) $|\overline{u}|$ Ratkaisu: $\sqrt{5}$
   (b) $|\overline{v}|$ Ratkaisu: $\sqrt{2}$
   (c) $|\overline{u} + \overline{v}|$ Ratkaisu: 3
   (d) $|\overline{u} - \overline{v}|$ Ratkaisu: $\sqrt{5}$
   (e) $|\overline{u} + \overline{v}|^2 + |\overline{u} - \overline{v}|^2 - 2|\overline{u}|^2 - 2|\overline{v}|^2$ Ratkaisu: 0
4. Määritä vektorin $\overline{u} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ suuntainen yksikkövektori $\hat{u} = \frac{1}{|\overline{u}|}\overline{u}$. Ratkaisu: $\hat{u} = 0.6\hat{\imath} - 0.8\hat{\jmath}$
5. Esitä vektori $\overline{u} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ muodossa $\overline{u} = |\overline{u}|\hat{u}$. Ratkaisu: $\bar{u} = 5(0.6\hat{\imath} - 0.8\hat{\jmath})$
6. Esitä vektori $\overline{u} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ muodossa $\overline{u} = |\overline{u}|\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\\sin(\theta)\end{pmatrix}$, missä θ on jokin sopiva kulma. Muoto $r(\cos(\theta), \sin(\theta))$ on ns. napakoordinaattiesitys. Ratkaisu: $\bar{u} \approx 5(\cos(-53°), \sin(-53°))$
   Vihje. Tässä $|\overline{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\theta = \arctan(y/x)$.
7. Määritä vektorin $\overline{u} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ suuntainen yksikkövektori. **(Koetehtävä?)** Ratkaisu: $\hat{u} = 0.33\hat{\imath} - 0.66\hat{\jmath} + 0.66\hat{k}$

3.2 pallokoordinaatit

8. **Extra.** Esitä vektori $\overline{u} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ muodossa $\overline{u} = |\overline{u}|\hat{u}$, missä u on yksikkövektori. Ratkaisu: $\overline{u} \approx 6(0.33\hat{\imath} - 0.66\hat{\jmath} + 0.66\hat{k})$

9. **Extra.** Esitä vektori $\overline{u} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ muodossa $\overline{u} = |\overline{u}| \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$, missä φ ja θ ovat jotkin sopivat kulmat. Tämä on ns. pallokoordinaattiesitys.

   Vihje. Jos $(x, y, z) = R \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$, niin $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Asetetaan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nyt $\varphi = \arctan(z/r)$ ja $\theta = \arctan(y/x)$. Ratkaisu: $R = 6$, $r = \sqrt{20}$, $\varphi \approx 41,8°$, $\theta \approx 63,4°$. Siis $\overline{u} \approx 6 \begin{pmatrix} \cos(42°)\cos(63°) \\ \cos(42°)\sin(63°) \\ \sin(42°) \end{pmatrix}$.

10. **Extra.** Olkoon $A = (1, 5)$ ja $B = (3, 3)$. Määritä vektori $\overline{u} = \vec{AB} = B - A$. Määritä piste C, kun $\vec{AC} = 2\vec{AB}$ Olkoon $D = (2, 1)$. Määritä piste E, kun $E - D = \vec{DE} = -\vec{AB} = -(B - A)$. Piirrä kuvaan kaikki mainitut pisteet ja vektorit.

11. **Extra.** Soutuveneen ($m_1 = 100$kg) nopeusvektori on $\overline{v}_1 = (2, 5)$m/s. Vesijetin ($m_2 = 500$kg) nopeusvektori on $\overline{v}_2 = (10, 0)$m/s. Alukset törmäävät pisteessä (0,0) tarttuen toisiinsa kiinni.

    (a) laske kummallekin aluksien liikemäärävektorit $\overline{p}_1 = m_1\overline{v}_1$ ja $\overline{p}_2 = m_2\overline{v}_2$ ennen törmäystä

    (b) laske yhteen tarttuneiden alusten liikemäärävektori $p_3 = m_3\overline{v}_3$. Tässä $m_3 = m_1 + m_2$. (Fysiikasta tiedetään, että liikemäärä säilyy törmäyksissä, eli $\overline{p}_3 = \overline{p}_1 + \overline{p}_2$)

    (c) laske kyseisen liikemäärävektorin pituus $|\overline{p}_3|$

    (d) laske yhteen tarttuneiden alusten nopeusvektorin pituus $|\overline{v}_3|$

    (e) kuinka suuri osuus liike-energiasta säilyi törmäyksessä? Siis suhde $\dfrac{m_3|v_3|^2}{m_1|v_1|^2 + m_2|v_2|^2}$.

3.3 vektorien pistetulo ja vektorien välinen kulma

Esimerkki. Vektorien $\overline{u} = (3,4)$ ja $\overline{v} = (4,4)$ pistetulo on $(3,4) \cdot (4,4) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 12 + 16 = 28$.
(Siis vektorien pistetulossa lasketut "alkioittaiset tulot" lasketaan lopuksi yhteen.)
Vektorien $\overline{u} = (3,4)$ ja $\overline{v} = (4,4)$ välinen kulma on

$$\alpha = \arccos \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{|\overline{u}||\overline{v}|} = \arccos \frac{28}{5 \cdot 4\sqrt{2}} = \arccos 0,98994\ldots = 0,1418\ldots \frac{180^\circ}{\pi} \approx 8,13^\circ.$$

12. Laske vektorien $(1,-2,-3)$ ja $(2,4,-2)$ pistetulo. Ovatko vektorit toisiaan vastaan kohtisuorassa?
    Ratkaisu: ovat

13. Laske vektorien $(1,2,-3)$ ja $(4,1,1)$ pistetulo. Ovatko vektorit toisiaan vastaan kohtisuorassa?
    Ratkaisu: eivät ole

14. Laske vektorien $(1,2,2)$ ja $(1,2,-2)$ välinen kulma. **(Koetehtävä?)** Ratkaisu: noin $83,6^\circ$

15. Laske vektorien $(1,5,0)$ ja $(3,3,0)$ välinen kulma. (**) Ratkaisu: noin 33°

3.4 suorat

16. Olkoon $A = (1, 1)$ ja $B = (3, 2)$. Pisteiden A jB kautta kulkeva suora on muotoa

$$Q(t) = A + t\overline{u} = A + t(B - A) = (1, 1) + t(2, 1). \qquad (1)$$

Tässä $\overline{u} = (2, 1)$ on suoran suuntavektori. Esimerkiksi piste $Q(10) = (1, 1) + 10(2, 1) = (21, 11)$ on suoralla.
Määritä suoralla olevat pisteet $Q(2)$, $Q(3)$, $Q(\frac{1}{2})$, $Q(-1)$. Piirrä kuva.
Ratkaisu: $Q(2) = (5, 3)$, $Q(3) = (7, 4)$, $Q(\frac{1}{2}) = (2, 1.5)$, $Q(-1) = (-1, 0)$

17. Suoran (1) pisteen A kautta kulkeva normaalisuora on muotoa

$$N(t) = A + t\overline{n} = (1, 1) + t(1, -2).$$

Tarkista pistetulon avulla, että suoran ja sen normaalisuoran suuntavektorit $\overline{u} = (2, 1)$ ja $\overline{n} = (1, -2)$ ovat kohtisuorassa.
Piirrä edellisen tehtävän kuvaan normaalisuoran pisteet $N(1)$ ja $N(2)$.

18. Suoran (1) yhtälö on muotoa $(x, y) \cdot \overline{n} = A \cdot \overline{n}$ eli

$$(x, y) \cdot (1, -2) = (1, 1) \cdot (1, -2)$$

eli $x - 2y = -1$. Tarkista, että pisteet $(x, y) = (5, 3)$ ja $(x, y) = (7, 4)$ toteuttavat suoran yhtälön.

19. Olkoon $A = (1, 5)$ ja $B = (3, 3)$. Esitä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora muodossa $Q(t) = A + t\overline{u}$.
Ratkaisu: $Q(t) = (1, 5) + t(2, -2)$

20. Etsi edellisen tehtävän suoralle jokin pisteen A kautta kulkeva normaalisuora. Ratkaisu: $Q(t) = (1, 5) + t(2, 2)$

3.5 tasot

21. Olkoon $A = (1,0,0)$, $B = (0,2,0)$ ja $C = (0,0,3)$. Pisteiden A, B ja C kautta kulkeva taso on muotoa

$$Q(t,s) = A + t\overline{u} + s\overline{v} = A + t(B - A) + s(C - A) = (1,0,0) + t(-1,2,0) + s(-1,0,3). \tag{2}$$

Tässä $\overline{u}$ ja $\overline{v} =$ ovat tason suuntavektorit. Esimerkiksi piste

$$Q(10,10) = (1,0,0) + 10(-1,2,0) + 10(-1,0,3) = (-19,20,30)$$

on tasolla.

Määritä tasolla olevat pisteet $Q(2,2)$, $Q(2,-1)$, ja $Q(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

22. Tason (2) pisteen A kautta kulkeva normaalisuora on

$$N(t) = A + t\overline{n} = (1,0,0) + t(6,3,2).$$

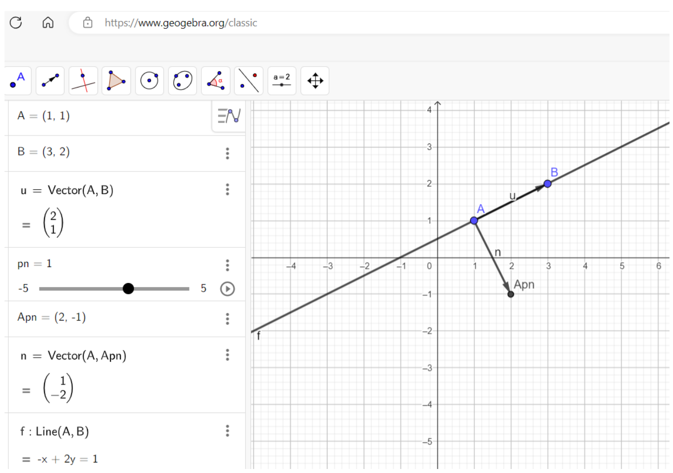
Tässä $\overline{n} = \overline{u} \times \overline{v} = (6,3,2)$ on eräs tason normaalivektori. Tarkista, että $\overline{n} \perp \overline{u}$ ja $\overline{n} \perp \overline{v}$. (***)Vihje. Käytä pistetuloa.

23. Tason (2) yhtälö on muotoa $(x,y,z) \cdot \overline{n} = A \cdot \overline{n}$ eli

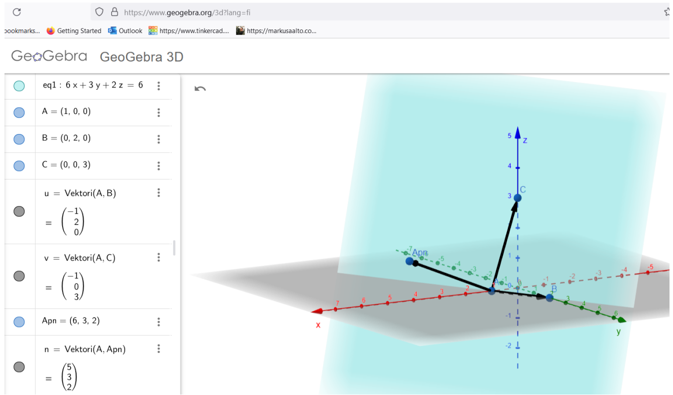
$$(x,y,z) \cdot (6,3,2) = (1,0,0) \cdot (6,3,2)$$

eli $6x + 3y + 2z = 6$. Tarkista, yhtälöön sijoittamalla, että pisteet A, B ja C sekä piste $Q(2,2)$ ovat tasolla.

Tehtäviin liittyviä kuvia



Kuva 1: Suora (1)



Kuva 2: Taso (2)

3.6 ristitulo

24. Vektorien ristitulo määritellään kaavalla

$$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

Laske $(-1, 2, 0) \times (-1, 0, 3)$. Ratkaisu: $(6, 3, 2)$

25. Tarkista, että $(-1, 2, 0) \cdot (6, 3, 2) = 0$ ja $(-1, 0, 3) \cdot (6, 3, 2) = 0$.

26. Laske

(a) $(2, -1, 1) \times (-1, 2, 1)$ Ratkaisu: $(-3, -3, 3)$

(b) $(1, 2, 0) \times (2, 1, 1)$ Ratkaisu: $(2, -1, -3)$

27. Pisteet $A = (3, 1, 4)$, $B = (2, 3, 5)$ ja $C = (-1, 1, 0)$ muodostavat kolmion.

(a) Laske kolmion kahdelle sivulle suuntavektorit. Esimerkiksi $\overline{u} = B - A$ ja $\overline{v} = C - A$.
Ratkaisu: $B - A = (-1, 2, 1)$, $C - A = (-4, 0, -4)$, $C - B = (-3, -2, -5)$

(b) Laske kolmion pinta-ala.
Vihje. Pinta-alalle on useita kaavoja, esimerkiksi Ala $= \frac{1}{2}|\overline{u} \times \overline{v}|$ ja Ala $= \frac{1}{2}|\overline{u}||\overline{v}| \sin \alpha$, missä α on vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen kulma. Voit käyttää jompaa kumpaa näistä kaavoista. Ratkaisu: Ala $= 4\sqrt{3}$

28. Eräällä suunnikkaalla on kärkipisteet $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 4, 3)$ ja $C = (4, 2, 1)$. Laske suunnikkaan pinta-ala.
Vihje. Voit laskea kolmion ABC pinta-alan ja kertoa sen kahdella. Ratkaisu: Ala $= 10\sqrt{2}$

29. Kuinka suuri on suunnikkaan $ABCD$ pinta-ala, kun sen kolme kärkeä ovat pisteissä $A = (2, 1)$, $B = (0, 0)$ ja $C = (2, -3)$? Ratkaisu: Ala $= 8$

30. Laske tetraedrin tilavuus, kun sen kärjet ovat pisteissä $A = (2, 1, -1)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (-1, -2, 2)$ ja $D = (-1, 2, -1)$. Vihje. Tilavuuden voi laskea kaavalla $V = \pm\frac{1}{6}(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}$, missä vektorit $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ ovat tetraedrin kolmen särmää.
Ratkaisu: $(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w} = -24$, joten $V = 4$ **(Koetehtävä?)**

31. Laittamalla kolme edellisen tehtävän tetraedria (tai niiden peilikuvaa) vierekkäin saadaan prisma. (Prismalla on tahkoina kaksi kolmiota ja kolme suunnikasta.) Laske priman tilavuus. Ratkaisu: $V = 12$

32. Laittamalla kaksi edellisen tehtävän prismaa vierekkäin saadaan suuntaissärmiö. (Suuntaissärmiöllä on tahkoina kuusi suunnikasta.) Laske suuntaissärmiön tilavuus. Ratkaisu: $V = 24$

33. Suuntaissärmiön särmät ovat $\overline{a} = \hat{\imath} + 2\hat{k}$, $\overline{b} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ ja $\overline{c} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$.

    (a) Määritä suuntaissärmiön tilavuus. Ratkaisu: $\overline{w} = \overline{a} \times \overline{b} = -2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + \hat{k}$, $V = 4$

    (b) ~~Määritä suuntaissärmiön vaipan pinta-ala. Ratkaisu: Ala =?~~ Turhan vaikea käsin laskettavaksi.

34. Laske tasojen

$$\begin{aligned} &\text{Taso 1}: \quad Q(t) = (0,0,0) + t(2,-1,1) + s(-1,2,1), \qquad \overline{n}_1 = (-3,-3,3); \\ &\text{Taso 2}: \quad Q(t) = (0,0,0) + t(1,2,0) + s(2,1,1), \qquad \overline{n}_2 = (2,-1,-3), \end{aligned}$$

välinen kulma α. Pätee $\cos\alpha = \dfrac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|}$. Ratkaisu: $\alpha = 128^\circ$ ja $180^\circ - \alpha = 52^\circ$

3.7 kompleksiluvut

Toisen asteen yhtälö

Toisen asteen yhtälöitä ratkaistiin kaavalla

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

aiemmalla kurssilla. Saadaan kompleksiratkaisuja, kun kirjoitetaan esim.

$$\sqrt{-16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = 4i.$$

35. Ratkaise $x^2 - 4x + 13 = 0$. **(Koetehtävä?)** Ratkaisu: $x_1 = 2 + 3i$, $x_2 = 2 - 3i$

36. Ratkaise $x^2 - 6x + 10 = 0$. Ratkaisu: $x_1 = 3 + i$, $x_2 = 3 - i$

37. Ratkaise $x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$. Ratkaisu: $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$

Kompleksilukujen laskutoimitukset

Kompleksiluvuilla voi laskea kuten reaaliluvuilla, mutta täytyy ottaa huomioon $i^2 = -1$.

38. Olkoon $z = 3 - 4i$ ja $w = 1 + 2i$. Laske
    (a) $z + w$ Ratkaisu: 4-2i
    (b) $z - w$ Ratkaisu: 2-6i
    (c) zw **(Koetehtävä?)** Ratkaisu: $11 + 2i$

Kompleksilukujen jakolaskussa lavennetaan nimittäjän $z = a + ib$ liittoluvulla eli konjugaatilla $z^* = a - ib$ seuraavasti

$$\frac{c+di}{a+bi} = \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{(c+di)(a-bi)}{a^2 - b^2i^2} = \frac{(c+di)(a-bi)}{a^2+b^2}.$$

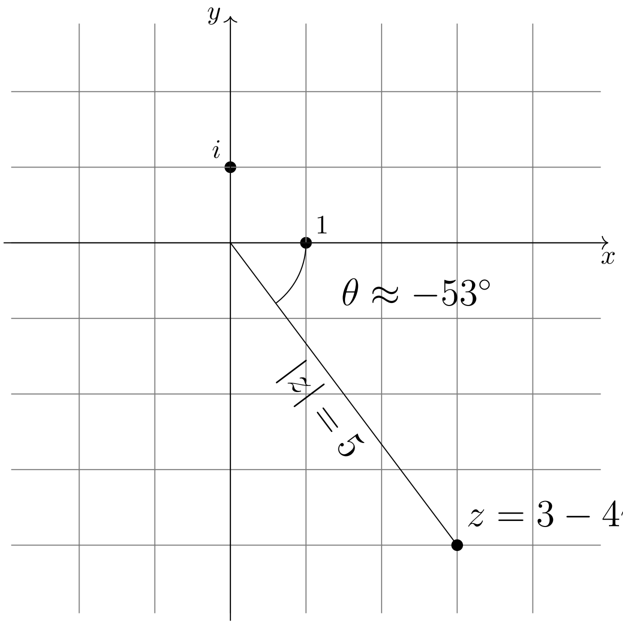
Hyöty on siinä, että nimittäjästä saatiin pois imaginaariyksiköt i ja voidaan taas laskea kuten reaaliluvuilla. Nimittäjään tuli

$$zz^* = a^2 + b^2 = \sqrt{a^2+b^2}^2 = |z|^2$$

eli luvun z modulin eli itseisarvon $|z|$ neliö.

39. Olkoon $z = 3 - 4i$ ja $w = 1 + 2i$. Laske $\dfrac{w}{z}$ yllä kuvatulla menetelmällä. Piirrä kuva.

Kompleksiluvun esitystavat



$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\theta = \arctan(y/x) \approx -53^\circ$$

$$\begin{aligned} z = 3 - 4i &= 5(0,6 - 0,8i) \\ &= 5(\cos(-53^\circ) + i\sin(-53^\circ)) \\ &= 5e^{i(-53^\circ)} \end{aligned}$$

- summamuoto $z = 3 - 4i$
- "pituus kertaa yksikkövektori" $z = 5(0,6 - 0,8i)$
- napakoordinaattimuoto $z = 5(\cos(-53^\circ) + i\sin(-53^\circ))$
- eksponenttimuoto $z = 5e^{i(-53^\circ)}$
- kulmamuoto $z = 5\angle - 53^\circ$

Kulmaesitys helpottaa tulojen laskemista, esimerkiksi

$$\begin{aligned} (1+i)(3+2i) &\approx 1,4e^{i45^\circ} \cdot 3,6e^{i33^\circ} \\ &= (1,4 \cdot 3,6)e^{i(45^\circ + 33^\circ)} \\ &= 5,04e^{i78^\circ}. \end{aligned}$$

40. Piirrä kompleksiluvut ja määritä niille napakoordinaattiesitykset

(a) $z = 3 - 4i$ Ratkaisu: $z = 5\angle - 53,130^\circ$

(b) $w = 1 + 2i$ Ratkaisu: $w = \sqrt{5}\angle 63,435^\circ$

(c) $zw = 11 + 2i$ Ratkaisu: $zw = 5\sqrt{5}\angle 10,305^\circ$

(d) $w/z = -0.2 + 0.4i$ Ratkaisu: $w/z = \frac{1}{\sqrt{5}}\angle 116,57^\circ$.

Kaava $\theta = \arctan(y/x)$ antaa vastauksen suoraan vain, jos $-90^\circ < \theta < 90^\circ$. **Siispä tarkista, että kulmat vastaavat piirroksissa esiintyneitä arvoja.**

Kompleksiluvuille saadaan napakoordinaattiesitys

$$z = |z|\angle\theta = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z|e^{i\theta}.$$

41. Muunna summamuotoon $z = 6e^{i27^\circ}$. **(Koetehtävä?)**

42. Muunna eksponenttimuotoon $z = 2 + 2i$.

3.8 Kaavoja, vektorit ja kompleksiluvut

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3, \qquad \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ, \quad \overline{u} = (a, b) \Rightarrow \overline{n} = (b, -a) \quad \text{(Esim.)}$$

$$|(u_1, u_2, u_3)| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \quad \hat{u} = \frac{1}{|\overline{u}|}\overline{u}, \qquad (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{|\overline{u}||\overline{v}|}, \quad \theta = \arctan(y/x)$$

$$V_S = |(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}|, \quad V_P = \frac{1}{2}|(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}|, \quad V_T = \frac{1}{6}|(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}|, \quad A = |\overline{u} \times \overline{v}|$$

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1} = i\sqrt{a}, \quad i^2 = -1$$

$$z^* = (x + iy)^* = x - iy, \quad |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan(y/x), \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{zw^*}{|w|^2}, \quad \text{eli} \quad \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

4 Sov: Derivaatta ja integraali (2.5op)

4.1 numeerista derivointia ja integrointia

1. Laske funktion $f(x)$ keskimääräinen muutosnopeus $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ välillä $[0, 1]$, kun

   (a) $f(x) = 3x$, Ratkaisu: 3,

   (b) $f(x) = e^{2x}$, Ratkaisu: $e^2 - 1 \approx 6{,}39$,

   (c) $f(x) = 4 \sin x - \cos(2x)$ Ratkaisu: $4 \sin 1 - \cos 2 + 1 \approx 4{,}78$.

   Vinkki: Nyt $x = 0$ ja $\Delta x = 1$ luennolla käydyssä yhtälössä.

2. Tarkastellaan vakiofunktiota $f(x) = 1$.

   (a) Laske ja sievennä erotusosamäärä $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Ratkaisu: 0,

   (b) Mitä on tämän perusteella $f'(x)$? Entä $f'(2)$? Ratkaisu: $f'(x) = 0,\ f'(2) = 0$.

   Vinkki: Käytä b)-kohdassa hyväksesi tietoa, että minkä tahansa vakion C raja-arvo on tuo vakio itse, siis $\lim_{\Delta x \to 0} C = C$.

3. Tarkastellaan lineaarista funktiota $f(x) = x$.

   (a) Laske ja sievennä erotusosamäärä $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Ratkaisu: 1,

   (b) Mitä on tämän perusteella $f'(x)$? Entä $f'(2)$? Ratkaisu: $f'(x) = 1,\ f'(2) = 1$.

   Vinkki: Sama kuin yllä.

4. Ohessa on erään funktion $f(x)$ kuvaaja.

   Alueiden pinta-alat ovat $A_1 = 1{,}2$; $A_2 = 2{,}7$; $A_3 = 2{,}0$ ja $A_4 = 26{,}0$. Mitä on tämän perusteella $\int_0^{10} f(x)dx$? Ratkaisu: $25{,}5$.

4.2 numeerista derivointia

5. Laske arvio funktion $f(x) = \sin(2x)e^{-x}$ derivaatalle pisteessä $x = 0{,}5$ askelpituudella $\Delta x = 0{,}2$ käyttäen

   (a) etenevää differenssiä $f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, Ratkaisu: $f'(0{,}5) \approx -0{,}105$,

   (b) takenevaa differenssiä $f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$, Ratkaisu: $f'(0{,}5) \approx 0{,}46$,

   (c) keskeisdifferenssiä $f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$. Ratkaisu: $f'(0{,}5) \approx 0{,}178$,

   (d) Laske myös todellinen derivaatan arvo tässä pisteessä, kun tiedetään, että oikeasti $f'(x) = [2\cos(2x) - \sin(2x)]e^{-x}$. Mikä kohdissa a) - c) lasketuista arvioista on lähimpänä oikeaa arvoa? Ratkaisu: $f'(0{,}5) \approx 0{,}145$.

   Voit tehdä laskut joko käsin tai käyttää apuna Exceliä. Muista käyttää kulman yksikkönä radiaaneja, kun lasket sinifunktion arvoja.

6. Luennolla tarkasteltiin Excelin avulla kolmea eri keinoa arvioida funktion $f(x) = \sin x$ derivaattaa: etenevää differenssiä, takenevaa differenssiä ja keskeisdifferenssiä. Löydät tiedoston luentomuistiinpanojen kansiosta nimellä "Numeerista_derivointia.xlsx". Lisää tiedostoon vielä yksi sarake. Anna sarakkeen otsikoksi "Viiden pisteen differenssi", ja laske siinä arvio derivaatalle käyttäen kaavaa

   $f'(x) \approx \frac{-f(x+2\Delta x)+8f(x+\Delta x)-8f(x-\Delta x)+f(x-2\Delta x)}{12\Delta x}$.

   Kun askelpituus on $\Delta x = 0{,}5$, paljonko on tätä arviota käyttäen $f'(4)$? Mikä arvioista näyttäisi olevan paras? Ratkaisu: $f'(4) \approx -0{,}652$.

4.3 numeerista integrointia

7. Laske tämä tehtävä käsin (siis ei Excelillä). Tarkastellaan funktion $f(x) = \sin(2x)e^{-x}$ määrättyä integraalia $\int_0^1 f(x)dx$ numeerisesti. Jaetaan integroimisväli kahteen yhtäsuureen osaan.

   (a) Laske ensin askelpituus Δx ja jakovälin pisteet x_0, x_1 ja x_2. Arvioi sitten integraalia käyttäen
   Ratkaisu: $\Delta x = 0{,}5$; $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}5$; $x_1 = 1$

   (b) suorakaidesääntöä, Ratkaisu: $\int_0^1 f(x)dx \approx 0{,}255$

   (c) puolisuunnikassääntöä. Ratkaisu: $\int_0^1 f(x)dx \approx 0{,}339$

   (d) Laske myös todellinen arvo integraalille, kun tiedetään, että yleisesti $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, missä $F(x) = -\frac{1}{5}\left[\sin(2x) + 2\cos(2x)\right] e^{-x}$ on ns. f:n integraalifunktio. Kumpi kohdissa b) - c) käytetyistä arviointimenetelmistä on tämän perusteella parempi? Ratkaisu: $\int_0^1 f(x)dx \approx 0{,}394$

8. Luennolla tarkasteltiin kahta eri keinoa arvioida funktion $f(x) = \sin x$ määrättyä integraalia: suorakaidesääntöä ja puolisuunnikassääntöä. Löydät tiedoston luentomuistiinpanojen kansiosta nimellä "Numeerista_integrointia.xlsx". Tarkastellaan tässä tehtävässä vielä yhtä yleisesti käytettyä menetelmää, Simpsonin sääntöä. Lisää tiedostoon uusi sarake. Anna sarakkeen otsikoksi "Simpsonin sääntö"ja laske siinä arvio integraalille käyttäen kaavaa

$$\begin{cases} I_0 &= 0, \\ I_n &= I_{n-2} + \frac{f(x_n)+4f(x_{n-1})+f(x_{n-2})}{3}\Delta x, \qquad n = 2, 3, \ldots, N. \end{cases}$$

   Tässä on tehtävä pari tärkeää huomiota. Ensiksikin jakovälien määrän N on oltava parillinen. Toisekseen tämä kaava antaa oikean tuloksen vain parillisille indekseille n. Siis $I_0, I_2, I_4, \ldots, I_N$ ovat oikein, kun taas $I_1, I_3, I_5, \ldots I_{N-1}$ voivat olla mitä sattuu.

   Aseta välin päätepisteiksi $a = -1$ ja $b = 3$ sekä jakovälien määräksi $N = 10$. Paljonko on Simpsonin säännöllä laskettuna $\int_{-1}^3 f(x)dx$? Mikä arvioista näyttäisi olevan paras? Ratkaisu: $\int_{-1}^3 f(x)dx \approx 1{,}531$

4.4 derivointia

9. Derivoi muuttujan x suhteen

   (a) -15, Ratkaisu: 0

   (b) x^{15}, Ratkaisu: $15x^{14}$

   (c) $\sqrt[3]{x}$, Ratkaisu: $\frac{1}{3}x^{-2/3}$

   (d) e^{-9x}, Ratkaisu: $-9e^{-9x}$

   (e) $\ln(x/2)$, Ratkaisu: $\frac{1}{x}$

   (f) $\sin(115x)$, Ratkaisu: $115\cos(115x)$

   (g) $\cos\left(\frac{3}{2}x\right)$. Ratkaisu: $-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$

   Huomaa kohdassa e), että annoin luennolla väärän säännön logaritmin derivoimiseen. Oikeastihan siis tietenkin $\frac{d}{dx}\ln(ax) = \frac{1}{x}$. Tämä virhe on korjattu luentomuistiinpanoihin.

10. Laske $f'(x)$, kun

    (a) $f(x) = 4x^5 - 3x + 1$, Ratkaisu: $f'(x) = 20x^4 - 3$

    (b) $f(x) = 3\sin(2x) - 7e^{-x}$, Ratkaisu: $f'(x) = 6\cos(2x) + 7e^{-x}$

    (c) $f(x) = \frac{\ln x}{2} + 5\sqrt{x}$. Ratkaisu: $\frac{1}{2x} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$

11. Laske

    (a) $\frac{d}{dx}[x\cos x]$, Ratkaisu: $\cos x - x\sin x$

    (b) $\frac{d}{dx}\left[5x^2\ln x\right]$, Ratkaisu: $10x\ln x + 5x$

    (c) $\frac{d}{dx}[\sqrt{x}(\sin x + 1)]$. Ratkaisu: $\frac{\sin x+1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos x$

4.5 lisää derivointia, ääriarvo, Newton

12. Derivoi muuttujan x suhteen

    (a) $\frac{\sin x}{x}$, Ratkaisu: $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

    (b) $\frac{e^{2x}-1}{3x^5-1}$, Ratkaisu: $\frac{2e^{2x}(3x^5-1)-15(e^{2x}-1)x^4}{(3x^5-1)^2}$

    (c) e^{x^2}, Ratkaisu: $2xe^{x^2}$

    (d) $\ln(\sin x+2)$, Ratkaisu: $\frac{\cos x}{\sin x+2}$

    (e) $\sin^4 x$. Ratkaisu: $4\cos x\sin^3 x$

13. Uima-altaan tilavuuden tulee olla 256 kuutiometriä. Altaan pohja on neliön muotoinen ja seinät pystysuorat. Suunnittele altaan mitoitus niin, että kaakelia kuluu mahdollisimman vähän, kun seinät ja pohja kaakeloidaan. Toisin sanoen minimoi seinien ja pohjan yhteenlaskettu pinta-ala. Ratkaisu: Altaan pohjan sivun pituus on oltava 8 metriä ja altaan korkeus 4 metriä.

14. Yhtälöllä $x = e^{-x}$ on yksi reaalinen ratkaisu. Arvioidaan tätä Newtonin menetelmällä. Lähtien liikkeelle arvauksesta $x_0 = 0$, laske x_1, x_2, x_3 ja x_4. Ratkaisu: $x_1 = 0{,}5$; $x_2 \approx 0{,}566311$; $x_3 \approx 0{,}567143$; $x_4 \approx 0{,}567143$.

4.6 integraalifunktio

15. Osoita, että $F(x) = x^5 - \cos x + 13$ on funktion $f(x) = 5x^4 + \sin x$ eräs integraalifunktio. Ratkaisu: Laske $F'(x)$ ja totea, että $F'(x) = f(x)$.

16. Integroi

    (a) -15, Ratkaisu: $-15x + C$

    (b) x^{15}, Ratkaisu: $\frac{x^{16}}{16} + C$

    (c) $\frac{1}{x}$, Ratkaisu: $\ln|x| + C$

    (d) $\sqrt{x}$, Ratkaisu: $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$

    (e) e^{-9x}, Ratkaisu: $-\frac{1}{9}e^{-9x} + C$

    (f) $\ln(x/2)$, Ratkaisu: $x\ln(x/2) - x + C$

    (g) $\sin(115x)$, Ratkaisu: $-\frac{\cos(115x)}{115} + C$

    (h) $\cos\left(\frac{3}{2}x\right)$. Ratkaisu: $\frac{2}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + C$.

17. Laske $\int f(x)dx$, kun

    (a) $f(x) = 4x^5 - 3x + 1$, Ratkaisu: $\int f(x)dx = \frac{2}{3}x^6 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$

    (b) $f(x) = 3\sin(2x) - 7e^{-x}$, Ratkaisu: $\int f(x)dx = -\frac{3}{2}\cos(2x) + 7e^{-x} + C$

    (c) $f(x) = \frac{\ln x}{2} + 5\sqrt{x}$. Ratkaisu: $\int f(x)dx = \frac{x\ln x - x}{2} + \frac{10}{3}x^{3/2} + C$

4.7 määrätty integraali

18. Laske

(a) $\int_0^2 x^3 dx$ Ratkaisu: 4

(b) $\int_{-2}^3 (4x+3x^2)dx$ Ratkaisu: 45

(c) $\int_0^{2\pi} \sin s\, ds$ Ratkaisu: 0

(d) $\int_{-1}^0 \frac{e^x}{2}dx$ Ratkaisu: $\frac{1}{2}(1-e^{-1})$

(e) $\int_1^5 (\frac{5}{t}-\ln t)dt$ Ratkaisu: 4

4.8 Kaavoja, derivointi ja integrointi

Derivointi	**Integrointi**
$Dx^n = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$De^x = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$Db^x = b^x \ln(b)$	$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln(b)}$
$D\ln(x) = \frac{1}{x}$	
$D\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$D\log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$	
$D\log_a\lvert x\rvert = \frac{1}{x\ln(a)}$	
$D\sin(x) = \cos(x)$	$\int \cos(x)dx = \sin(x)+C$
$D\cos(x) = -\sin(x)$	$\int \sin(x)dx = -\cos(x)+C$
$D\tan(x) = 1+\tan^2(x)$	$\int 1+\tan^2(x)dx = \tan(x)+C$
$Dx\ln(x)-x = \ln(x)$	$\int \ln(x)dx = x\ln(x)-x+C$
$D\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)+C$
$D\arccos(x) = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} = \arccos(x)+C$
$D\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)+C$
$D\sinh(x) = \cosh(x)$	
$D\cosh(x) = \sinh(x)$	
$D\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	

Derivointi	**Integrointi**
$Df(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$	$\int f(g(x))g'(x)dx = f(g(x))+C$
Erikoistapauksia	
$D\ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(f(x))+C$
$De^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x)$	$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}+C$
$Dfg = f'g+fg'$	$\int f'g dx = fg - \int fg' dx$
$D(f/g) = (gf'-fg')/g^2$	

5 Sov: fysiikka (2.5op)

5.1 SI-yksiköt

1. Kirjoita käyttäen SI-yksiköitä:
   (a) 3 in, Ratkaisu: 0,0762 m
   (b) 1,4 lbs, Ratkaisu: 0,635 kg
   (c) 2,7 min, Ratkaisu: 162 s
   (d) 19,3 $\mathrm{g/cm^3}$, Ratkaisu: 19300 $\mathrm{kg/m^3}$
   (e) 5 km/h, Ratkaisu: 1,39 m/s
   (f) 327 kuutiotuumaa, Ratkaisu: 0,00536 $\mathrm{m^3}$
   (g) 10 leiviskää per jumpru. Ratkaisu: $1{,}04 \cdot 10^6\ \mathrm{kg/m^3}$
2. Muunna
   (a) 30 nm metreiksi, Ratkaisu: $3 \cdot 10^{-8}$ m
   (b) 150 μg milligrammoiksi, Ratkaisu: 0,15 mg
   (c) 20 cm/ns metreiksi sekunnissa. Ratkaisu: $2 \cdot 10^8$ m/s
3. Ilmaise lyhyemmin käyttäen sekä etuliitteitä että tieteellistä merkintätapaa (kymmenen potensseja):
   (a) 125000 m, Ratkaisu: $1{,}25 \cdot 10^5$ m = 0,125 Mm = 125 km (
   (b) 0,0000015 s. Ratkaisu: $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ s = 1,5 μs
4. Jos mittaustulokseksi on annettu
   (a) 34 mm ± 2 mm, Ratkaisu: 32 mm - 36 mm
   (b) 15,14 m/s ± 2%, Ratkaisu: 14,84 m/s - 15,44 m/s
   (c) 4,367(5) Ω, Ratkaisu: 4,362 Ω - 4,372 Ω
   (d) 7,4 W, Ratkaisu: 7,35 W - 7,45 W

   miltä väliltä voit odottaa todellisen arvon löytyvän?

5.2 merkitsevät numerot

5. Oletetaan, että sinulla on suorakulmion mallinen metallilevy. Mittaat sen pituudeksi viivoittimella 12 mm ja leveydeksi mikrometriruuvilla 5,98 mm. Huomaa, että mittaustulosten epätarkkuudet on nyt ilmaistu merkitsevien numeroiden avulla. Laske ja ilmaise vastaukset seuraaviin kysymyksiin oikealla tarkkuudella.
   (a) Mikä on suorakulmion pinta-ala? Ratkaisu: 72 $\mathrm{mm^2}$
   (b) Mikä on suorakulmion piiri eli kaikkien sivujen summa? Ratkaisu: 36 mm
   (c) Mikä on pituuden ja leveyden suhde? Ratkaisu: 2,0
   (d) Mikä on pituuden ja leveyden erotus? Ratkaisu: 6 mm
6. Vastuksen resistanssia R mitattaessa saatiin seuraavat tulokset:

   473 Ω, 468 Ω, 469 Ω, 471 Ω, 475 Ω, 469 Ω.

   Laske arvio $\overline{R}$ todelliselle resistanssille. Ilmaise tulos oikealla tarkkuudella. Ratkaisu: 471 Ω.
7. Kirjassa mainitaan, että yksi tapa arvioida mittausvirhettä on laskea datajoukon vaihteluvälin pituuden puolikas. Siis yleiselle suureelle x

   $\Delta x \approx \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$,

   missä $x_{\max}$ on suurin mitattu arvo ja $x_{\min}$ pienin mitattu arvo.

   Laske tätä menetelmää käyttäen edellisen tehtävän vastusmittausten virhe ΔR. Ratkaisu: 3,5 Ω.

   Huom. Näin laskemalla saadaan virheelle yleensä liian suuri arvo. Luennolla esitellään hieman parempi tapa.

5.3 liikelaskuja

8. Pyöräilijä ajaa suoralla tiellä. Minuutin ajan sen keskinopeus on 8,5 m/s. Kuinka pitkän matkan pyöräilijä tuona aikana etenee?

9. Orava juoksee ensin suoraan 20 metrin matkan 5 sekunnissa. Sitten se pysähtyy, kääntyy ympäri ja juoksee 10 metriä takaisin 3 sekunnissa.

   (a) Mikä on oravan keskinopeus? Ratkaisu: 1,25m/s

   (b) Mikä on oravan keskivauhti? Ratkaisu: 3,75m/s

10. Kappaleen paikka ajan funktiona on $x(t) = 10t - 2t^2$. Tässä paikka on ilmaistu metreissä ja aika sekunneissa.

    (a) Mikä on kappaleen paikka ajanhetkellä $t = 1$? Ratkaisu: $x(1) = 8$

    (b) Millä kahdella ajanhetkellä kappale on origossa? Ratkaisu: $t = 0$ ja $t = 5$

    (c) Mikä on kappaleen keskinopeus ajanhetkien $t = 1$ ja $t = 3$ välillä? Ratkaisu: 2

    (d) Laske kappaleen hetkellinen nopeus $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$. Käytä matematiikan puolella opittuja derivoimissääntöjä. Ratkaisu: $x'(t) = 10 - 4t$

    (e) Laske kappaleen hetkellinen kiihtyvyys $a(t) = \frac{dv}{dt}(t)$. Käytä jälleen matematiikan puolella opittuja derivoimissääntöjä. Ratkaisu: $x''(t) = 10$

11. Sadan metrin pikajuoksussa juoksija lähtee liikkeelle levosta ja kiihdyttää ensin vakiokiihtyvyydellä 2 sekunnin ajan kunnes hänen nopeutensa on 10 m/s. Loput matkasta hän juoksee tällä saavuttamallaan vakionopeudella.

    (a) Mikä on juoksijan kiihtyvyys ensimmäisen kahden sekunnin aikana? Ratkaisu: $5\text{m}/s^2$

    (b) Mikä on juoksijan keskinopeus kiihdytysvaiheen aikana? Ratkaisu: 5m/s

    (c) Kuinka pitkän matkan juoksija etenee kiihdytysvaiheen aikana? Ratkaisu: 10m

    (d) Mikä on juoksijan aika maalissa? Ratkaisu: 11s

5.4 vino heittoliike

12. Ammutaan tykillä tasaisella maalla maanpinnan tasolta 60° kulmaan alkunopeudella 100 m/s. Unohdetaan ilmanvastus. Voit käyttää putoamiskiihtyvyydelle arvoa $g = 10\,\text{m/s}^2$.

    (a) Mitkä ovat alussa nopeuden vaaka- ja pystysuorat komponentit v_{0x} ja v_{0y}? Ratkaisu: $v_{0x} = 50\,\text{m/s}$; $v_{0y} \approx 86{,}60\,\text{m/s}$

    (b) Kauanko kestää, että ammus on saavuttanut maksimikorkeutensa? Ratkaisu: 8,66 s

    (c) Mikä on ammuksen maksimikorkeus? Ratkaisu: 375 m

    (d) Kuinka pitkälle ammus lentää? Ratkaisu: 866 m

Vihje. Vaakasuunnassa tasainen liike $\begin{cases} v_x(t) &= v_{0x} \\ x(t) &= v_{0x}t \end{cases}$

Pystysuunnassa tasaisesti kiihtyvä liike $\begin{cases} v_y(t) &= v_0 - gt \\ y(t) &= y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

Luennolla mainitut kaavat

(a) $v_{0x} = v_0 \cos(\alpha)$, $v_{0y} = v_0 \sin(\alpha)$

(b) ehdosta $v_y(t) = 0$ saadaan $t_{\text{LAKI}} = \frac{v_{0y}}{g}$

(c) sijoita t_{LAKI} korkeuden $y(t)$ kaavaan

(d) sijoita $t_{\text{LAKI}} = 2t_{\text{LAKI}}$ matkan $x(t)$ kaavaan

13. Kappaleeseen, jonka massa on $m = 2\,\mathrm{kg}$, kohdistuu kaksi voimaa, $\mathbf{F}_1 = 3\,\mathrm{N}\hat{\mathbf{i}} - 10\,\mathrm{N}\hat{\mathbf{j}}$ ja $\mathbf{F}_2 = -1\,\mathrm{N}\hat{\mathbf{i}} + 6\,\mathrm{N}\hat{\mathbf{j}}$. Mikä on kappaleen kiihtyvyys? Ratkaisu: $\mathbf{a} = 1\,\mathrm{m/s^2}\hat{\mathbf{i}} - 2\,\mathrm{m/s^2}\hat{\mathbf{j}}$

14. Kappaleeseen (massa $100\,\mathrm{kg}$) kohdistuu vakiovoima, jonka suuruus on $50\,\mathrm{N}$. Oletetaan, että kappale lähtee liikkeelle levosta. Kuinka kauan kestää, että kappale on liikkunut 25 metrin matkan? Mikä on tuolloin kappaleen nopeus? Ratkaisu: $10\,\mathrm{s}$; $5\,\mathrm{m/s}$

5.5 voima

15. Laatikko, jonka massa on $40\,\mathrm{kg}$, liukuu jäällä. Kun sille annetaan alkunopeus $10\,\mathrm{m/s}$, se pysähtyy tasaisesti hidastuen kitkan vaikutuksesta viidessä sekunnissa. Kuinka suuri kitkavoima laatikkoon vaikuttaa? Entä mikä on laatikon ja jään välinen liikekitkakerroin? Käytä putoamiskiihtyvyydelle arvoa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Ratkaisu: $F_\mu^k = 80\,\mathrm{N}$, $\mu_k = 0{,}2$.

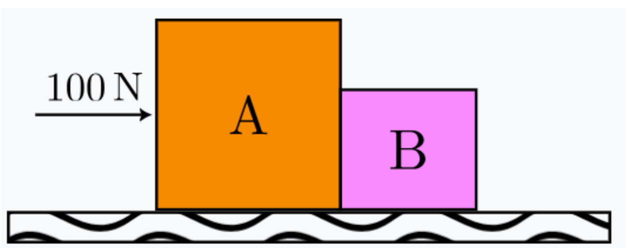
16. Putoamiskiihtyvyyden g suuruus Maassa on $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ ja Kuussa $1{,}62\,\mathrm{m/s^2}$. Oletetaan, että golfpallon paino Maassa on $0{,}441\,\mathrm{N}$.

    (a) Mikä on golfpallon massa Maassa? Ratkaisu: $45{,}0\,\mathrm{g}$

    (b) Mikä on golfpallon massa Kuussa? Ratkaisu: $45{,}0\,\mathrm{g}$

    (c) Mikä on golfpallon paino Kuussa? Ratkaisu: $0{,}0728\,\mathrm{N}$

17. Kaksi laatikkoa makaa vieri vieressä vaakasuoralla kitkattomalla pinnalla. Laatikkoon A kohdistetaan 100 N:n pinnan suuntainen ulkoinen voima oheisen kuvan mukaisesti:



    Laatikon A massa on $m_A = 20\,\mathrm{kg}$ ja laatikon B puolestaan $m_B = 5\,\mathrm{kg}$. Kuinka suuren voiman laatikko A kohdistaa laatikkoon B? Mikä on laatikoiden kiihtyvyys? Ratkaisu: $F_{A\to B} = 20\,\mathrm{N}$, $a = 4\,\mathrm{m/s^2}$

5.6 Kaavoja, soveltava fysiikka

Yksikkömuunnokset

- 1 tuuma = 2.54cm
- 1 pauna = 1 lbs = 453.6 g

Newtonin lait

1. $F_{\text{kokonais}} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \text{vakio}$
2. $F_{\text{kokonais}} = ma$
3. $F_1 = -F_2$

Vino heittoliike

Vaakasuunnassa tasainen liike

$$\begin{cases} a_x(t) = x''(t) & = 0 \\ v_x(t) = x'(t) & = v_{0x} \\ x(t) & = v_{0x}t \end{cases}$$

Pystysuunnassa tasaisesti kiihtyvä liike

$$\begin{cases} a_y(t) = y''(t) & = -g \\ v_y(t) = y'(t) & = v_{0y} - gt \\ y(t) & = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Voimia

- kitka $F_\mu = \mu N$
- paino $G = mg$, missä $g = 9.81m/s^2$

6 Difyhtälöt ja Fourier (2.5op)

Soveltava matematiikka ja fysiikka ohjelmoinnissa
Soveltava matematiikka ohjelmoinnissa, harjoitukset 2023
Tekijät: Ilpo Virtanen, Sami Laine, Calculus volume 2

6.1 Derivoinnin kertausta

1. Laske derivaatat
   (a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 + 3$
   (b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 + x$
   (c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(2x)$
   (d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{3x}$
   (e) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(4x)$
   (f) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x)$
2. Usein funktion lauseketta kannattaa muokata ennen derivointia. Laske derivaatat.
   (a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{1/2}$
   (b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}4^x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x\ln(4)}$
   (c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(2x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(2) + \ln(x)$
   (d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_2(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\ln(2)}\ln(x)$
   (e) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x\ln(x)}$
3. Tulon derivointikaava on $(fg)' = f'g + fg'$. Laske derivaatat
   (a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3\sin(2x)$
   (b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(4x)e^{3x}$
   (c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\ln(x) - x$
   (d) $\sin(x)e^{-x}$
4. Osamäärän derivointikaava on $(f/g)' = (gf' - fg')/g^2$. Laske derivaatat
   (a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin(x)}{x}$
   (b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
   (c) $\frac{\sin(x)}{e^x}$
5. Yhdistetyn funktion derivointikaava $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$. Laske derivaatat
   (a) $\sin(x^2)$
   (b) $\sin(1/x)$
   (c) e^{x^2}
   (d) $e^{\sin(x)}$
6. Käänteisfunktion derivointikaava on
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$
   Laske sinin käänteisfunktion derivaatta.

6.2 Integroinnin kertausta

7. Integrointi on derivoinnin käänteisoperaatio. Koska $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 = 3x^2$, niin $\int 3x^2 \mathrm{d}x = x^3 + C$, missä C on vakio. Integroi
   (a) $\int \cos(x)\mathrm{d}x$
   (b) $\int -\sin(x)\mathrm{d}x$
   (c) $\int \sin(x)\mathrm{d}x$

8. Potenssin integrointikaava on $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$. Integroi
   (a) $\int x^3 \mathrm{d}x$
   (b) $\int x^{1/2} \mathrm{d}x$

9. Funktion potenssin integrointikaava $\int f'(x)f(x)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}f(x)^{n+1} + C$. Integroi
   (a) $\int \cos(x)(\sin(x))^3 \mathrm{d}x$
   (b) $\int \cos(2x)(\sin(2x))^3 \mathrm{d}x$

10. Käänteisluvun integrointikaava $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(x) + C$. Integroi $\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x$.

11. Funktion käänteisluvun integrointikaava $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln(f(x)) + C$. Integroi
   (a) $\int \frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x$
   (b) $\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$
   (c) $\int \tan(x)\mathrm{d}x$. (Kirjoita tangentti sinin ja kosinin avulla.)

6.3 Differentiaaliyhtälöt

12. Määritä seuraavien differentiaaliyhtälöiden kertaluku
   (a) $y' + y = 4y^2$
   (b) $(y')^2 = y' + 2y$
   (c) $y''' + y''y' = 3x^2$
   (d) $y' = y'' + 3t^2$
   (e) $\frac{dy}{dt} = t$
   (f) $\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = 3x^4$
   (g) $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 8\frac{dy}{dt} + 3y = 4t$

13. Osoita, että alla olevat funktiot y ovat ratkaisuja vastaaviin differentiaaliyhtälöihin
   (a) Osoita, että $y = x^3/3$ ratkaisee yhtälön $y' = x^2$.
   (b) Osoita, että $y = 2e^{-x} + x - 1$ ratkaisee yhtälön $y' = x - y$.
   (c) Osoita, että $y = e^{3x} - e^x/2$ ratkaisee yhtälön $y' = 3y + e^x$.
   (d) Osoita, että $y = \frac{1}{1-x}$ ratkaisee yhtälön $y' = y^2$.
   (e) Osoita, että $y = e^{x^2/2}$ ratkaisee yhtälön $y' = xy$.
   (f) Osoita, että $y = 4 + \ln(x)$ ratkaisee yhtälön $xy' = 1$.
   (g) Osoita, että $y = 3 - x + x\ln(x)$ ratkaisee yhtälön $y' = \ln(x)$.
   (h) Osoita, että $y = e^x + \frac{\sin(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}$ ratkaisee yhtälön $y' = \cos(x) + y$.
   (i) Osoita, että $y = \pi e^{-\cos(x)}$ ratkaisee yhtälön $y' = y\sin(x)$.

14. Differentiaaliyhtälön $y' = 4x^2$ yleinen ratkaisu on $y = \frac{4}{3}x^3 + C$, missä C on mikä tahansa vakio. Mikä yksittäisratkaisu kulkee pisteen $(-3, -30)$ kautta (eli toisin sanoen toteuttaa $x = -3$, $y = -30$)?

15. Differentiaaliyhtälön $y' = (2xy)^2$ yleinen ratkaisu on $y = -\frac{3}{C+4x^3}$. Mikä yksittäisratkaisu kulkee pisteen $(1, -0.5)$ kautta?

16. Määritä yleinen ratkaisu seuraaville differentiaaliyhtälöille

    (a) $y' = 3x + e^x$
    (b) $y' = \ln(x) + \tan(x)$
    (c) $y' = \sin(x)e^{\cos(x)}$
    (d) $y' = 4^x$
    (e) $y' = 2t\sqrt{t^2 + 16}$
    (f) $y' = y$
    (g) $y' = \frac{y}{x}$

17. Ratkaise alkuarvo-ongelmat

    (a) $y' = 5x$, $y(0) = 1$
    (b) $y' = \frac{3\sin(x)}{y}$, $y(\pi) = 4$
    (c) $y^2y' = e^{-x}$, $y(0) = 0$

18. Ovatko seuraavat differentiaaliyhtälöt lineaarisia?

    (a) $y' + 3y = \sin(x)$
    (b) $y' + x^2y = 0$
    (c) $y' + xy^2 = 0$
    (d) $\sin(y') + 3y = 3x$

19. Ratkaise homogeeniset yhtälöt

    (a) $y' + 7y = 0$
    (b) $y' + \cos(x)y = 0$
    (c) $xy' + 3x^2y = 0$ alkuehdolla $y(0) = 2$

20. Ratkaise seuraavat ei-homogeeniset yhtälöt

    (a) $y' - 5y = 2$
    (b) $y' + 2y = 5e^{-x}$ alkuehdolla $y(0) = 1$

21. Ratkaise numeerisesti Pythonin Scipy-kirjastolla ja analyyttisesti Pythonin Sympy-kirjastolla alla olevat yhtälöt. Käytä alkuehtoa $y(0) = 2$ numeerisessa ratkaisussa. Piirrä numeeristen ja analyyttisten ratkaisujen kuvaajat. (Analyyttisten ratkaisujen kuvaajien piirtämisessä on myös käytettävä samaa alkuehtoa.)

    (a) $y' + 7y = 0$
    (b) $y' + \cos(x)y = 0$
    (c) $xy' + 3x^2y = 0$

6.4 Fourier-sarjat

22. Mikä on siniaallon $\frac{3}{2}\sin(7t-1)$
    (a) amplitudi
    (b) kulmataajuus
    (c) vaihe
    (d) jaksonaika

23. Ilmaise funktio $5\sin(2t)+2\cos(2t)$ yhden siniaallon avulla, siis muodossa $A\sin(\omega t+\phi)$

    Ratkaisu: Vektorien avulla

    $$5\sin(2t)+2\cos(2t)=(5,2)\cdot(\sin(2t),\cos(2t)).$$

    Ilmaistaan $(x,y)=(5,2)$ napakoordinaateissa

    $$(x,y)=r(\cos(\alpha),\sin(\alpha)),$$

    missä $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ja $\alpha=\arctan(y/x)$. Saadaan $r=\sqrt{29}$ ja $\alpha=\arctan(2/5)\frac{180^\circ}{\pi}=21.8^\circ$. Siis

    $$(5,2)=\sqrt{29}(\cos(21.8^\circ),\sin(21.8^\circ)).$$

    Siis

    $$5\sin(2t)+2\cos(2t)=\sqrt{29}(\sin(2t)\cos(21.8^\circ)+\cos(2t)\sin(21.8^\circ))=\sqrt{29}\sin(2t+21.8^\circ).$$

    Siis laskussa auttavat kaavat $A=\sqrt{x^2+y^2}$ ja $\phi=\arctan(y/x)$.

24. Ilmaise funktio $6\sin(4t+\pi/3)$ sinin ja kosinin summana, siis muodossa $C\sin(\omega t)+D\cos(\omega t)$.

25. Tarkastellaan kanttiaaltoa $g(t)$, jonka amplitudi on 3 ja jaksonaika $T=2$. Kun siis $0\le t\le 2$, on funktio määritelty paloittain, kuten

    $$g(t)=\begin{cases}3, & \text{jos } 0\le t\le 1,\\ 0, & \text{jos } 1\le t\le 2\end{cases}$$

    ja tämän aikavälin ulkopuolella funktio toistaa itseään jaksollisesti. Laske tämän funktion Fourier-kertoimet a_0, a_n ja b_n.

26. Määritä funktion

    $$f(t)=\begin{cases}1, & \text{jos } 0\le x\le \pi\\ -1, & \text{jos } -\pi\le x\le 0\end{cases}$$

    Fourier-sarja.

27. Kirjoita Python-ohjelma, jolla poistetaan kohina kahden sinifunktion summana määritellystä aallosta. Voit käyttää esimerkiksi aaltoa

```
noisy_signal = np.sin(a)+np.sin(3*a-1)+10*np.random.rand(len(a))
```

28. Tee mittaussarja kiihtyvyydestä, kun kävelet noin minuutin ajan ja suorita seuraavat laskutoimitukset.
    (a) Määritä eniten tehoa sisältävä taajuus laskemalla tehospektri.
    (b) Suodata pois kaikki muut taajuudet.
    (c) Suodata pois kaikki suuremmat taajuudet.
    (d) Suodata pois kaikki pienemmät taajuudet.

7 Applied mathematics ... in programming (2.5op)

Authors 2023: Ilpo Virtanen, Sami Laine, Calculus volume 2 (2023)
Updated in 2024 by: Juha-Matti Huusko

Rules for differentiation and integration were discussed in the course "Calculus and Physics in Data Analysis ID00CS42-3003". Let's recall them.

7.1 Recall differentiation

1. Differentiate
   (a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2+3$ Ratkaisu: $2x$
   (b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3+x$ Ratkaisu: $3x^2+1$
   (c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(2x)$ Ratkaisu: $2\cos(2x)$
   (d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{3x}$ Ratkaisu: $3e^{3x}$
   (e) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(4x)$ Ratkaisu: $-4\sin(4x)$
   (f) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x)$ Ratkaisu: $\frac{1}{x}$
2. Often, it is smart to modify the expression of the function before differentiation. Differentiate
   (a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{1/2}$ Ratkaisu: $\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
   (b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}4^x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x\ln(4)}$ Ratkaisu: $\ln(4)e^{x\ln(4)}=\ln(4)4^x$
   (c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(2x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(2)+\ln(x)$ Ratkaisu: $\frac{1}{x}$
   (d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_2(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\ln(2)}\ln(x)$ Ratkaisu: $\frac{1}{x\ln(2)}$
   (e) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x\ln(x)}$ Ratkaisu: $e^{\ln(x)}(\ln(x)+1)$, that is, $x^x(\ln(x)+1)$
3. A product is differentiated by the rule $(fg)'=f'g+fg'$. Differentiate
   (a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3\sin(2x)$ Ratkaisu: $3x^2\cdot\sin(2x)+x^3\cdot 2\cos(2x)$
   (b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(4x)e^{3x}$ Ratkaisu: $-4\sin(4x)\cdot e^{3x}+\cos(4x)\cdot 3e^{3x}$
   (c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\ln(x)-x$ Ratkaisu: $\ln(x)$
   (d) $\sin(x)e^{-x}$ Ratkaisu: $\cos(x)\cdot e^{-x}+\sin(x)\cdot(-1)e^{-x}$
4. A quotient is differentiated by the rule $(f/g)'=(gf'-fg')/g^2$. Differentiate
   (a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin(x)}{x}$ Ratkaisu: $\frac{x\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot 1}{x^2}$
   (b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ Ratkaisu: $\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)=\sec^2(x)$
   (c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin(x)}{e^x}$ Ratkaisu: $\frac{e^x\cos(x)-\sin(x)e^x}{e^{2x}}=\frac{\cos(x)-\sin(x)}{e^x}$
5. A composed function can be differentiated by the rule $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x)))=f'(g(x))g'(x)$. Differentiate
   (a) $\sin(x^2)$ Ratkaisu: $2x\cos(x^2)$
   (b) $\sin(1/x)$ Ratkaisu: $-\frac{1}{x^2}\cos(1/x)$
   (c) e^{x^2} Ratkaisu: $2xe^{x^2}$
   (d) $e^{\sin(x)}$ Ratkaisu: $e^{\sin(x)}\cos(x)$
6. An inverse function can be differentiated by the rule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Differentiate $\arcsin(x)$ Ratkaisu: Denote $f(x) = \sin(x)$ which implies $f'(x) = \cos(x)$ and $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$. By the given formula, we obtain

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

In the denominator, we have composed cos and arcsin and it looks complicated. However, we can express $\cos(x) = \sqrt{1 - (\sin(x))^2}$. Therefore

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

7.2 Recall integration

7. Integration is the inverse operation to differentiation. Because $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 = 3x^2$, we have $\int 3x^2 \mathrm{d}x = x^3 + C$, where C is a constant. Integrate

   (a) $\int \cos(x)\mathrm{d}x$ Ratkaisu: $\sin(x) + C$

   (b) $\int -\sin(x)\mathrm{d}x$ Ratkaisu: $\cos(x) + C$

   (c) $\int \sin(x)\mathrm{d}x$ Ratkaisu: $-\cos(x) + C$

8. A monomial can be integraded by the rule $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$. Integrate

   (a) $\int x^3 \mathrm{d}x$ Ratkaisu: $\frac{1}{4}x^4 + C$

   (b) $\int x^{1/2} \mathrm{d}x$ Ratkaisu: $\frac{1}{(3/2)}x^{3/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

9. A power of a function can be integrated by the rule $\int f'(x)f(x)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}f(x)^{n+1} + C$. Integrate

   (a) $\int \cos(x)(\sin(x))^3 \mathrm{d}x$ Ratkaisu: $\frac{1}{4}(\sin(x))^4 + C$

   (b) $\int \cos(2x)(\sin(2x))^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{8}(\sin(2x))^4 + C$

10. Recall $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(x) + C$. Integrate $\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x$. Ratkaisu: $2\ln(x) + C$

11. Recall that $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln(f(x)) + C$. Integrate

   (a) $\int \frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x$ Ratkaisu: $\frac{1}{3}\ln(3x+1) + C$

   (b) $\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ Ratkaisu: $\ln(1+x^2) + C$

   (c) $\int \tan(x)\mathrm{d}x$. (Express the tangent in terms of sine and cosine.) Ratkaisu: $-\ln(\cos(x)) + C$

7.3 Basics of differential equations

Ratkaisu: Topics

- order
- showing that a given function is a solution by substituting
- finding the value of the constant C

Basics of differential equations are discussed in the videos “week1video1.mov” and “week1video2.mov”, which can be found from the OneDrive folder.

Let’s study a function $y(x)$. To make the notation easier, we often write just y instead of $y(x)$. (Sometimes the variable can be t or some other variable.)

If we differentiate y, we obtain the first derivative y'. If we differentiate again, we obtain the second derivative y''.

An ordinary differential equation (an ODE) is an equation in terms of y and its derivatives. The order of the differential equation is the largerst order of differentiation.

12. Find the order of the following differential equations [3, 4.1.1]

(a) $y' + y = 4y^2$ Ratkaisu: Function y can be found in three terms. In the first one y' is differentiated once, so its order of differentiation is 1. The second (y) and the third (y^2) are not differentiated, order is 0. The equation is of order 1.

(b) $(y')^2 = y' + 2y$ Ratkaisu: Order is 1.

(c) $y''' + y''y' = 3x^2$ Ratkaisu: The highest derivative is of order 3. The equation has order 3.

(d) $y' = y'' + 3t^2$ Ratkaisu: Order is 2.

(e) $\frac{dy}{dt} = t$ Ratkaisu: This can be written as $y'(t) = t$ or $y' = t$. The order is 1.

(f) $\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = 3x^4$ Ratkaisu: This can be written $y' + y'' = 3x^4$. The order is 2.

(g) $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 8\frac{dy}{dt} + 3y = 4t$ Ratkaisu: This can be written $(y')^2 + 8y' + 3y = 4t$. The order is 1.

13. Show that the functions y are solutions to the corresponding differential equations. [?, 4.1.8–4.1.17] Vihje. It is enough to calculate the derivative and to substitute it to the equation. **(Probably in the Exam, there is a question like one of (a)–(i).)**

(a) Show that $y = x^3/3$ is a particular solution for $y' = x^2$. Ratkaisu: We have $y = x^3/3$. By differentiating, we obtain $y' = 3x^2/3 = x^2$. We see that the equation $y' = x^2$ is satisfied.

(b) Show that $y = 2e^{-x} + x - 1$ is a particular solution for $y' = x - y$.

(c) Show that $y = e^{3x} - e^x/2$ is a particular solution for $y' = 3y + e^x$.

(d) Show that $y = \frac{1}{1-x}$ is a particular solution for $y' = y^2$.

(e) Show that $y = e^{x^2/2}$ is a particular solution for $y' = xy$.

(f) Show that $y = 4 + \ln(x)$ is a particular solution for $xy' = 1$.

(g) Show that $y = 3 - x + x\ln(x)$ is a particular solution for $y' = \ln(x)$.

(h) Show that $y = e^x + \frac{\sin(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}$ is a particular solution for $y' = \cos(x) + y$.

(i) Show that $y = \pi e^{-\cos(x)}$ is a particular solution for $y' = y\sin(x)$.

Ratkaisu: is not available yet. Need 1 hour to write it down nicely.

14. From [3, 4.1.18]. The general solution of $y' = 4x^2$ is $y = \frac{4}{3}x^3 + C$, where C is any constant. Which particular solution passes through the point $(-3, -30)$ (that is, satisfies $x = -3$, $y = -30$)? **(In the exam, there will be one initial value problem. The difficulty is not clear yet.)** Ratkaisu: We have $y(x) = y = \frac{4}{3}x^3 + C$. Set $x = -3$ and $y(-3) = -30$ to obtain

$$-30 = \frac{4}{3}(-3)^3 + C,$$

that is

$$-30 = -36 + C.$$

We have $C = 6$. The desired solution is $y(x) = y = \frac{4}{3}x^3 + 6$.

7.4 Integrable equations

15. From [3, 4.1.22]. The general solution of the differential equation $y' = (2xy)^2$ is $y(x) = -\frac{3}{C+4x^3}$. Which particular solution passes through the point $(1, -0.5)$? Vihje. We have $-0.5 = y(1) = \frac{3}{C+4(1)^3}$. Solve C.

- An integrable diff. equation is of the form $y' = f(x)$ and can be integrated on both sides to obtain $y = \int f(x)dx$. Equations (a)-(e) are integrable.
- A separable diff. equation can be rearranged so that it is integrable. Equations (f)-(g) are separable.

16. From [3, 4.1.28–4.1.37]. Find the general solution for the following ODE's.

    (a) $y' = 3x + e^x$ Ratkaisu: By integrating on both sides, we obtain $y = \int 3x + e^x dx$. The integral of the right hand side is $\int 3x + e^x dx = 3x^2/2 + e^x + C$. The general solution of the equation is therefore $y = 3x^2/2 + e^x + C$.

    (b) $y' = \ln(x) + \tan(x)$

    (c) $y' = \sin(x)e^{\cos(x)}$

    (d) $y' = 4^x$

    (e) $y' = 2t\sqrt{t^2 + 16}$

    (f) $y' = y$ Vihje. Dividing by y we obtain $\frac{y'}{y} = 1$ which can be integrated on both sides. Ratkaisu: We obtained $\frac{y'(x)}{y(x)} = 1$. By integrating we obtain $\ln(y(x) = x + C$. By taking the exponential on both sides, we obtain $e^{\ln(y(x))} = e^{x+C} = e^C e^x$. Because the exponential and logarithm are inverse functions, they cancel out, and we obtain $y(x) = e^C e^x$. Here e^C is just a constant, write $e^C = A$. We obtain $y(x) = Ae^x$.

    (g) $y' = \frac{y}{x}$ Vihje. Dividing by y, we obtain $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$ which can be integrated on both sides.

7.5 Separable equations

Ratkaisu:

- The diff. equations in the next problem are separable. That is, they can be reorganized and then integrated on both sides. They are called initial value problems, because an initial value is given and can be used to solve the integration constant C.

17. Solve the initial value problems

    (a) $y' = 5x$, $y(0) = 1$ Ratkaisu: General solution of the equation is $y(x) = \frac{5}{2}x + C$. The solution of the initial value problem is $y(x) = \frac{5}{2}x + 1$.

    (b) $y' = \frac{3\sin(x)}{y}$, $y(\pi) = 4$ Ratkaisu: General solution of the equation is $y(x) = \sqrt{C - 6\cos(x)}$, initial condition gives $C = 10$, solution of the initial value problem is $y(x) = \sqrt{10 - 6\cos(x)}$

    (c) $y^2y' = e^{-x}$, $y(0) = 0$ Ratkaisu: General solution of the equation is $y(x) = 3^{1/3}(C - e^{-x})^{1/3}$, initial condition gives $C = 0$, solution of the initial value problem is $y(x) = -3^{1/3}e^{-x/3}$

Ratkaisu:

- A differential equation is linear if y and its derivatives are multiplied with just functions of x. There must not be powers (e.g. $(y')^7$), products (e.g. yy'' or function expressions of y (e.g. $\cos(y')$) or its derivatives.

18. Are the following differential equations linear?

    (a) $y' + 3y = \sin(x)$ Ratkaisu: Yes, the equation is linear.

    (b) $y' + x^2y = 0$ Ratkaisu: Yes, the equation is linear.

    (c) $y' + xy^2 = 0$ Ratkaisu: No, the equation is not linear due to the term xy^2 which has a power of y.

    (d) $\sin(y') + 3y = 3x$ Ratkaisu: No, the equation is not linear, because of $\sin(y')$.

Ratkaisu:

- The next equations are "linear first order homogeneous equations". **Relax.** The equations are also separable, they can be solved by reorganizing and integrating on both sides.

19. Solve the homogeneous equations

    (a) $y' + 7y = 0$ Ratkaisu: Rearranged $y'/y = -7$ yields with integration $\ln(y) = -7x + C$ giving $y(x) = Ae^{-7x}$, where C and A are constant.

    (b) $y' + \cos(x)y = 0$ Ratkaisu: Rearranged $y'/y = -\cos(x)$ yields $y(x) = Ce^{\sin(x)}$

    (c) $xy' + 3x^2y = 0$ with initial condition $y(0) = 2$ Ratkaisu: Dividing by x, we have $y' + 3xy = 0$, rearranged to $y'/y = -3x$. Integrating on both sides, we get finally $y(x) = Ce^{-\frac{3x^2}{2}}$. Solution of the initial value problem is $y(x) = 2e^{-\frac{3x^2}{2}}$

7.6 Solution formula for first order linear equations

Ratkaisu: It is a happy thing that for the equation $y' + p(x)y = q(x)$ there exists a solution formula

$$y(x) = \frac{C}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx, \quad \text{where} \quad \mu = e^{\int p(x)dx}.$$

In case of differential equations, solution formulas are very rare.

Let's discuss this more.

* * *

First order linear differential equation is of the form

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x).$$

By dividing with $a(x)$, we obtain the standard form

$$y'(x) + \underbrace{\frac{b(x)}{a(x)}}_{p(x)} y(x) = \underbrace{\frac{c(x)}{a(x)}}_{q(x)},$$

that is

$$y' + p(x)y = q(x).$$

In the book [3, pp. 411–413] it is explained how this equation can be solved.

(a) Identify $p(x)$ and $q(x)$.

(b) Calculate $\int p(x)dx$. Don't add a constant C yet.

(c) Simplify $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ and $\frac{1}{\mu(x)}$

(d) Calculate $\int \mu(x)q(x)dx$.

(e) The solution is $y(x) = \frac{C}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx$.

Example. Let's solve $y' + 2xy = x$.

1. We have $p(x) = 2x$ and $q(x) = x$.
2. We have $\int p(x)dx = \int 2xdx = x^2$. (We don't add C.)
3. We have $\mu(x) = e^{x^2}$ and $\frac{1}{\mu(x)} = \frac{1}{e^{x^2}} = e^{-x^2}$.
4. We have
$$\int \mu(x)q(x)dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2}.$$
5. The solution is
$$y(x) = \frac{C}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx = Ce^{-x^2} + e^{-x^2}\frac{1}{2}e^{x^2}$$

that is

$$y(x) = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}.$$

20. **Exercise. (Possibly an Exam question.)**

Solve

$$y' + \frac{y}{x} = x^2$$

by following the instructions.

(a) Identify $p(x)$ and $q(x)$. Ratkaisu: $p(x) = \frac{1}{x}$ and $q(x) = x^2$

(b) Calculate $\int p(x)dx$. Don't add a constant C yet. Ratkaisu: $\int p(x)dx = \ln(x)$

(c) Simplify $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ and $\frac{1}{\mu(x)}$ Ratkaisu: $\mu(x) = x$ and $\frac{1}{\mu(x)} = \frac{1}{x}$

(d) Calculate $\int \mu(x)q(x)dx$. Ratkaisu: $\frac{x^4}{4}$

(e) The solution is $y(x) = \frac{C}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx$. Ratkaisu: $y(x) = \frac{C}{x} + \frac{x^3}{4}$

21. **Exercise.** Solve
$$y'(x) + \tan(x)y = (\cos(x))^2.$$

(a) Identify $p(x)$ and $q(x)$. Ratkaisu: $p(x) = \tan(x)$ and $q(x) = (\cos(x))^2$

(b) Calculate $\int p(x)dx$. Don't add a constant C yet. Ratkaisu: In an earlier exercise, it was found that $\int p(x)dx = -\ln(\cos(x)) = \ln \frac{1}{\cos(x)}$

(c) Simplify $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ and $\frac{1}{\mu(x)}$ Ratkaisu: $\mu(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ and $\frac{1}{\mu(x)} = \cos(x)$

(d) Calculate $\int \mu(x)q(x)dx$. Ratkaisu: $\sin(x)$

(e) The solution is $y(x) = \frac{C}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx$. Ratkaisu: $y(x) = C\cos(x) + \cos(x)\sin(x)$

22. **Exercise.** Write $y' = 3y + 2$ in standard form $y' + p(x)y = q(x)$ and solve by same instructions as above. That is, use the solution formula
$$y(x) = \frac{C}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx, \quad \text{where} \quad \mu(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

Ratkaisu: $y = Ce^{3x} - \frac{2}{3}$

23. **Exercise.** Solve $y' = 2y - x^2$. Ratkaisu: $y = Cx^3 + 6x^2$

(a) Identify $p(x)$ and $q(x)$. Ratkaisu: The equation is
$$y' - 2y = -x^2$$
so $p(x) = -2$ and $q(x) = -x^2$

(b) Calculate $\int p(x)dx$. Don't add a constant C yet. Ratkaisu: $\int p(x)dx = -2x$

(c) Simplify $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ and $\frac{1}{\mu(x)}$ Ratkaisu: $\mu(x) = e^{-2x}$ and $\frac{1}{\mu(x)} = e^{2x}$

(d) Calculate $\int \mu(x)q(x)dx$. Ratkaisu: We obtain
$$y(x) = \frac{C}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx = Ce^{2x} + e^{2x} \int e^{-2x}(-x^2)dx.$$
The integral is too difficult for this course and can be left as it is.
For the interested, the integral can be done by integration by parts, which means the formula
$$\int f'gdx = fg - \int fg'dx.$$
We obtain
$$\begin{aligned}
\int e^{-2x}(-x^2)dx &= \frac{-1}{2}e^{-2x}(-x^2) - \int \frac{-1}{2}e^{-2x}(-2x)dx \\
&= \frac{x^2}{2}e^{-2x} - \int e^{-2x}xdx \\
&= \frac{x^2}{2}e^{-2x} - \frac{-1}{2}e^{-2x}x + \int \frac{-1}{2}e^{-2x} \cdot 1dx \\
&= \frac{x^2}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}x + \frac{1}{4}e^{-2x} \\
&= \frac{e^{-2x}}{4}(2x^2 + 2x + 1).
\end{aligned}$$

We obtain

$$y(x) = Ce^{2x} + e^{2x} \cdot \frac{e^{-2x}}{4}(2x^2 + 2x + 1),$$

that is,

$$y(x) = Ce^{2x} + \frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1).$$

Need more exercise? See the course book [3, p. 420, problems 225–232.]

7.7 Basics of Fourier analysis

24. Calculate the partial derivatives
    (a) $\frac{\partial}{\partial x} x^2 t + e^x + 7$
    (b) $\frac{\partial}{\partial t} x^2 t + e^x + 7$
    (c) $\frac{\partial}{\partial x} \sin(2x) + \sin(3t)$
    (d) $\frac{\partial}{\partial t} \sin(2x) \sin(3t)$

25. Show that

$$y(x, t) = \sin(nx) \sin(nct),$$

where n is a natural number, is a solution of the problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} y = c^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} y \\ y(0, t) = 0 \\ y(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

26. For the sine wave $\frac{3}{2} \sin(7t - 1)$, what is the
    (a) amplitude
    (b) angular frequency
    (c) phase
    (d) period

27. Express $6 \sin(4t + \pi/3)$ as the sum of sine and cosine, that is, in the form $C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t)$. Vihje. Remember $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$.

28. Express $5 \sin(2t) + 2 \cos(2t)$ by one sine wave, that is, in the form $A \sin(\omega t + \phi)$

Vihje. By using the vector dot product, we have $5 \sin(2t) + 2 \cos(2t) = (5, 2) \cdot (\sin(2t), \cos(2t))$. Let's express $(x, y) = (5, 2)$ in polar coordinates $(x, y) = r(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\alpha = \arctan(y/x)$.

Ratkaisu: We obtain $r = \sqrt{29}$ and $\alpha = \arctan(2/5) \frac{180^\circ}{\pi} = 21.8^\circ$. Thus

$$(5, 2) = \sqrt{29}(\cos(21.8^\circ), \sin(21.8^\circ)).$$

Therefore

$$5 \sin(2t) + 2 \cos(2t) = \sqrt{29}(\sin(2t) \cos(21.8^\circ) + \cos(2t) \sin(21.8^\circ)) = \sqrt{29} \sin(2t + 21.8^\circ).$$

The result can be obtained directly with the formulas $A = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\phi = \arctan(y/x)$.

29. Solve the following nonhomogeneous equations
    (a) $y' - 5y = 2$
    (b) $y' + 2y = 5e^{-x}$ with initial condition $y(0) = 1$

7.8 Fourier series

Ratkaisu: Fourier series are a method to study e.g. differential equations. Functions $\sin(nx)$ is a solution of

$$y'' + n^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

The equation is related to a vibrating string attached on both ends at 0 and π. These sine functions can be summed to form a Fourier series.

Book [4, pp. 1–39] contains an introduction to Fourier analysis. (Skip the too difficult formulas.)

30. For the sine wave $\frac{3}{2}\sin(7t-1)$, what is the
    (a) amplitude Ratkaisu: $\frac{3}{2}$
    (b) angular frequency Ratkaisu: 7 rad/s
    (c) phase Ratkaisu: -1
    (d) period Ratkaisu: $\frac{2\pi}{7}$

31. Express $5\sin(2t) + 2\cos(2t)$ by one sine wave, that is, in the form $A\sin(\omega t + \phi)$
    Vihje. By using the vector dot product, we have $5\sin(2t) + 2\cos(2t) = (5, 2) \cdot (\sin(2t), \cos(2t))$. Let's express $(x, y) = (5, 2)$ in polar coordinates $(x, y) = r(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\alpha = \arctan(y/x)$.
    Ratkaisu: We obtain $r = \sqrt{29}$ and $\alpha = \arctan(2/5)\frac{180°}{\pi} = 21.8°$. Thus

$$(5, 2) = \sqrt{29}(\cos(21.8°), \sin(21.8°)).$$

Therefore

$$5\sin(2t) + 2\cos(2t) = \sqrt{29}(\sin(2t)\cos(21.8°) + \cos(2t)\sin(21.8°)) = \sqrt{29}\sin(2t + 21.8°).$$

The result can be obtained directly with the formulas $A = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\phi = \arctan(y/x)$.

32. Express $6\sin(4t + \pi/3)$ as the sum of sine and cosine, that is, in the form $C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)$. Ratkaisu:

$$6\sin(4t + \pi/3) \approx 3\sin(4t) + 5.2\cos(4t)$$

33. Consider a square wave $g(t)$ whose amplitude is 3 and the period is $T = 2$. When $0 \le t \le 2$, the function is defined piece-wise as

$$g(t) = \begin{cases} 3, & \text{if } 0 \le t \le 1, \\ 0, & \text{if } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

and outside this time interval the function repeats itself periodically. Find the Fourier coefficients a_0, a_n and b_n. Vihje. Find the Fourier coefficients of

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{if } 0 \le t \le \pi, \\ 0, & \text{if } \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

to obtain

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx).$$

Then substitute $x = \pi t$ to obtain $g(t) = f(\pi t) = \ldots$. Ratkaisu:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 3\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

and by substituting $x = \pi t$ we obtain

$$g(t) = f(\pi t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 3\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n}\sin(\pi n t).$$

34. **(Possible exam question.)** For the function

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x \leq \pi \\ -1, & \text{if } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases},$$

find its Fourier series. Ratkaisu:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{1+(-1)^n}{n} \sin(nx)$$

7.9 Discrete Fourier transformation / FFT

35. **(Possible exam question.)** Let $[x_0, x_1] = [2, 3]$. Calculate the discrete Fourier transformation

$$\begin{cases} y_0 &= x_0 + x_1 \\ y_1 &= x_0 - x_1 \end{cases}.$$

Check the answer in OctaveOnline with `y=fft([x_0, x_1])`.

Ratkaisu: $[y_0, y_1] = [5, -1]$.

36. Let $[y_0, y_1]$=[5,-1]. Calculate the inverse discrete Fourier transformation

$$\begin{cases} x_0 &= \frac{1}{2}(x_0 + x_1) \\ x_1 &= \frac{1}{2}(x_0 - x_1) \end{cases}.$$

Check the answer in OctaveOnline with `x=ifft([y_0,y_1])`.

Ratkaisu: $[x_0, x_1] = [2, 3]$.

37. Let $[x_0, x_1, x_2, x_3] = [1, 2, 1, 2]$. Calculate the discrete Fourier transformation

$$\begin{cases} y_0 &= x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \\ y_1 &= x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3 \\ y_2 &= x_0 - x_1 + x_2 - x_3 \\ y_3 &= x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3 \end{cases}.$$

Check the answer in OctaveOnline with `y=fft([x_0,x_1,x_2,x_3])`.

Ratkaisu: $[y_0, y_1, y_2, y_3] = [6, 0, -2, 0]$.

38. Let $[y_0, y_1, y_2, y_3] = [6, 0, -2, 0]$. Calculate the inverse discrete Fourier transformation

$$\begin{cases} y_0 &= \frac{1}{4}(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) \\ y_1 &= \frac{1}{4}(x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3) \\ y_2 &= \frac{1}{4}(x_0 - x_1 + x_2 - x_3) \\ y_3 &= \frac{1}{4}(x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3) \end{cases}.$$

Check the answer in OctaveOnline with `x=ifft([x_0,x_1,x_2,x_3])`.

Ratkaisu: $[x_0, x_1, x_2, x_3] = [1, 2, 1, 2]$.

7.10 Numerical solutions (not asked in exam)

1. Solve numerically with Python's Scipy library, and analytically with Python's Sympy library. Use the initial condition $y(0) = 2$ in the numerical solution. Draw the graphs of the numerical and analytic solutions. (Use same initial condition for the analytic solutions.)

   (a) $y' + 7y = 0$

   (b) $y' + \cos(x)y = 0$

   (c) $xy' + 3x^2y = 0$

2. Write a Python program which removes the noise from a function which is the sum of two sine waves. You can use, for example, the wave

```
noisy_signal = np.sin(a)+np.sin(3*a-1)+10*np.random.rand(len(a))
```

7.11 Formulas

7.11.1 Differentiation and integration

Differentiation	Integration
$Dx^n = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$De^x = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$Db^x = b^x \ln(b)$	$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln(b)}$
$D\ln(x) = \frac{1}{x}$	
$D\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$D\log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$	
$D\log_a\lvert x\rvert = \frac{1}{x\ln(a)}$	
$D\sin(x) = \cos(x)$	$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
$D\cos(x) = -\sin(x)$	$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
$D\tan(x) = 1 + \tan^2(x)$	$\int 1 + \tan^2(x)dx = \tan(x) + C$
$Dx\ln(x) - x = \ln(x)$	$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + C$
$D\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$
$D\arccos(x) = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} = \arccos(x) + C$
$D\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$
$D\sinh(x) = \cosh(x)$	
$D\cosh(x) = \sinh(x)$	
$D\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	

Differentiation	Integration
$Df(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$	$\int f(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + C$
Special cases	
$D\ln(g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln(g(x)) + C$
$De^{g(x)} = e^{g(x)}g'(x)$	$\int g'(x)e^{g(x)}dx = e^{g(x)} + C$
$Dfg = f'g + fg'$	$\int f'gdx = fg - \int fg'dx$
$D(f/g) = (gf' - fg')/g^2$	

7.11.2 Solution formula

The solution of

$$y' + p(x)y = q(x)$$

is

$$y(x) = \frac{C}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx, \quad \text{where} \quad \mu(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

7.11.3 Fourier series

If f is periodic with period 2π and f, f' and f'' are piece-wise continuous, then

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

where

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \end{aligned}$$

Moreover, if f is odd, that is, $f(-x) = -f(x)$, then

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

and if f is even, that is, $f(-x) = f(x)$, then

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

7.11.4 Discrete Fourier transform / FFT

Transform and inverse transform

$$\begin{cases} y_0 &= x_0 + x_1 \\ y_1 &= x_0 - x_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_0 &= \frac{1}{2}(x_0 + x_1) \\ y_1 &= \frac{1}{2}(x_0 - x_1) \end{cases}$$

Transform and inverse transform

$$\begin{cases} y_0 &= x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \\ y_1 &= x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3 \\ y_2 &= x_0 - x_1 + x_2 - x_3 \\ y_3 &= x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_0 &= \frac{1}{4}(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) \\ y_1 &= \frac{1}{4}(x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3) \\ y_2 &= \frac{1}{4}(x_0 - x_1 + x_2 - x_3) \\ y_3 &= \frac{1}{4}(x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3) \end{cases}$$

8 Todennäköisyys ja tilastot (2op)

8.1 Todennäköisyyksien perusteita

1. Tietotekniikan opiskelijoiden pituusjakauma on seuraava pituus (m) opiskelijoiden lkm

1.51 ... 1.53	2
1.54 ... 1.56	2
1.57 ... 1.59	5
1.60 ... 1.62	38
1.63 ... 1.65	62
1.66 ... 1.68	110
1.69 ... 1.71	126
1.72 ... 1.74	130
1.75 ... 1.77	126
1.78 ... 1.80	72
1.81 ... 1.83	42
1.84 ... 1.86	23
1.87 ... 1.89	7
1.90 ... 1.92	1

Millä todennäköisyydellä sattumanvaraisesti valittu opiskelija on pituudeltaan

(a) yli 180 cm

(b) 163 ... 174 cm

(c) alle 160 cm?

2. Opiskelijat arvioivat annetun janan pituuden. Heidän arviointivirheensä olivat seuraavat (cm):

2	3	0	5	6	1	2	4	3	1	3	2
1	0	1	1	0	2	1	1	0	5	0	2
5	3	1	1	2	0	4	3	0	0	2	1
0	3	5	4	2	0	5	3	1	6	2	4
1	1	4	7	2	0	2	1	0	4	4	3

Millä todennäköisyydellä sattumanvaraisesti valittu opiskelija arvioi kyseisen janan pituuden 1 cm tarkkuudella oikein?

3. Autotehdas teki listauksen siitä, missä vaiheessa heidän valmistamalleen autolle tehtiin ensimmäinen korjaustoimenpide:

km	ensikorjattujen autojen lkm
0 - 10 000	50
10 001 - 20 000	93
20 001 - 30 000	293
30 001 - 40 000	391
40 001 - 50 000	183
50 001 -	40

Millä todennäköisyydellä tehtaan auto joutuu ensimmäisen kerran korjattavaksi, kun sillä on ajettu

(a) enintään 20 000km

(b) 20 001 - 30 000km

(c) 30 001 - 40 000km

(d) yli 40 000km

(e) Laske kohtien a - d todennäköisyyksien summa.

(f) Millä todennäköisyydellä tehtaan auto, jolle ensimmäistä korjaustoimenpidettä ei ole tarvinut tehdä ensimmäisen 30 000km aikana, joutuu ensikorjaukseen seuraavan 10 000km aikana?

4. Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä summa on

(a) 1
(b) 5
(c) 11
(d) suurempi kuin 7?

5. Heitetään kolikkoa kolme kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan
   (a) 4
   (b) 3
   (c) 2
   (d) 1
   (e) 0 kruunua?
6. Millä todennäköisyydellä numeroista 1, 2, 3, 4 ja 5 satunnaisesti muodostettu kaksinumeroinen luku on jaollinen 2:lla tai 5:lla, kun sama numero voi esiintyä kahdesti?
7. Millä todennäköisyydellä kahta noppaa heittämällä pistesummaksi saadaan 10, 11 tai 12?
8. Opiskelijoista saa arvosanan 5 matematiikan kokeissa 15% , fysiikan kokeissa 12% ja molemmissa 7%. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu opiskelija saa arvosanan 5 ainakin toisessa näistä kokeissa?
9. Suojatien jalankulkuvalot on säädetty siten, että tien ylittäjä joutuu odottamaan valojen vaihtimista max 40 s ja vihreä valo palaa 20 s. Millä todennäköisyydellä suojatien ylittäjä joutuu odottamaan valojen vaihtumista max30 s?
10. Mikä on todennäköisyys nostaa kaksi ässää korttipakasta?
11. Laatikossa on 6 punaista palloa ja 4 mustaa palloa. Nostetaan kaksi palloa palauttamatta niitä laatikkoon. Millä todennäköisyydellä molemmat pallot ovat mustia?
12. Heitetään noppaa neljä kertaa. Laske todennäköisyys, että saadaan
    (a) 2 kakkosta
    (b) 4 parillista lukua
    (c) ainakin 1 kuutonen.
13. Tehtaalla on 100 piirilevyä laatikossa ja kolme niistä on viallisia. Otetaan satunnaisesti kaksi piirilevyä laatikosta. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi piirilevyistä on ehjä?
14. Laske todennäköisyys, että heitettäessä kolikkoa kaksi kertaa saadaan
    (a) kaksi kruunua
    (b) ainakin yksi klaava.
15. Kummalla on parempi todennäköisyys: saadaan pariton tai saadaan enintään 4 nopanheitossa?
16. Lentokone oli ylibuukattu. Viidestä jonottajasta valitaan arvalla 2, jotka pääsevät koneeseen. Henkilöt Ari, Birgitta, Cecilia, Daniel ja Emma ovat jonossa. Laske todennäköisyydet
    (a) Ari ja Emma pääsevät koneeseen.
    (b) yksi mies ja yksi nainen pääsee koneeseen.
    (c) yksikään mies ei pääse koneeseen.
17. Arvonnassa on neljä lipuketta. Lipukkeissa on numerot 1, 2, 3 ja 4. Nostetaan yksi lipuke, palautetaan se takaisin laatikkoon, ja nostetaan toinen lipuke. Kannattaako lyödä vetoa sen puolesta, että arvonnassa saadaan ainakin yksi ykkönen?
18. Säätiedotus ilmoitti sadekuurojen mahdollisuudeksi lauantaina 30% ja sunnuntaina 60%. Millä todennäköisyydellä viikonloppuna sataa vettä?

8.2 Permutaatiot, k-permutaatiot, kombinaatiot

19. Montako erilaista istumajärjestystä luokan 32 opiskelijasta saadaan?

20. (a) 10 henkilöä kättelevät kaikki toisiaan. Montako kättelyä suoritetaan?
    (b) 8 joukkuetta pelaavat pareittain. Montako ottelua pelataan?

21. Mielipidekyselyssä oli 6 kysymystä ja niissä jokaisessa oli 5 erilaista vastausmahdollisuutta. Paljonko vastausmahdollisuuksia oli kaikkiaan (joka kysymykseen piti vastata)?

22. Jonossa on 3 poikaa ja 4 tyttöä niin, että tytöt ovat jonon alussa. Kuinka monta jonoa heistä voidaan muodostaa?

23. Opiskelijan tulee vastata 10 kysymyksestä kahdeksaan.
    (a) Montako erilaista vastausyhdistelmää hänellä on?
    (b) Entä jos näiden 8 vastauksen joukossa tulee olla vastaukset 3 ensimmäiseen kysymykseen?

24. Montako erilaista ryhmää, jossa on 3 miestä ja 2 naista voidaan valita 7 miehestä ja 5 naisesta?

25. Salasana koostuu viidestä eri merkistä. Erilaisia merkkejä on käytössä 115.
    (a) Kuinka monta erilaista salasanaa voidaan muodostaa, kun merkkien järjestyksellä on väliä ja yhtä merkkiä saa käyttää vain kerran?
    (b) Jos yrittäisit arvata 5-merkkisen salasanan ja jokaiseen arvaukseen kuluisi 10s, kauanko kestäisi käydä kaikki mahdolliset salasanat läpi?

26. (a) Kuinka monessa eri järjestyksessä korttipakan kortit voivat olla?
    (b) Laske todennäköisyys sille, että nostettaessa pakasta 5 korttia saadaan 4 ässää.
    (c) Laske todennäköisyys sille, että nostettaessa pakasta 5 korttia saadaan 3 pataa ja 2 ruutua.

27. Pääsykokeeseen on ehdolla 20 matematiikan ja 15 fysiikan tehtävää. Tehtävät arvotaan kokeeseen eikä niiden järjestyksellä ole väliä. Millä todennäköisyydellä arvotuista kuudesta tehtävästä
    (a) kaikki ovat matematiikan tehtäviä
    (b) 3 on matematiikan ja 3 fysiikan tehtävää?

29. Jalkapallon vakioveikkauksessa veikataan 13 riviä. Jokaisella rivillä on 3 vaihtoehtoa (1, x, 2). Millä todennäköisyydellä vakioveikkauksessa saadaan 12 oikein?

30. Englannin luetunymmärtämisen kokeessa on 40 kysymystä. Jokaisessa kysymyksessä on 4 vaihtoehtoa. Laske todennäköisyydet, kun opiskelija arvaa kaikki vastaukset:

(a) kaikki oikein
(b) tasan 5 oikein
(c) vähintään 5 oikein

8.3 Jakaumia

28. Onnenpyörä on jaettu 8 yhtäsuureen sektoriin, joista yksi on jokerisektori. Olkoon X satunnaismuuttuja, joka ilmoittaa jokerien määrän kolmessa pyörityksessä. Määritä jakauma ja laske odotusarvo.

29. Koripalloilijan onnistumistodennäköisyys saada kori on 0,70. Hän saa kaksi vapaaheittoa peräkkäin. Mikä on onnistuneiden heittojen lukumäärän odotusarvo?

30. Olkoon X jakaumasta Bin (n, p). Määritä n ja p, kun $\mu = 2$ ja $\sigma^2 = \frac{4}{2}$.

31. Heitetään noppaa 4 kertaa. Tee jakauma kuutosten lukumäärästä.

32. Tuotantolinjalla tarkastetaan tuotteiden tasoa. Todennäköisyys, että tuote ei ole hyväksyttävä on 0.20. Otetaan kaksi sattumanvaraista tuotetta. Muodosta jakauma ja laske odotusarvo sekä keskihajonta.

33. Laatikossa on 3 mustaa ja 3 valkoista palloa. Nostetaan laatikosta kolme palloa. Laske saatujen valkoisten pallojen lukumäärän odotusarvo.

34. Kilpailun palkintona on rahasumma, joka määräytyy arpomalla. Palkinnon jakajalla on 5 kirjekuorta, joissa on rahaa 10€, 20€, 30€, 40€ ja 50€. Voittaja saa valita kaksi kirjekuorta. Satunnaismuuttuja X ilmoittaa yhteensä saadun voittosumman. Laske satunnaismuuttujan odotusarvo.

35. Arpajaisissa on 1000 arpaa ja niissä on voittoja seuraavasti 1 kpl 100€, 10 kpl 50€ ja 15 kpl 20€. Yksi arpa maksaa 1 €. Laske nettovoiton odotusarvo.

36. Heitetään kahta kolikkoa kerran. Jos saa yhden kruunan, niin voittaa 20€. Jos saa kaksi kruunaa, niin voittaa 40€. Jos saa kaksi klaavaa, niin häviää 100€. Laske voiton odotusarvo.

37. Lompakossa on 6 kpl 1€, 4 kpl 2€ ja 2 kpl 50 sentin kolikoita. Otetaan lompakosta yksi kolikko. Muodosta jakauma

    41. Opiskelijat heittivät kuutta kolikkoa 90 kertaa. Taulukosta voidaan nähdä saatujen kruunujen lukumäärä eri heittokerroilla:

0	2	3	2	4	3	4	3	3	4	1	4	3	4	5	3	4	4	4	4	3	2	1
4	2	3	4	2	5	3	4	2	4	2	1	2	4	2	1	4	3	2	2	1	5	2
3	1	5	3	3	3	1	3	4	2	3	4	1	3	5	5	3	2	5	3	2	3	4
2	3	3	3	2	3	4	5	5	0	5	2	3	3	4	3	0	4	1	2	4		

    Muodosta aineiston jakauma.

8.4 Poisson-jakauma

38. Todennäköisyys, että levyohjain vikaantuu viikon aikana on 0.007. Tietokoneen palveluyritys ylläpitää 900 levyohjainta. Laske Poisson-jakauman avulla todennäköisyys, että

    (a) 7

    (b) enemmän kuin 3

    levyohjainta vikaantuu viikossa.

39. Jos keskimäärin kaksi autoa saapuu tiettyyn parkkipaikkaan minuutissa, millä tod.näk. minkä tahansa annetun minuutin aikana 4 tai useampi auto saapuu parkkipaikalle ?

40. Koululla on paljon tietokoneita. Yhden kuukauden aikana tyypillisesti yksi koneista menee rikki. Mikä on todennäköisyys, että vähemmän kuin kaksi tietokonetta menee rikki ?

8.5 Normaalijakauma

41. Satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa. Laske todennäköisyydet

    (a) $P(z \leq 0.25)$

    (b) $P(1.2 \leq z \leq 2.1)$

    (c) $(P(-1 \leq z \leq 1.5)$

42. Satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa. Odotusarvo on 8 ja keskihajonta 1.7. Laske todennäköisyys, että $7 \leq X \leq 12.2$.

43. Kännykän akkuja valmistava yritys on todennut, että akkujen elinikä vuosina noudattaa normaalijakaumaa N(3; 1.2). Yksi valmistuserä on 7000 kpl. Kuinka monen akun voidaan olettaa toimivan viiden vuoden kuluttua ?

44. Miesten pituusjakauma on normaali ja odotusarvo on 175cm ja keskihajonta on 8 cm. Kuinka monta prosenttia miehistä on yli 2 m ?

45. Tuotteiden paino noudattaa normaalijakaumaa N(80 kg; 4 kg).

(a) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu tuote painaa 77 ... 80kg?

(b) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu tuote painaa yli 80kg?

46. Olkoon X normaali, jonka odotusarvo on 5 ja varianssi 0.04. Määritä vastaava x, jolle on annettu todennäköisyydet

    (a) $P(X \leq x) = 95\%$

    (b) $P(X > x) = 1\%$

47. Vastuksen resistanssi noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 3 Ω ja keskihajonta on 0.1 Ω. Laske todennäköisyys, että vastuksen resitanssi on

    (a) 2.9...3.05 Ω

    (b) enemmän kuin 2.95 Ω

    (c) vähemmän kuin 2.83 Ω.

8.6 Luottamusväli

48. Määritä 99%luottamusväli keskiarvolle, kun muuttujan jakauma on likimain normaali ja keskihajonta on 2,5 käyttämällä otosta: 30,8; 30,0; 29,9; 30,1; 31,7; 34,0.

49. Laske 95%luottamusväli keskiarvolle, kun muuttujan jakauma on likimain normaali. Tiedetään, että odotusarvo on 74,81 ja varianssi on 16, kun otoskoko on 200.

50. Kannettavan tietokoneen keskipainon tulisi olla vähintään 2,0kg. Otostutkimus antaa seuraavat painot: 8 kpl 1,90kg, 10 kpl 1,95kg, 12 kpl 1,98kg ja 4 kpl 2,05kg. Kuinka paljon vähintään tuotteet ovat tämän otoksen perusteella alipainoisia, jos käytetään 95%varmuutta ?

51. Matkapuhelimen keskipainoksi ilmoitettiin 0.700kg. Tutkitusta 10 puhelimesta 6 painoi 692g ja 4 painoi 701g. Onko ilmoitettu keskipaino hyväksyttyjen rajojen välissä, jos käytetään 99% varmuutta ?

52. Yritys kirjasi ylös IT-palvelujen odotusajan (min) ja $X \sim N(\mu, 25)$

97,0	101,5	102,1	103,9	93,4	103,3	104,1	98,6	97,3
96,2	107,7	104,8	98,5	99,2	93,8	100,3	103,7	96,4

Laske otoksen perusteella X:n odotusarvon 95%, 99% ja 99.9% luottamusvälit.

53. Tehtiin mittaukset Manilla köyden vetolujuudesta ($n = 16$). Näytteen keskiarvo oli 4482kg ja keskihajonta oli 115kg. Oletetaan, että vetolujuus on normaali sattumanvarainen muuttuja. Testaa hypoteesia $\mu_0 = 4500kg$ vaihtoehtoiseen arvoon $\mu_1 = 4400kg$ verrattuna.

54. Olkoon $X \sim N(\mu, 60)$. Testaa hypoteesia $\mu_0 = 120$ annetulla otoksella:

115	125	102	129	121	119	120	120	126	120
124	118	116	132	114	108	127	131	130	181

55. Olkoon $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Testaa hypoteesia $\mu_0 = 55$ merkitsevyystasolla 5% otokselle:

53,08	56,02	57,32	51,76	57,07	59,08	59,00	52,31	54,10	55,78
54,91	60,50	56,81	56,72	58,13	58,31	58,85	54,92	60,69	58,70

56. Sähköjännitteen mittaaminen samanaikaisesti kahdella erityyppisellä jännitemittarilla antaa tulokseksi (Voltteina) : 0,4; -0,6; 0,2; 0,0; 1,0; 1,4; 0,4; 1,6. Voimmeko olettaa, että 5% merkitsevyystasolla ei ole merkitystä kahden eri tyyppisen mittarin kalibroinnilla ?

57. Oletetaan normaalijautuneeksi ja tiedetään varianssin olevan 9. Testaa hypoteesia $\mu_0 = 60.0$ verrattuna vaihtoehtoiseen arvoon $\mu_1 = 57.0$ käyttämällä näytekokoa 20, keskiarvoa 58.05 ja valitsemalla merkitsevyystasoksi $\alpha = 5\%$.

Permutaatio: valitaan n alkiosta kaikki ja järjestetään nämä - montako eri tapaa

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$$

k-permutaatio: valitaan n alkiosta k alkiota ja järjestetään nämä - montako eri tapaa

$$\frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)n$$

Kombinaatio: monellako tavalla n alkiosta voidaan valita k alkiota

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomijakauman pmf, mean, variance

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^k, \quad np, \quad np(1-p)$$

Poisson-jakauman pmf, mean, variance

$$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \lambda \quad \lambda$$

Normaalijakauman pmf, mean, variance

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \mu, \quad \sigma$$

Norm. normaalijakauman pmf, mean, variance

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad 1, \quad 1$$

$$P(A) = \frac{\text{suotuisten alkeistapausten lukumäärä}}{\text{kaikkien alkeistapausten lukumäärä}}$$

Vastatapahtuma $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Aina $P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(AjaB)$
Riippumattomat $P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B)$
Aina $P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B|A)$
Riippumattomat $P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$
Odotusarvo

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Keskihajonta σ Varianssi

$$\sigma^2 = Var(x) = E((X-\mu)^2)$$

Kovarianssi

$$cov(X,Y) = E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))$$

Korrelaatiokerroin

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Tasainen jakauma

$$E(X) = \frac{b-a}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Normaalijakauma $P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$ $P(X \leq b) = \Phi(b)$ $P(a \leq X) = \Phi(\infty) - \Phi(a) = 1 - \Phi(a) = \Phi(-a)$

9 Vanhoja tenttejä

9.1 Mat.per. Loppukoe 3.11.2023

Matematiikan ja digitaalitekniikan perusteet tietotekniikassa IN00CS83-3010, matematiikan osio

1. Sievennä lauseke
$$\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{7}\right)\Big/\left(\frac{1}{14}+1\right). \quad \text{Ratkaisu: } -1/25$$
muotoon $\frac{p}{q}$, missä p ja q ovat kokonaislukuja.

2. Avaa sulut
$$(3x+4)^2-6(4x-2)+5. \quad \text{Ratkaisu: } 9x^2+33$$

3. Ratkaise toisen asteen yhtälö
$$x^2-4x+3=0. \quad \text{Ratkaisu: } x=1 \text{ tai } x=3$$

4. Ratkaise yhtälöparista
$$\begin{cases} 5x+6y & =4 \\ 2x+y & =2 \end{cases} \quad \text{Ratkaisu: } x=8/7, y=-2/7$$
tuntemattomat x ja y.

5. Ratkaise x yhtälöstä
$$7^{2x}=4^{x+5}. \quad \text{Ratkaisu: } \frac{5\ln(4)}{2\ln(7)-\ln(4)}$$

6. Ratkaise x yhtälöstä
$$2\ln(2x)-\ln(x)=\ln(x+1). \quad \text{Ratkaisu: } x=\frac{1}{3}$$

Kaavoja

$$\frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}, \qquad ax^2+bx+c=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\log_a(x)=y \quad\Leftrightarrow\quad a^y=x$$

$$\log_a(1)=0, \quad \log_a(a)=1, \quad \log_a(a^x)=x, \quad a^{\log_a(x)}=x$$

$$\begin{aligned}
\log_a(b^c) &= c\log_a(b)\\
\log_a(xy) &= \log_a(x)+\log_a(y)\\
\log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x)-\log_a(y)\\
\log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{lb}(x)=\log_2(x), \quad \lg(x)=\log_{10}(x), \quad \ln(x)=\log_e(x), \quad e\approx 2,72$$

9.2 Vek.komp. Harjoituskoe 23.11.2023

Tietotekniikan sovellusprojekti IN00ED23-3001, matematiikan osio, Vektorit ja kompleksilukujen perusteet (3op)

1. Laske vektorien $\overline{u} = (1, 12, -2)$ ja $\overline{v} = (3, 0, 1)$ pistetulo. Ratkaisu: 1

2. Määritä vektorin $\overline{u} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ suuntainen yksikkövektori. Ratkaisu: $\hat{u} = \frac{1}{3}\hat{\imath} - \frac{2}{3}\hat{\jmath} + \frac{2}{3}\hat{k}$

3. Laske vektorien $(1, 2, 2)$ ja $(1, 2, -2)$ välinen kulma. Ratkaisu: noin $83,6°$

4. Laske tetraedrin tilavuus, kun sen kärjet ovat pisteissä $A = (2, 1, -1)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (-1, -2, 2)$ ja $D = (-1, 2, -1)$. Ratkaisu: $(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w} = -24$, joten $V = 4$

5. Määritä pisteen $P = (2, 2)$ etäisyys pisteiden $A = (1, -1)$ ja $B = (5, 2)$ kautta kulkevasta suorasta.
   Vihje. Jos $\overline{n}$ on suoran jokin normaalivektori ja $\overline{v} = P - A$, niin etäisyys on luku $\overline{v} \cdot \hat{n}$.
   Ratkaisu: suoran suuntavektori $\overline{u} = (4, 3)$, $\overline{n} = (-3, 4)$, $\hat{n} = (-0.6, 0.8)$, $\overline{v} = (1, 3)$,
   etäisyys on $(1, 3) \cdot (-0.6, 0.8) = -0.6 + 2.4 = 1.8$.

6. Laske kompleksilukujen tulo
$$(3 + 4i)(1 + 5i)$$
   Ratkaisu: $-17 + 19i$

7. Kirjoita kompleksiluku $z = 5e^{i\pi/3}$ summamuodossa $z = x + iy$. (Luvuille x ja y riittää likiarvo.) Ratkaisu: $z \approx 2.50 + 4.33i$

8. Etsi toisen asteen yhtälön
$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$
   kompleksiset ratkaisut. Ratkaisu: $x = 1 + i$ tai $x = 1 - i$

   Yhtälö on $ax^2 + bx + c = 0$, missä $a = 1$, $b = -2$ ja $c = 2$. Ratkaisukaavalla saadaan
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 + i.$$

Kaavoja (jatkuu kääntöpuolella)

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$|(u_1, u_2, u_3)| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \quad \hat{u} = \frac{1}{|\overline{u}|}\overline{u}, \qquad (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{|\overline{u}||\overline{v}|}, \quad \theta = \arctan(y/x)$$

$$V_S = |(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}|, \quad V_P = \frac{1}{2}|(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}|, \quad V_T = \frac{1}{6}|(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}|$$

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1} = i\sqrt{a}, \quad i^2 = -1$$

$$z^* = (x + iy)^* = x - iy, \quad |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan(y/x), \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{zw^*}{|w|^2}, \quad \text{eli} \quad \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{a}{b}\bigg/\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \qquad ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

$$\log_a(1) = 0, \quad \log_a(a) = 1, \quad \log_a(a^x) = x, \quad a^{\log_a(x)} = x$$

$$\log_a(b^c) = c\log_a(b)$$
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

$$\text{lb}(x) = \log_2(x), \quad \lg(x) = \log_{10}(x), \quad \ln(x) = \log_e(x), \quad e \approx 2,72$$

9.3 Tod.näk. ja tilastot, mallikoe 12.12.2023

Mobiilikehitysprojekti,
matematiikan osio, Ohjelmistotekniikan matematiikka (2op) (todennäköisyyslaskenta ja tilastot)

1. Tietotekniikan opiskelijoiden pituusjakauma on seuraava pituus (m) opiskelijoiden lkm

1.51 ... 1.53	2
1.54 ... 1.56	2
1.57 ... 1.59	5
1.60 ... 1.62	38
1.63 ... 1.65	62
1.66 ... 1.68	110
1.69 ... 1.71	126
1.72 ... 1.74	130
1.75 ... 1.77	110
1.78 ... 1.80	72
1.81 ... 1.83	42
1.84 ... 1.86	23
1.87 ... 1.89	7
1.90 ... 1.92	1

Millä todennäköisyydellä sattumanvaraisesti valittu opiskelija on pituudeltaan yli 174 cm?

Ratkaisu: Yli 174 cm pitkiä opiskelijoita on

$$110 + 72 + 42 + 23 + 7 + 1 = 255.$$

Muita opiskelijoita on

$$2 + 2 + 5 + 38 + 62 + 110 + 126 + 130 = 475.$$

Yhteensä opiskelijoita on $255 + 475 = 730$.

Todennäköisyys on yli 174 cm pitkien opiskelijoiden osuus

$$P = \frac{255}{730} = 0,3493\ldots = 0,35.$$

2. Opiskelijoista saa arvosanan 5 matematiikan kokeissa 15% , fysiikan kokeissa 12% ja molemmissa 7%. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu opiskelija saa arvosanan 5 ainakin toisessa näistä kokeissa?

Ratkaisu: Opiskelijoita, jotka saivat arvosanan 5 vain matematiikan kokeessa on

$$25\% - 7\% = 18\%.$$

Arvosanan 5 vain fysiikan kokeessa sai

$$17\% - 7\% = 10\%.$$

Kysytty osuus koostuu vain matematiikassa, vain fysiikassa ja molemmissa arvosanan 5 saaneista eli osuus on

$$18\% + 10\% + 7\% = 35\%.$$

3. Säätiedotus ilmoitti sadekuurojen mahdollisuudeksi lauantaina 30% ja sunnuntaina 60%. Millä todennäköisyydellä viikonloppuna sataa vettä?

Ratkaisu: Vastatapahtuman todennäköisyyden perusteella

$$P(\text{viikonloppuna sataa}) = 1 - P(\text{viikonloppuna ei sada}).$$

Olettaen, että lauantain sade ja sunnuntain sade ovat riippumattomia tapahtumia, saadaan

$$P(\text{viikonloppuna ei sada}) = P(\text{ei sada lauantaina}) \cdot P(\text{ei sada sunnuntaina}).$$

Siis todennäköisyys, että viikonloppuna sataa on

$$P = 1 - (1 - 0,4)(1 - 0,7) = 1 - 0,6 \cdot 0,3 = 0,82 = 82\%.$$

4. Montako erilaista ryhmää, jossa on 3 miestä ja 2 naista voidaan valita 7 miehestä ja 5 naisesta?

Ratkaisu: Monessa laskimessa/ohjelmistossa kombinaatioiden lukumäärä

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

on "choose(n,k)" eli "valitse n vaihtoehdosta k alkiota".

Miesten valintatapoja on $\binom{7}{3}$. Naisten valintatapoja on $\binom{5}{2}$. Erilaisia ryhmiä on siten

$$\binom{7}{3}\binom{5}{2} = \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{5!}{2!3!} = 35 \cdot 10 = 350.$$

5. Arpajaisissa on 1000 arpaa ja niissä on voittoja seuraavasti 1 kpl 100€, 10 kpl 50€ ja 15 kpl 20€. Yksi arpa maksaa 1 €. Laske nettovoiton odotusarvo.

Ratkaisu: Tarkastellaan aluksi bruttovoittoja. Merkitään eri bruttovoittoja $X_1 = 100$, $X_1 = 50$, $X_2 = 20$, $X_3 = 0$. Bruttovoiton odotusarvo on

$$\begin{aligned}\sum_k X_k P(X_k) &= X_1 P(X_1) + X_2 P(X_2) + X_3 P(X_3) + X_4 P(X_4) \\ &= 100\frac{1}{1000} + 50\frac{10}{1000} + 20 \cdot \frac{15}{1000} + 0 \cdot \frac{1000-(1+10+15)}{1000} \\ &= 0,1 + 0,5 + 0,3 + 0 \\ &= 0,9.\end{aligned}$$

Nettovoiton odotusarvo saadaan vähentämällä tästä arvan hinta. Nettovoiton odotusarvo on siis $-0,10e$.

6. Noppaa heitetään 100 kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan kuutosia 16-18 kappaletta?

Ratkaisu: Tarkastellaan siis binomijakaumaa, jossa toistojen määrä on $n = 100$ ja kutosen todennäköisyys on $p = 1/6$. Olkoon saatujen kutosten määrä satunnaismuuttuja X.

Todennäköisyys, että saadaan k kutosta on

$$P(X = k) = \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k}.$$

Poissulkevuuden perusteella

$$\begin{aligned}P(16 \le X \le 18) &= P(X = 16) + P(X = 17) + P(X = 18) \\ &= \binom{100}{16}\left(\frac{1}{6}\right)^{16}\left(\frac{5}{6}\right)^{84} + \binom{100}{17}\left(\frac{1}{6}\right)^{17}\left(\frac{5}{6}\right)^{83} + \binom{100}{18}\left(\frac{1}{6}\right)^{18}\left(\frac{5}{6}\right)^{82} \\ &= 0,1065 + 0,1052 + 0,0970 \\ &= 0,3087 \\ &\approx 0,31.\end{aligned}$$

7. Vastuksen resistanssi noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 3 Ω ja keskihajonta on 0.1 Ω. Laske todennäköisyys, että vastuksen resitanssi on vähemmän kuin 2.83 Ω?

Ratkaisu: Olkoon poimittavan vastuksen resistanssi satunnaismuuttuja R. Merkitään rajaa $x_0 = 2,83\ \Omega$. Vastaava normeerattu raja on

$$z_0 = \frac{x_0 - \mu}{\sigma} = \frac{2,83 - 3}{0,1} = -1,7.$$

Siis $P(R < 2,83) = P(z < -1,7)$, missä z noudattaa normeerattua normaalijakaumaa. Saadaan

$$\begin{aligned}P(R < 2,83) &= P(z < -1,7) \\ &= \Phi(-1,7) \\ &= 1 - \Phi(1,7) \\ &= 1 - 0,9554 \\ &= 0,0446 \\ &\approx 4,5\%.\end{aligned}$$

Tässä arvo $\Phi(1,7) = 0,9554$ katsottiin normaalijakauman kertymäfunktion taulukosta.

Onko vastaus järkevä? Nyt $\mu - 2\sigma = 3 - 2 \cdot 0,1 = 2,8$. Tätä vastaa kertymä $0,14\% + 2,14\% = 2,28\%$. Hieman isompaa arvoa $2,83$ vastaa hieman isompi kertymä $4,5\%$. Vastaus on järkevä.

8. Määritä 99%luottamusväli keskiarvolle, kun muuttujan jakauma on likimain normaali ja keskihajonta on 2,5 käyttämällä otosta: 30,8; 30,0; 29,9; 30,1; 31,7; 34,0.

Ratkaisu: Otoksen lukujen keskiarvo on

$$\frac{30,8 + 30,0 + 29,9 + 30,1 + 31,7 + 34,0}{6} = 31,083.$$

Etsitään siis muotoa

$$31,083 - R \ldots 31,083 + R$$

olevaa luottamusväliä, jossa R on luottamusvälin säde. Koska populaation keskihajonta $\sigma = 2,5$ tiedetään, säde R voidaan määrittää normaalijakaumaan perustuvalla kaavalla

$$R = Z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Otoksessa on kuusi lukua, joten otoskoko $n = 6$. Siis

$$R = Z \frac{2,5}{\sqrt{6}}$$

eli ainoastaan luku Z täytyy määrittää. Luku Z on se luku, jolle normaalijakauman kertymä välillä $-Z \ldots Z$ on 99%. Kertymän ulkopuolelle jäävä 1% jakaantuu kahteen häntään tasan $0,5\%$ ja $0,5\%$. Siis kertymän arvoon Z asti tulisi olla $0,5\% + 99\% = 99,5\%$. Taulukon perusteella

$$\Phi(Z) = 0,995$$

toteutuu arvolla $Z = 2,58$. Siis

$$R = 2,58 \cdot \frac{2,5}{\sqrt{6}} = 2,6322.$$

Luottamusväliksi saadaan

$$31,083 - 2,6322 \ldots 31,083 + 2,6322$$

eli

$$28,450 \ldots 33,716.$$

Pohdintaa tehtävästä 8. Jos populaation keskihajontaa $\sigma = 2,5$ ei olisi tiedetty, oltaisiin toimittu seuraavasti. Otosvarianssi s^2 saadaan kaavalla

$$s^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(x_k - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Sijoittamalla luvuiksi x_k mittaukset $30,8; 30,0; 29,9; 30,1; 31,7; 34,0$ ja keskiarvoksi $\bar{x} = 31,08333$ kaava antaa

$$s^2 = 2,501666667.$$

Saadaan otoskeskihajonta

$$s = 1,582.$$

(Luku on pienempi kuin populaation keskihajonta $\sigma = 2,5$. Tämä voi johtua otoksen poimintaan liittyvästä sattumasta.)

Nyt voidaan laskea säde R kaavalla

$$R = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = t \cdot \frac{1,582}{\sqrt{6}}.$$

Luku t saadaan Studentin t-jakauman taulukosta kohdasta, jossa vapausasteita $n - 1 = 5$ ja $\alpha = 1 - 0,99 = 0,01$. Saadaan $t = 4,032$.

Saadaan

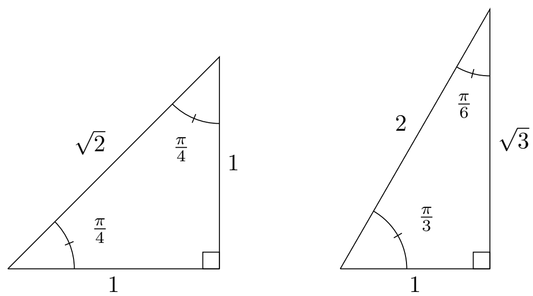
$$R_t = 4,032 \cdot \frac{1,582}{\sqrt{6}} = 2,604.$$

Tämä on lähellä toisella menetelmällä saatua sädettä $R_z = 2,6322$. Yleisesti $R_t > R_z$, koska R_t lasketaan vähemmällä informaatiolla (populaation keskihajontaa σ ei tiedetä) ja vähemmän informaation tulisi antaa huonompi tulos. Tästä johtuen $t = 4,032 > z = 2,63$. Nyt otoksen keskihajonta $s = 1,582$ sattui olemaan niin pieni, että saatiin pieni säde R_t.

10 Kuvia

10.1 Muistikolmiot

Usein tarvitaan kulmien 30°, 45° ja 60 ∘ trigonometristen funktioiden arvoja. Nämä löytyvät muistikolmioista.



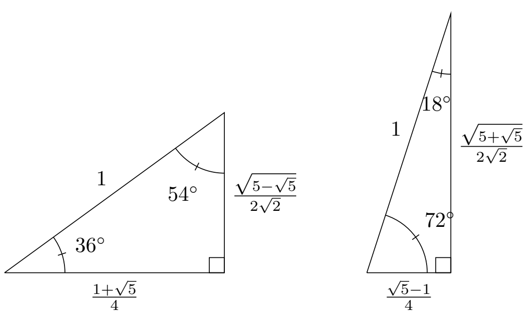
$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\tan\frac{\pi}{4} = 1$ $\qquad$ $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

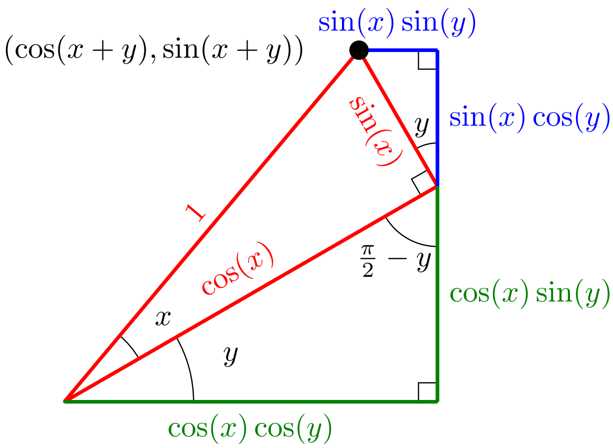
$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Joillekin muillekin kulmille trigonometristen funktioiden arvot voidaan ilmaista neliöjuurien avulla. Monimutkaisten lausekkeiden sijaan käytetään useimmin desimaalilukuja.



10.2 Summan sini

Oheisessa kuvassa todistetaan pari kaavaa.



$$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

Eulerin kaavan $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ avulla asian voi todistaa seuraavasti.

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= e^{i(x+y)} \\
&= e^{ix}e^{iy} \\
&= (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y)) \\
&= \cos(x)\cos(y) + \underbrace{i^2}_{=-1}\sin(x)\sin(y) + i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y))
\end{aligned}$$

11 Taulukoita

11.1 Alkutekijöitä

$2 = 2$	$21 = 3 \cdot 7$	$41 = 41$	$61 = 61$	$81 = 3^4$
$3 = 3$	$22 = 2 \cdot 11$	$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$	$62 = 2 \cdot 31$	$82 = 2 \cdot 41$
$4 = 2^2$	$23 = 23$	$43 = 43$	$63 = 3^2 \cdot 7$	$83 = 83$
$5 = 5$	$24 = 2^3 \cdot 3$	$44 = 2^2 \cdot 11$	$64 = 2^6$	$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$
$6 = 2 \cdot 3$	$25 = 5^2$	$45 = 3^2 \cdot 5$	$65 = 5 \cdot 13$	$85 = 5 \cdot 17$
$7 = 7$	$26 = 2 \cdot 13$	$46 = 2 \cdot 23$	$66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$	$86 = 2 \cdot 43$
$8 = 2^3$	$27 = 3^3$	$47 = 47$	$67 = 67$	$87 = 3 \cdot 29$
$9 = 3^2$	$28 = 2^2 \cdot 7$	$48 = 2^4 \cdot 3$	$68 = 2^2 \cdot 17$	$88 = 2^3 \cdot 11$
$10 = 2 \cdot 5$	$29 = 29$	$49 = 7^2$	$69 = 3 \cdot 23$	$89 = 89$
	$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$	$50 = 2 \cdot 5^2$	$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$	$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$11 = 11$	$31 = 31$	$51 = 3 \cdot 17$	$71 = 71$	$91 = 7 \cdot 13$
$12 = 2^2 \cdot 3$	$32 = 2^5$	$52 = 2^2 \cdot 13$	$72 = 2^3 \cdot 3^2$	$92 = 2^2 \cdot 23$
$13 = 13$	$33 = 3 \cdot 11$	$53 = 53$	$73 = 73$	$93 = 3 \cdot 31$
$14 = 2 \cdot 7$	$34 = 2 \cdot 17$	$54 = 2 \cdot 3^3$	$74 = 2 \cdot 37$	$94 = 2 \cdot 47$
$15 = 3 \cdot 5$	$35 = 5 \cdot 7$	$55 = 5 \cdot 11$	$75 = 3 \cdot 5^2$	$95 = 5 \cdot 19$
$16 = 2^4$	$36 = 2^2 \cdot 3^2$	$56 = 2^3 \cdot 7$	$76 = 2^2 \cdot 19$	$96 = 2^5 \cdot 3$
$17 = 17$	$37 = 37$	$57 = 3 \cdot 19$	$77 = 7 \cdot 11$	$97 = 97$
$18 = 2 \cdot 3^2$	$38 = 2 \cdot 19$	$58 = 2 \cdot 29$	$78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$	$98 = 2 \cdot 7^2$
$19 = 19$	$39 = 3 \cdot 13$	$59 = 59$	$79 = 79$	$99 = 3^2 \cdot 11$
$20 = 2^2 \cdot 5$	$40 = 2^3 \cdot 5$	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$	$80 = 2^4 \cdot 5$	$100 = 2^2 \cdot 5^2$

11.2 Lukuja korkeintaan neljän neliön summina

Lagrange todisti 1770, että kaikilla luonnollisilla luvuilla on tällainen esitys.

1	$= 1^2$				13	$= 2^2$	$+2^2$	$+2^2$	$+1^2$
2	$= 1^2$	$+1^2$			13	$= 3^2$	$+2^2$		
3	$= 1^2$	$+1^2$	$+1^2$		14	$= 3^2$	$+2^2$	$+1^2$	
4	$= 1^2$	$+1^2$	$+1^2$	$+1^2$	15	$= 3^2$	$+2^2$	$+1^2$	$+1^2$
4	$= 2^2$				16	$= 2^2$	$+2^2$	$+2^2$	$+2^2$
5	$= 2^2$	$+1^2$			16	$= 4^2$			
6	$= 2^2$	$+1^2$	$+1^2$		17	$= 3^2$	$+2^2$	$+2^2$	
7	$= 2^2$	$+1^2$	$+1^2$	$+1^2$	17	$= 4^2$	$+1^2$		
8	$= 2^2$	$+2^2$			18	$= 3^2$	$+2^2$	$+2^2$	$+1^2$
9	$= 2^2$	$+2^2$	$+1^2$		18	$= 3^2$	$+3^2$		
9	$= 3^2$				18	$= 4^2$	$+1^2$	$+1^2$	
10	$= 2^2$	$+2^2$	$+1^2$	$+1^2$	19	$= 3^2$	$+3^2$	$+1^2$	
10	$= 3^2$	$+1^2$			19	$= 4^2$	$+1^2$	$+1^2$	$+1^2$
11	$= 3^2$	$+1^2$	$+1^2$		20	$= 3^2$	$+3^2$	$+1^2$	$+1^2$
12	$= 2^2$	$+2^2$	$+2^2$		20	$= 4^2$	$+2^2$		
12	$= 3^2$	$+1^2$	$+1^2$	$+1^2$					

12 Extra

12.1 Normaalijakauman kertymäfunktio, sarjalla

Osoita, että normitetun normalijakauman kertymäfunktiolle Φ pätee $\Phi(1) - \Phi(0) \approx 0.34$.

Ratkaisu: Normaalijakauman tiheysfunktio on

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Jos normaalijakauma on normitettu, eli $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$, saadaan

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Eksponenttifunktion sarjakehitelmä on

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots.$$

Siis

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} - \dots.$$

Koska

$$\int_0^1 x^p = \frac{1}{p+1},$$

kun $p > 0$, niin saadaan

$$\int_0^1 e^{-x^2/2} dx = \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \dots\right]_{x=0}^{x=1} \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} = 0.8583\dots.$$

Siis

$$\Phi(1) - \Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2} dx \approx 0.3424.$$

12.2 Binomijakauman raja-arvona Poisson-jakauma

Osoita, että Binomijakauman $\text{BIN}(n, p)$ raja-arvona saadaan Poisson-jakauma $Poisson(\lambda)$, missä $\lambda = p/n$, kun $n \to \infty$.

Ratkaisu: Jos $X \sim \text{BIN}(n, p)$, niin

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Jos $np = \lambda$, niin $p = \lambda/n$ ja saadaan

$$P(X = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Järjestellään tämä muotoon

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{n!}{(n-k)!n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

Kun $n \to \infty$, saadaan

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!n^k}}_{\to 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to (1+0)^{-k}=1} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Tässä

$$\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{100}{100} \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{98}{100} \approx 1,$$

kun $n = 100$ ja $k = 3$.

13 Kaavoja

13.1 Kaavoja, matematiikan perusteet

Murtoluvut

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Potenssit

$$a^b a^c = a^{b+c}, \quad \frac{a^b}{a^c}=a^{b-c}, \quad (a^b)^c = a^{bc}, \quad (ab)^c = a^b a^c, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^b}{b^c}$$

Juuret

$$(a^b)^{\frac{1}{b}} = a^{b\cdot\frac{1}{b}} = a^1 = a, \quad \text{jos} \quad a>0, \quad \sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$$

Ensimmäisen asteen yhtälö

$$ax=b \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{b}{a}$$

Toisen asteen yhtälö

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Yhtälöpari

$$\begin{cases} ax+by &= U \\ cx+dy &= V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} acx+bcy &= cU \\ -acx+-ady &= -aV \end{cases} \Rightarrow \dots$$

$$\begin{cases} ax+by &= U \\ cx+dy &= V \end{cases} \Rightarrow y=\frac{U-ax}{b} \quad \Rightarrow cx+d\frac{U-ax}{b}=V \Rightarrow \dots$$

$$\begin{cases} ax+by &= U \\ cx+dy &= V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= \frac{Ud-bV}{ad-bc} \\ y &= \frac{aV-Uc}{ad-bc} \end{cases}$$

Funktio $f(x)$ ja käänteisfunktio $g(x)=f^{-1}(x)$

$$f(g(x))=x, \quad g(f(x))=x$$

Logaritmit

$$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b), \quad \ln(\frac{a}{b})=\ln(a)-\ln(b), \quad \ln(a^b)=b\ln(a)$$

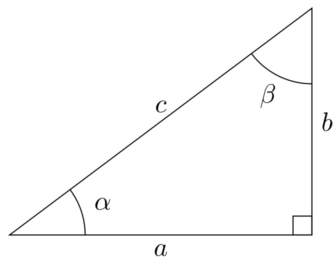
$$\log_a(x)=y \quad \Leftrightarrow \quad a^y=x$$

$$\log_a(1)=0, \quad \log_a(a)=1, \quad \log_a(a^x)=x, \quad a^{\log_a(x)}=x$$

$$\log_a(b^c)=c\log_a(b)$$
$$\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$$
$$\log_a(x)=\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

$$\mathrm{lb}(x)=\log_2(x), \quad \lg(x)=\log_{10}(x), \quad \ln(x)=\log_e(x), \quad e\approx 2,72$$

Trigonometria



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{c}, \quad \cos(\alpha) = \frac{a}{c}, \quad \tan(\alpha) = \frac{b}{a},$$

$$\alpha = \arcsin\frac{b}{c}, \quad = \arccos\frac{b}{c}, \quad = \arctan\frac{b}{c},$$

$$\alpha = \text{Imag}(\ln(a+bi)) \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

13.2 Kaavoja, vektorit ja kompleksiluvut

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3, \qquad \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ, \quad \overline{u} = (a, b) \Rightarrow \overline{n} = (b, -a) \quad \text{(Esim.)}$$

$$|(u_1, u_2, u_3)| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \quad \hat{u} = \frac{1}{|\overline{u}|}\overline{u}, \qquad (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{|\overline{u}||\overline{v}|}, \quad \theta = \arctan(y/x)$$

$$V_S = |(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}|, \quad V_P = \frac{1}{2}|(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}|, \quad V_T = \frac{1}{6}|(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}|, \quad A = |\overline{u} \times \overline{v}|$$

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1} = i\sqrt{a}, \quad i^2 = -1$$

$$z^* = (x + iy)^* = x - iy, \quad |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan(y/x), \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{zw^*}{|w|^2}, \quad \text{eli} \quad \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

13.3 Kaavoja, derivointi ja integrointi

Derivointi		**Integrointi**	
Dx^n	$= nx^{n-1}$	$\int x^n dx$	$= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
De^x	$= e^x$	$\int e^x dx$	$= e^x + C$
Db^x	$= b^x \ln(b)$	$\int b^x dx$	$= \frac{b^x}{\ln(b)}$
$D\ln(x)$	$= \frac{1}{x}$		
$D\ln\|x\|$	$= \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx$	$= \ln\|x\| + C$
$D\log_a(x)$	$= \frac{1}{x\ln(a)}$		
$D\log_a\|x\|$	$= \frac{1}{x\ln(a)}$		
$D\sin(x)$	$= \cos(x)$	$\int \cos(x)dx$	$= \sin(x) + C$
$D\cos(x)$	$= -\sin(x)$	$\int \sin(x)dx$	$= -\cos(x) + C$
$D\tan(x)$	$= 1 + \tan^2(x)$	$\int 1 + \tan^2(x)dx$	$= \tan(x) + C$
$Dx\ln(x) - x$	$= \ln(x)$	$\int \ln(x)dx$	$= x\ln(x) - x + C$
$D\arcsin(x)$	$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$= \arcsin(x) + C$
$D\arccos(x)$	$= \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$	$= \arccos(x) + C$
$D\arctan(x)$	$= \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}$	$= \arctan(x) + C$
$D\sinh(x)$	$= \cosh(x)$		
$D\cosh(x)$	$= \sinh(x)$		
$D\tanh(x)$	$= \frac{1}{\cosh^2(x)}$		

Derivointi		**Integrointi**	
$Df(g(x))$	$= f'(g(x))g'(x)$	$\int f(g(x))g'(x)dx$	$= f(g(x)) + C$
Erikoistapauksia			
$D\ln(f(x))$	$= \frac{f'(x)}{f(x)}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$	$= \ln(f(x)) + C$
$De^{f(x)}$	$= e^{f(x)}f'(x)$	$\int f'(x)e^{f(x)}dx$	$= e^{f(x)} + C$
Dfg	$= f'g + fg'$	$\int f'gdx$	$= fg - \int fg'dx$
$D(f/g)$	$= (gf' - fg')/g^2$		

13.4 Kaavoja, soveltava fysiikka

Yksikkömuunnokset

- 1 tuuma = 2.54cm
- 1 pauna = 1 lbs = 453.6 g

Newtonin lait

1. $F_{\text{kokonais}} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \text{vakio}$
2. $F_{\text{kokonais}} = ma$
3. $F_1 = -F_2$

Vino heittoliike

Vaakasuunnassa tasainen liike

$$\begin{cases} a_x(t) = x''(t) & = 0 \\ v_x(t) = x'(t) & = v_{0x} \\ x(t) & = v_{0x}t \end{cases}$$

Pystysuunnassa tasaisesti kiihtyvä liike

$$\begin{cases} a_y(t) = y''(t) & = -g \\ v_y(t) = y'(t) & = v_{0y} - gt \\ y(t) & = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Voimia

- kitka $F_\mu = \mu N$
- paino $G = mg$, missä $g = 9.81 m/s^2$

13.5 Formulas, differential equations and Fourier analysis

13.5.1 Differentiation and integration

Differentiation	Integration
$Dx^n = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$De^x = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$Db^x = b^x \ln(b)$	$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln(b)}$
$D\ln(x) = \frac{1}{x}$	
$D\ln\|x\| = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$
$D\log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$	
$D\log_a\|x\| = \frac{1}{x\ln(a)}$	
$D\sin(x) = \cos(x)$	$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
$D\cos(x) = -\sin(x)$	$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
$D\tan(x) = 1 + \tan^2(x)$	$\int 1 + \tan^2(x)dx = \tan(x) + C$
$Dx\ln(x) - x = \ln(x)$	$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + C$
$D\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$
$D\arccos(x) = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} = \arccos(x) + C$
$D\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$
$D\sinh(x) = \cosh(x)$	
$D\cosh(x) = \sinh(x)$	
$D\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	

Differentiation		**Integration**	
$Df(g(x))$	$= f'(g(x))g'(x)$	$\int f(g(x))g'(x)dx$	$= f(g(x)) + C$
Special cases			
$D\ln(g(x))$	$= \frac{g'(x)}{g(x)}$	$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx$	$= \ln(g(x)) + C$
$De^{g(x)}$	$= e^{g(x)}g'(x)$	$\int g'(x)e^{g(x)}dx$	$= e^{g(x)} + C$
Dfg	$= f'g + fg'$	$\int f'gdx$	$= fg - \int fg'dx$
$D(f/g)$	$= (gf' - fg')/g^2$		

13.5.2 Solution formula

The solution of

$$y' + p(x)y = q(x)$$

is

$$y(x) = \frac{C}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx, \quad \text{where} \quad \mu(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

13.5.3 Fourier series

If f is periodic with period 2π and f, f' and f'' are piece-wise continuous, then

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

where

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \end{aligned}$$

Moreover, if f is odd, that is, $f(-x) = -f(x)$, then

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

and if f is even, that is, $f(-x) = f(x)$, then

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

13.5.4 Discrete Fourier transform / FFT

Transform and inverse transform

$$\begin{cases} y_0 &= x_0 + x_1 \\ y_1 &= x_0 - x_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_0 &= \frac{1}{2}(x_0 + x_1) \\ y_1 &= \frac{1}{2}(x_0 - x_1) \end{cases}$$

Transform and inverse transform

$$\begin{cases} y_0 &= x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \\ y_1 &= x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3 \\ y_2 &= x_0 - x_1 + x_2 - x_3 \\ y_3 &= x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_0 &= \frac{1}{4}(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) \\ y_1 &= \frac{1}{4}(x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3) \\ y_2 &= \frac{1}{4}(x_0 - x_1 + x_2 - x_3) \\ y_3 &= \frac{1}{4}(x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3) \end{cases}$$

Viitteet

[1] A. Croft, R. Davison, M. Hargreaves, and J. Flint, Engineering Mathematics, 5th ed. (Pearson, Harlow, 2017)

[2] Calculus Volume 1, OpenStax (2016). https://openstax.org/details/books/calculus-volume-1

[3] Calculus Volume 2, OpenStax (2016). https://openstax.org/details/books/calculus-volume-2

[4] Stein, E.M., and R. Shakarchi Fourier Analysis: An Introduction. Princeton University Press (2003).