

TODENNÄKÖISYYS LASKENTAA

ESIM. HEITETÄÄN NOPPAA, MILLÄ
TODENNÄKÖISYYDELLÄ SAADAAN 6?

RATK. KLASSSINEN TODENNÄKÖISYYS

$$P(\text{SAADAAN } 6) = \frac{\text{SUOTUISTEN TAPAUSTEN LUKU-
MÄÄRÄ}}{\text{KAIKKIEEN TAPAUSTEN LUKU-
MÄÄRÄ}}$$

↑ PROBABILITY

$$= \frac{1}{6} = 0,1666... \approx 0,17 = 17\%$$

$$\frac{2}{3} < \frac{17}{33}$$

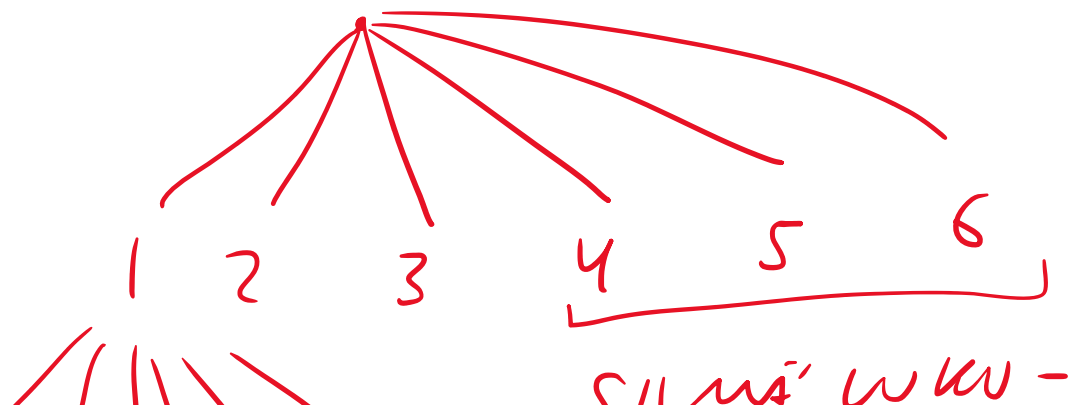
ESIM. HEITETÄÄN NOPPAA. ① 2, ③ 4, ⑤ 6

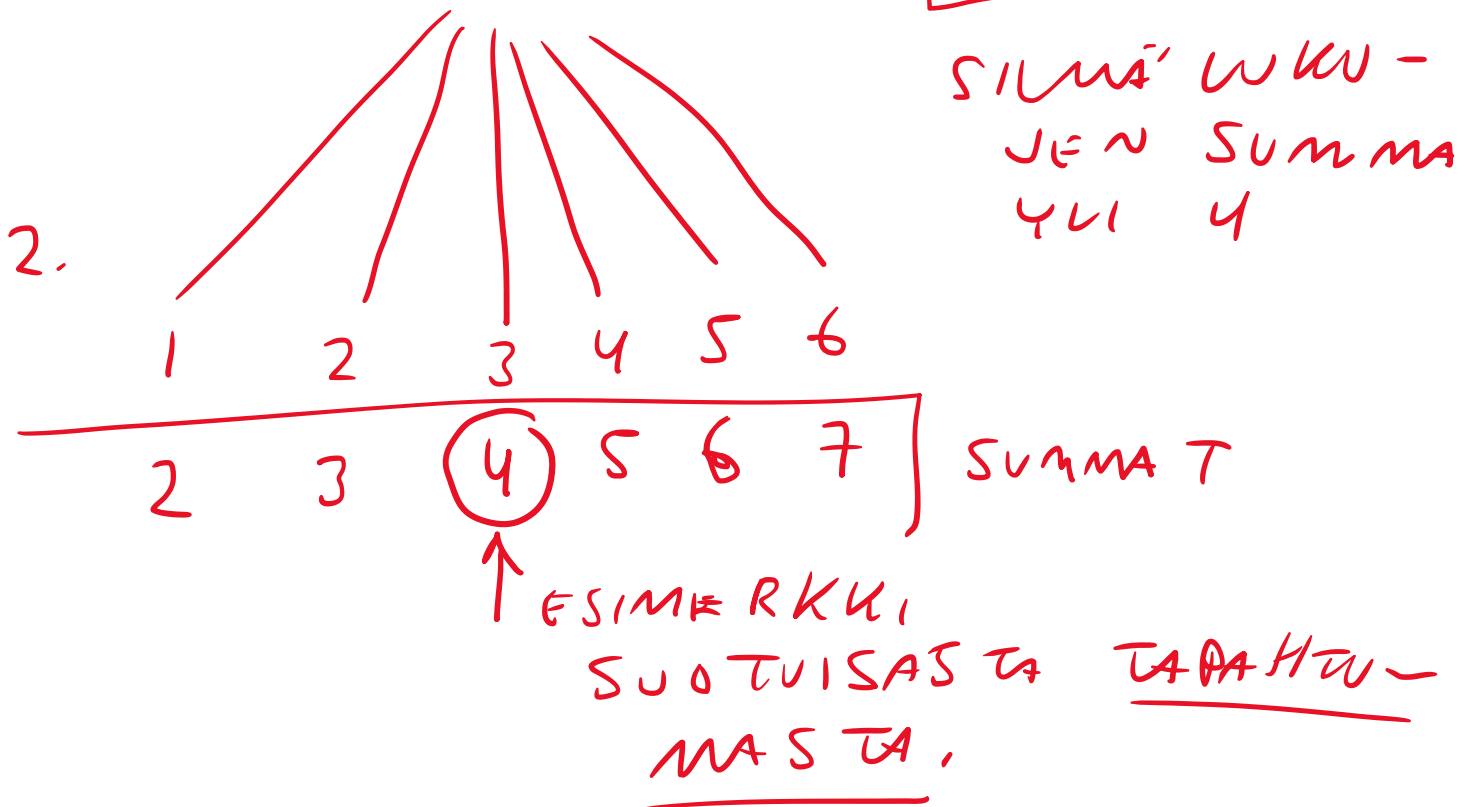
$$P(\text{SAADAAN PARITON}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

ESIM. HEITETÄÄN KAKHTA NOPPAA,
MILLÄ TODENNÄKÖISYYDELLÄ
SILMÄ LUKUJEN SUMMA ON 4?

RATK.

1. NOPPA





ALKEIS TAPAUSET = ASIA, MIKÄ VOI TAPAHTUA
ESIM,
1. NOPPA $\rightarrow 1$
2. NOPPA $\rightarrow 3$

TUOTTA TAPAHTUMA "SILMÄLUKUJEN
SUMMA = 4".

SUOTUISAT $1 + 3 = 4$
 $2 + 2 = 4$
 $3 + 2 = 4$

$$P(\text{SUMMA} = 4) = \frac{\text{SUOTUISAT}}{\text{KAIKKI}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \approx 0,083$$

VISUALISOINTI

VISUAL SORTING

NOPPA $\rightarrow$

1

NOPPA 2

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---

NOPPA ↓ SUOTUISAT	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

$$P(\text{summa } 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

KERTYMÄ

n	
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28

$$4 + 5 + 6 = 15$$

VOI LASKEA
KERTYMÄN AVULLA

$$4 + 5 + 6 = 21 - 6 = 15$$

EHDOULLINEN TODENNÄKÖISYYS

ESIM. HEITETÄÄN NOPPAA, 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$P(\text{PARITON}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ESIM. HEITETÄÄN NOPPAA,
MILLÄ TODENNÄKÖISYKSELÄ
SAADAAN PARITON, KUN

MILK ...
 SADAAN PARITON, KUN
 TIEDETÄIN, ETÄ SILMÄLUKU
 ON KURKEINTaan 3.

RATK.

"ehto"

$\boxed{1, 2, 3}, 4, 5, 6$

$$P(\text{PARITON} \mid \text{KUN ALLE 3})$$

$$= \frac{2}{3} = 0,66 \approx \underline{\underline{66\%}}$$

TAPA 2

$$P(\text{PARITON} \mid \text{ALLE 3})$$

$$= \frac{P(\text{PARITON})}{P(\text{ALLE 3})} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{3}{6}} = 1$$

Tehtävät 1

tiistai 7. marraskuuta 2023 18.47

TEHTÄVÄT 1

1. Tietotekniikan opiskelijoiden pituusjakauma on seuraava

<u>pituus (m)</u>	<u>opiskelijoiden lkm</u>
1.51 ... 1.53	2
1.54 ... 1.56	2
1.57 ... 1.59	5
1.60 ... 1.62	38
1.63 ... 1.65	62
1.66 ... 1.68	110
1.69 ... 1.71	126
1.72 ... 1.74	130
1.75 ... 1.77	126
1.78 ... 1.80	72
1.81 ... 1.83	42
1.84 ... 1.86	23
1.87 ... 1.89	7
1.90 ... 1.92	1

KÄYTIIN LÄPI
EXCELILLÄ

Millä todennäköisyydellä sattumanvaraisesti valittu opiskelija on pituudeltaan

a) yli 180 cm b) 163 ... 174 cm c) alle 160 cm ?

2. Opiskelijat arvioivat annetun janan pituuden. Heidän arviointivirheensä olivat seuraavat (cm):

2	3	0	5	6	1	2	4	3	1	3	2
1	0	1	1	0	2	1	1	0	5	0	2
5	3	1	1	2	0	4	3	0	0	2	1
0	3	5	4	2	0	5	3	1	6	2	4
1	1	4	7	2	0	2	1	0	4	4	3

TEHTIIN ITSE

Millä todennäköisyydellä sattumanvaraisesti valittu opiskelija arvioi kyseisen janan pituuden 1 cm tarkkuudella oikein?

3. Autotehdas teki listauksen siitä, missä vaiheessa heidän valmistamalle autolle tehtiin ensimmäinen korjaustoimenpide:

<u>km</u>	<u>ensikorjattujen autojen lkm</u>
0 - 10 000	50
10 001 - 20 000	93
20 001 - 30 000	293
30 001 - 40 000	391

1055603T1.nb

40 001 - 50 000	183
50 001 -	40

Millä todennäköisyydellä tehdään auto joutuu ensimmäisen kerran korjattavaksi, kun sillä on ajettu

- a) enintään 20 000 km
b) 20 001 - 30 000 km
c) 30 001 - 40 000 km
d) yli 40 000 km

Laske kohtien a - d todennäköisyyksien summa.

e) Millä todennäköisyydellä tehdään auto, jolle ensimmäistä korjaustoimenpidettä ei ole tarvinnut tehdä ensimmäisen 30 000 km aikana, joutuu ensikorjaukseen seuraavan 10 000 km aikana ?

TEHTIIN ITSE

4. Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä summa on

- a) 1 b) 5 c) 11 d) suurempi kuin 7 ?

TEHTIIN EXCELILLÄ

4. Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä summa on
a) 1 b) 5 c) 11 d) suurempi kuin 7?

5. Heitetään kolikkoa kolme kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan
a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0 kruunua?

6. Millä todennäköisyydellä numeroista 1, 2, 3, 4 ja 5 satunnaisesti muodostettu kaksinumeroinen luku on jaollinen 2:lla tai 5:llä, kun sama numero voi esiintyä kahdesti?

7. Millä todennäköisyydellä kahta noppaa heittämällä pistesummaksi saadaan 10, 11 tai 12?

8. Opiskelijoista saa arvosanan 5 matematiikan kokeissa 15%, fysiikan kokeissa 12% ja molemmissa 7%. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu opiskelija saa arvosanan 5 ainakin toisessa näistä kokeissa?

9. Suojatien jalankulkuvalot on säädetty siten, että tien ylittäjä joutuu odottamaan valojen vaihtumista max 40 s ja vihreä valo palaa 20 s. Millä todennäköisyydellä suojatien ylittäjä joutuu odottamaan valojen vaihtumista max 30 s?

10. Mikä on todennäköisyys nostaa kaksi ässää korttipakasta?

$$P = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$$

11. Laatikossa on 6 punaista palloa ja 4 mustaa palloa. Nostetaan kaksi palloa palauttamatta niitä laatikkoon. Millä todennäköisyydellä molemmat pallot ovat mustia?

ITSE

12. Heitetään noppaa neljä kertaa. Laske todennäköisyys, että saadaan
a) 2 kakkosta b) 4 parillista lukua c) ainakin 1 kuutonen.

13. Tehtaalla on 100 piirilevyä laatikossa ja kolme niistä on viallisia. Otetaan satunnaisesti kaksi piirilevyä laatikosta. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi piirilevyistä on ehjä?

14. Laske todennäköisyys, että heitettäessä kolikkoa kaksi kertaa saadaan
a) kaksi kruunua b) ainakin yksi klaava.

15. Kummalla on parempi todennäköisyys: saadaan pariton tai saadaan enintään 4 nopanheitossa?

Geometrisen todennäköisyyden

- Geometrisesti mallintamalla nähdään, että suotuisan mitan arvo on 5 (min), ja koko alueen 20 (min). Tällöin

$$P(A) = \frac{\text{suotuisan alueen suuruus}}{\text{koko alueen suuruus}} = \frac{5 \text{ min}}{20 \text{ min}} = \frac{1}{4}$$

$$= 0,00452$$



ÄSSIEN LUKUM,
KORTTIEN LUKUM,

AINAKIN
VÄHINTÄÄN
KORKEINTAAN

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

RATK. (13) $P(\text{AINAKIN YKSI ON EIJÄ})$
 $= 1 - P(\text{KUMPIKIN NOSTETTU ON RIKKI})$
 $= 1 - \frac{3}{100} \cdot \frac{2}{99}$
 $= 0,99739$

16. Lentokone oli ylibuukattu. Viidestä jonottajasta valitaan arvalla 2, jotka pääsevät koneeseen. Henkilöt Ari, Birgitta, Cecilia, Daniel ja Emma ovat jonossa. Laske todennäköisyydet
- a) Ari ja Emma pääsevät koneeseen.
 - b) yksi mies ja yksi nainen pääsee koneeseen.
 - c) yksikään mies ei pääse koneeseen.
17. Arvonnessa on neljä lipuketta. Lipukkeissa on numerot 1, 2, 3 ja 4. Nostetaan yksi lipuke, palautetaan se takaisin laatikkoon, ja nostetaan toinen lipuke. Kannattaako lyödä vetoa sen puolesta, että arvonnassa saadaan ainakin yksi ykkönen?
18. Sää tiedotus ilmoitti sadekuurojen mahdollisuudeksi lauantaina 30% ja sunnuntaina 60%. Millä todennäköisyydellä viikonloppuna sataa vettä?

SIIS ONKO
 $P(\text{AINAKIN YKSI YKKÖNEN}) > 50\% ?$

VASTAUKSET

1. a) 0,098 b) 0,57 c) 0,012
2. 0,43
3. a) 0,14 b) 0,28 c) 0,37 d) 0,21 e) 0,64
4. a) 0 b) 0,11 c) 0,056 d) 0,42
5. a) 0 b) 1/8 c) 3/8 d) 3/8 e) 1/8
6. 0,6
7. 0,17
8. 0,2
9. 0,83
10. 0,0045
11. 0,13
12. a) 0,12 b) 0,0625 c) 0,52
13. 0,999
14. a) 0,25 b) 0,75
15. todennäköisempää on saada korkeintaan 4
16. a) 0,1 b) 0,6 c) 0,3
17. ei kannata
18. 0,72

Luento 2

tiistai 7. marraskuuta 2023 18.53

5. Heitetään kolikkoa kolme kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan

- a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0 kruunua?

RATKAISU.

YHTIENSÄ

MERKITÄÄN

KRUUNA = 1

KLAAVA = 0

8 ERI MAHDOLLISUUTTA

$$\begin{aligned} &1 \{ 0 0 0 \\ &3 \{ \begin{aligned} &0 0 1 \\ &0 1 0 \\ &1 0 0 \end{aligned} \\ &3 \{ \begin{aligned} &0 1 1 \\ &1 0 1 \\ &1 1 0 \end{aligned} \\ &1 \{ 1 1 1 \end{aligned}$$

a) $P(4 \text{ KRUUNAA}) = 0$

b) $P(3 -11-) = \frac{1}{8}$

c) $P(2 -11-) = \frac{3}{8}$

d) $P(1 -11) = \frac{3}{8}$

e) $P(0 \text{ KRUUNAA}) = \frac{1}{8}$

SUMMA
= $\frac{1+3+3+1}{8}$

= $\frac{8}{8} = 1$

PASCALIN KOLMIO

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & \rightarrow 1 \\ & & 2 & \rightarrow 1 \quad 1 \\ & \text{SUMMA } 4 & \rightarrow & 1 \quad 2 \quad 1 \\ \text{SUMMA } 8 \rightarrow & & 1 & 3 \quad 3 \quad 1 \\ & 2^3 = 8 & & \\ \text{SUMMA } 16 \rightarrow & & 1 & 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ & 2^4 = 16 & & \end{array}$$

POLYNOMI-
LASKUSSA

KAKSI MUUTTUJAA

BINOMI

$$(x+y)^3 = 1x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1x^0y^3$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$1 = 1^n = \underbrace{(p + (1-p))}_1^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^{n-k} (1-p)^k$$

EXCEL-KAAVA

TODENNÄKÖISYYS
- ... ETÄ ESIM.

EXCEL-KAAVA

=BINOM.DIST(2;3;0,5;FALSE)

TODENNAKISUUS
SILLE, ETÄÄ ESIM.
HEITTÄMÄLLÄ KOLIKKOA
n KERTAA
SAADAAN k KRUUNAA

Heitetään kolikkoa kolmesti, millä todennäköisyydellä
saadaan 2 kruunaa?

P(2 kruunaa) =BINOM.DIST(2;3;0,5;FALSE)

0,375

=3/8=

0,375

TEHTÄVISTÄ 19 - 30 LYHYESTI

ILMIÖNÄ
PERMUTATIO

$$n!$$

TAI

k-PERMUTATIO

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

19. Montako erilaista istumajärjestystä luokan 32 opiskelijasta saadaan?

$$= 32!$$

20. a) 10 henkilöä kättelevät kaikki toisiaan. Montako kättelyä suoritetaan?

$$\approx \dots$$

b) 8 joukkuetta pelaavat pareittain. Montako ottelua pelataan?

TAI

KOMBINAATIO

21. Mielipidekyselyssä oli 6 kysymystä ja niissä jokaisessa oli 5 erilaista vastausmahdollisuutta.

Paljonko vastausmahdollisuuksia oli kaikkiaan (joka kysymykseen piti vastata)?

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

22. Jonossa on 3 poikaa ja 4 tyttöä niin, että tytöt ovat jonon alussa. Kuinka monta jonoa heistä voidaan muodostaa?

$$20 \cdot a$$

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!}$$

23. Opiskelijan tulee vastata 10 kysymyksestä kahdeksaan.

a) Montako erilaista vastausyhdistelmää hänellä on?

b) Entä jos näiden 8 vastauksen joukossa tulee olla vastaukset 3 ensimmäiseen kysymykseen?

$$\approx \dots$$

24. Montako erilaista ryhmää, jossa on 3 miestä ja 2 naista voidaan valita 7 miehestä ja 5 naisesta?

25. Salasana koostuu viidestä eri merkistä. Erilaisia merkkejä on käytössä 115.

a) Kuinka monta erilaista salasanaa voidaan muodostaa, kun merkkien järjestyksellä on väliä ja yhtä merkkiä saa käyttää vain kerran?

b) Jos yrittäisit arvata 5-merkkisen salasanan ja jokaiseen arvaukseen kuluisi 10s, kauanko kestäisi käydä kaikki mahdolliset salasanat läpi?

Palautettavat 3, lista

keskiviikko 22. marraskuuta 2023 18.49



Matematiikan viikkotehtävä 3 (palautus su 26.11.)

BINOMIJAKAUMA

Viikko 3 tehtävät

32. itse?

33. itse?

34. KATSOTTIIN YHDESSÄ

35. itse?

36. itse?

37. itse?

Jos käy vähäksi (katsotaan tilanne 22.11.), niin lisää seuraavista tehtävistä..

38. itse?

39. itse?

40. itse?

41. itse?

42. itse?

43. itse?

44. itse?

(Tehtävät 52.-61. lienevät haastavia. On hyvä, jos näiden käsittelyyn jää enemmän aikaa kurssin lopussa.)

TEHTÄVÄT SAA LASKEA
MILLÄ TÄHÄNSÄ
TAVALLA

— KÄSIN

— EXCELILLÄ

— PYTHONILLA

JNE.

→ SAA PISTEET

OH! OH!

3 ODO TUSA RVON LASKE MISTA, ESIM FRKKI I

] PALAUTETTAVAT

PALAUTETTAVAT

7 POISSON JAKAUMA

31. Onnenpyörä on jaettu 8 yhtäsuureen sektoriin, joista yksi on jokerisektori. Olkoon x satunnaismuuttuja, joka ilmoittaa jokerien määrän kolmessa pyörytyksessä. Määritä jakauma ja laske odotusarvo.
32. Koripalloilijan onnistumistodennäköisyys saada kori on 0,70. Hän saa kaksi vapaaheittoa peräkkäin. Mikä on onnistuneiden heittojen lukumäärän odotusarvo?
33. Olkoon $x \sim \text{Bin}(n, p)$. Määritä n ja p , kun $\mu = 2$ ja $\sigma^2 = \frac{4}{3}$.
34. Heitetään noppaa 4 kertaa. Tee jakauma kuutosten lukumäärästä.
35. Tuotantolinjalla tarkastetaan tuotteiden tasoa. Todennäköisyys, että tuote ei ole hyväksyttävä on 0.20. Otetaan kaksi sattumanvaraista tuotetta. Muodosta jakauma ja laske odotusarvo sekä keskihajonta.
36. ~~Laatikossa on 3 mustaa ja 3 valkoista palloa. Nostetaan laatikosta kolme palloa. Laske saatujen valkoisten pallojen lukumäärän odotusarvo.~~ OHI

37. Kilpailun palkintona on rahasumma, joka määräytyy arpomalla. Palkinnon jakajalla on 5 kirjekuorta, joissa on rahaa 10€, 20€, 30€, 40€ ja 50€. Voittaja saa valita ~~kaksi kirjekuorta~~ ^{YHDEN KIRJEKUOREN}. Satunnaismuuttuja x ilmoittaa yhteensä saadun voittosumman. Laske satunnaismuuttujan odotusarvo.

RATKAISU.

ODOTUSARVO
$$\mu = \sum_k k P(X=k)$$

JOKAISELLE KIRJEKUORELLE NOS TODENNÄKÖISYYS

$$0 \sim P = \frac{1}{5}.$$

ODOTUSARVO
$$\begin{aligned} &= 10 \cdot \frac{1}{5} + 20 \cdot \frac{1}{5} + 30 \cdot \frac{1}{5} + 40 \cdot \frac{1}{5} + 50 \cdot \frac{1}{5} \\ &= (10 + 20 + 30 + 40 + 50) \cdot \frac{1}{5} \\ &= 150 \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{30 \cdot 5}{5} = \underline{\underline{30 \text{ €}}} \end{aligned}$$

38. Arpajaisissa on 1000 arpaa ja niissä on voittoja seuraavasti 1 kpl 100€, 10 kpl 50€ ja 15 kpl 20€. Yksi arpa maksaa 1 €. Laske nettovoiton odotusarvo.

39. Heitetään kahta kolikkoa kerran. Jos saa yhden kruunan, niin voittaa 20€. Jos saa kaksi kruunaa, niin voittaa 40€. Jos saa kaksi klaavaa, niin häviää 100€. Laske voiton odotusarvo.

40. Lompakossa on 6 kpl 1€, 4 kpl 2€ ja 2 kpl 50 sentin kolikoita. Otetaan lompakosta yksi kolikko. Muodosta jakauma.

41. Opiskelijat heittivät kuutta kolikkoa 90 kertaa. Taulukosta voidaan nähdä saatujen kruunujen lukumäärä eri heittokerroilla:

0	2	3	2	4	3	4	3	3	4	1	4	3	4	5	3	4	4	4	4	3	2	1
4	2	3	4	2	5	3	4	2	4	2	1	2	4	2	1	4	3	2	2	1	5	2
3	1	5	3	3	3	1	5	4	2	3	4	1	3	5	5	3	2	5	3	2	3	4
2	3	3	3	2	5	4	5	5	0	5	2	3	3	4	3	0	4	1	2	4		

Muodosta aineiston jakauma.

OHI

VARIANSSI

33. Olkoon $x \sim \text{Bin}(n, p)$. Määritä n ja p , kun $\mu = 2$ ja $\sigma^2 = \frac{4}{3}$.

BINOMIJAKAUMA

$$X \sim \text{BIN}(n, p)$$

SATUNNAIS-
MUUTTUJATOISTOJEN
LUKUMÄÄRÄ

TODENNÄKISYYS

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = np(1-p)$$

JOKIN
KOETTA(ONNISTUU
TODENNÄKÖI-
SYDOLLÄ p)YRITE TÄÄN
 n KERTAAMILÄ TODENNÄKÖISYDOLLÄ ONNISTUU k KERTAA?

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)! k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

32. Koripalloilijan onnistumistodennäköisyys saada kori on 0,70. Hän saa kaksi vapaaheittoa peräkkäin. Mikä on onnistuneiden heittojen lukumäärän odotusarvo?

RATK. $P(\underset{k}{0} \text{ ONNISTUU}) = \binom{2}{0} p^0 (1-p)^{2-0}$

$$= \frac{2!}{2! 0!} \underbrace{0,7^0}_{=1} \cdot \underbrace{0,3^2}_{=0,09} = 0,09$$

$$P(k=1) = \binom{2}{1} p^1 (1-p)^{2-1}$$

$$= \frac{\underbrace{2!}_{=2}}{\underbrace{(2-1)!}_{=1} \underbrace{1!}_{=1}} 0,7^1 \cdot 0,3^1 = \frac{2 \cdot 0,7 \cdot 0,3}{0,21} = 0,42$$

$$P(k=2) = 1 - P(k=0) - P(k=1)$$

$$= 1 - 0,09 - 0,42 = 1 - 0,51 = 0,49$$

$$\text{ODOTUSARVO } \mu = \sum_{k=0}^2 k P(X=k)$$

ODOTUSARVO $\mu = \sum_{k=0}^2 k P(X=k)$

SUMMA $\nearrow$

$$= \cancel{0 \cdot 0.09} + \underbrace{1 \cdot 0.42}_{0.42} + \underbrace{2 \cdot 0.49}_{=0.98} = \underline{\underline{1.4}} \quad \begin{array}{l} \text{KOKIA} \\ \text{SAA} \end{array}$$

$$\mu = np$$

$$= 2 \cdot 0.7 = \underline{\underline{1.4}}$$

33. Olkoon $x \sim \text{Bin}(n, p)$. Määritä n ja p , kun $\mu = 2$ ja $\sigma^2 = \frac{4}{3}$.

RATK,

$$\mu = np$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$n = ?$$

$$\sigma^2 = np(1-p) = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$p = ?$$

RATKAISTAAN p

$$\sigma^2 = \underbrace{np}_{=\mu}(1-p) = \mu(1-p) \Rightarrow \sigma^2 = \mu(1-p)$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{\mu} = 1-p$$

SITTE N

$$\Rightarrow p = 1 - \frac{\sigma^2}{\mu} = 1 - \frac{\frac{4}{3}}{2}$$

RATKAISTAAN n

$$= 1 - \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$\mu = np$$

$$\Rightarrow n = \frac{\mu}{p}$$

$$= \frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)} = \underline{\underline{6}}$$

$$= \frac{1}{\binom{3}{1}} =$$

35. Tuotantolinjalla tarkastetaan tuotteiden tasoa. Todennäköisyys, että tuote ei ole hyväksyttävä on 0.20. Otetaan kaksi sattumanvaraista tuotetta. Muodosta jakauma ja laske odotusarvo sekä keskihajonta.

BINOMIJAKAUMA

$$p = 0.2$$

$$n = 2$$

X = RIKKINÄISTEN
LUKUMÄÄRI
LINJALTA
OTE TISSA
KÄHOESSA

$$X \sim \text{BIN}(2, 0.2)$$

ODOTUSARVO
RIKKINÄISILLE

$$\mu = np = 2 \cdot 0.2 = \underline{\underline{0.4}}$$

$$\sigma = np(1-p) = 2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = \underline{\underline{0.32}}$$

EHJILLE TUOTTEILLE JAKAUMA

$$n = 2$$

$$p = 0.8$$

$$\mu (\text{EHJEN LUKUMÄÄRI}) = np = \underline{\underline{1.6}}$$

$$\text{VARIANSSI} = \sigma^2 (\text{---} | \text{---}) = np(1-p) = 0.32$$

$$\text{KESKI HAJONTA} = \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{0.32} = \underline{\underline{0.57}}$$

37. Kilpailun palkintona on rahasumma, joka määräytyy arpomalla. Palkinnon jakajalla on 5 kirjekuorta, joissa on rahaa 10€, 20€, 30€, 40€ ja 50€. Voittaja saa valita kaksi kirjekuorta. Satunnaismuuttuja x ilmoittaa yhteensä saadun voittosumman. Laske satunnaismuuttujan odotusarvo.

BINOMIJAKAUMA

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = np(1-p)$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

POISSON - JAKAUMA

$$\text{MERK. } np = \lambda$$

$$\Rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \xrightarrow{e^{-1}}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)! k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$n \rightarrow \infty \rightarrow = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot 1$$

POISSON - JAKAUMA

BINOMIJAKAUMAN RAJA-ARVO

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda$$

43. Jos keskimäärin kaksi autoa saapuu tiettyyn parkkipaikkaan minuutissa, millä tod.näk. minkä tahansa annetun minuutin aikana 4 tai useampi auto saapuu parkkipaikalle?

RATK. TEHTÄVÄN VOI TEHDÄ POISSON - JAKAUMALLA,

MUTTA PÖHDITÄÄN MIKSI.

AJAUS.

1

$p = \frac{\lambda}{n}$

$p = \frac{\lambda}{n}$

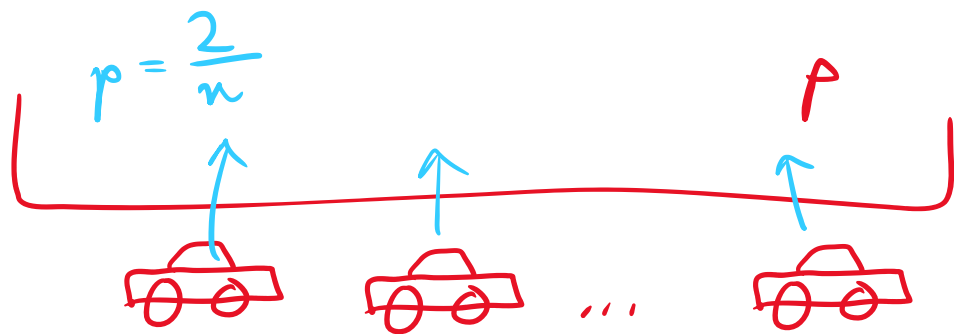
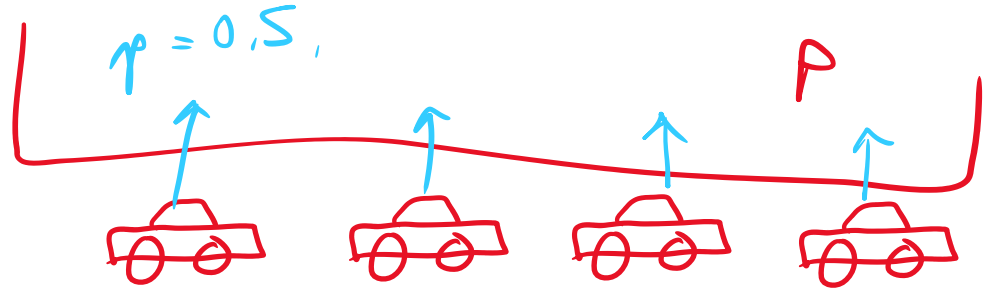
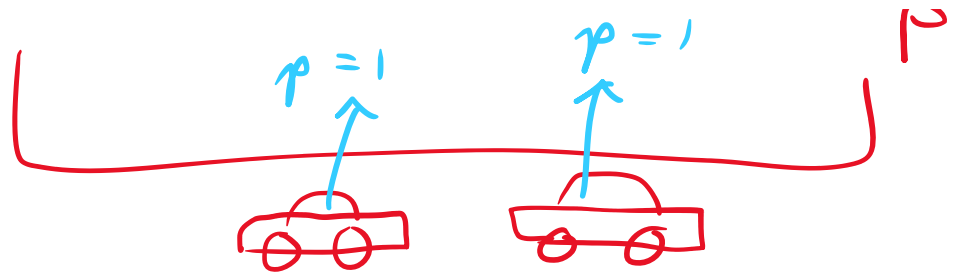
p

AJAUS,

MINUUTISSA

TAI

TAI



n kpl

OTFUTAN
ISO n
ESIM, $n=1000$

$$p = \frac{2}{1000} = 0.002$$

$$X \sim \text{BIN}(1000, 0.002)$$

$$P(X \geq 4)$$

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3)$$
$$= 0.14$$

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

TAPA 2

KÄYTTÄÄN
POISSON -
JAKAUMAA

NYT $\lambda = 2$.

NKT $\lambda = 2$.

SAMA

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X=0)$$

$$- P(X=1)$$

$$- P(X=2)$$

$$- P(X=3)$$

$$= 1 - \frac{2^0}{0!} e^{-2} - \frac{2^1}{1!} e^{-2} - \frac{2^2}{2!} e^{-2} - \frac{2^3}{3!} e^{-2}$$

$$= 1 - \left(1 + 2 + 2 + \frac{8}{6} \right) e^{-2}$$

$$\approx 0.142876...$$

$$\approx \underline{\underline{0.14}}$$

38. Arpajaisissa on 1000 arpaa ja niissä on voittoja seuraavasti 1 kpl 100€, 10 kpl 50€ ja 15 kpl 20€. Yksi arpa maksaa 1 €. Laske nettovoiton odotusarvo.

$$\text{ODOTUSARVO} = \mu = \sum_k k P(X=k)$$

ESIMERKKI. HEITETÄÄN NOPPAA.

$$\begin{aligned} \text{SILMÄLUVUN ODOTUSARVO} &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} \\ &\quad + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \dots = \underline{\underline{3,5}} \end{aligned}$$

39. Heitetään kahta kolikkoa kerran. Jos saa yhden kruunan, niin voittaa 20€. Jos saa kaksi kruunaa, niin voittaa 40€. Jos saa kaksi klaavaa, niin häviää 100€. Laske voiton odotusarvo.

42. Todennäköisyys, että levyohjain vikaantuu viikon aikana on 0.007. Tietokoneen palveluyritys ylläpitää 900 levyohjainta. Laske Poisson-jakauman avulla todennäköisyys, että

a) 7 b) enemmän kuin 3 levyohjainta vikaantuu viikossa.

$$\begin{cases} p = 0.007 \\ n = 900 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda = np$$

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\textcircled{a} P(X=7) = \dots$$

$$\begin{aligned} \textcircled{b} P &= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) \\ &= \dots \end{aligned}$$

44. Koululla on paljon tietokoneita. Yhden kuukauden aikana tyypillisesti yksi koneista menee rikki. Mikä on todennäköisyys, että vähemmän kuin kaksi tietokonetta menee rikki?

$$\lambda = 1$$

$$P = P(X=0) + P(X=1) = \dots$$

Normaalijakauma, luottamusväli

tiistai 28. marraskuuta 2023 16.47

ERÄISSÄ IHMISPOPULAATIOSSA

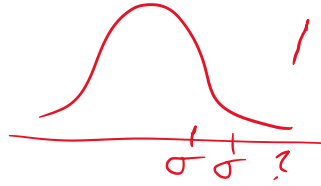
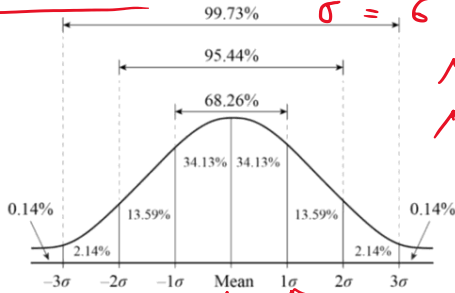
ESIMERKKI.

$$\mu = 177 \text{ cm}$$

$$\sigma = 6 \text{ cm}$$

$$\mu + \sigma = 177 + 6 = 183 \text{ cm}$$

$$\mu - \sigma = 177 - 6 = 171 \text{ cm}$$

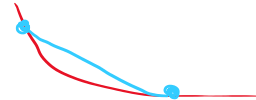


P(Henkilön pituus välillä 177... 183)
 = 68% = 0,68

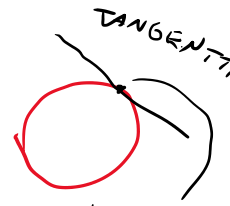
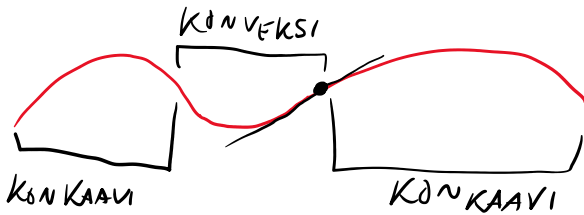
σ PAIKKA KUVASSA?



KONKAAVI
 JANAT ALAPOULELLA



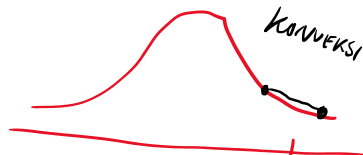
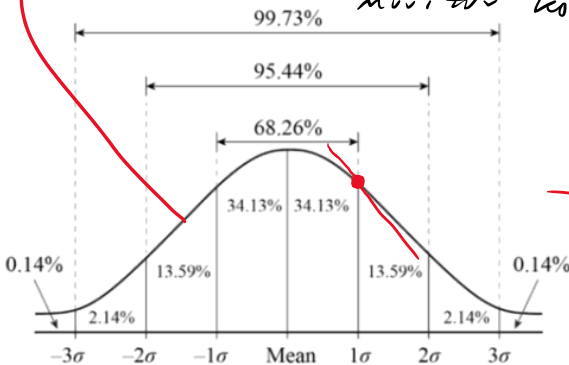
KONVEKSI
 JANAT YLÄPOULELLA



HIPAISEE
 KONKAVE
 SAMAN
 SUUNTAAN

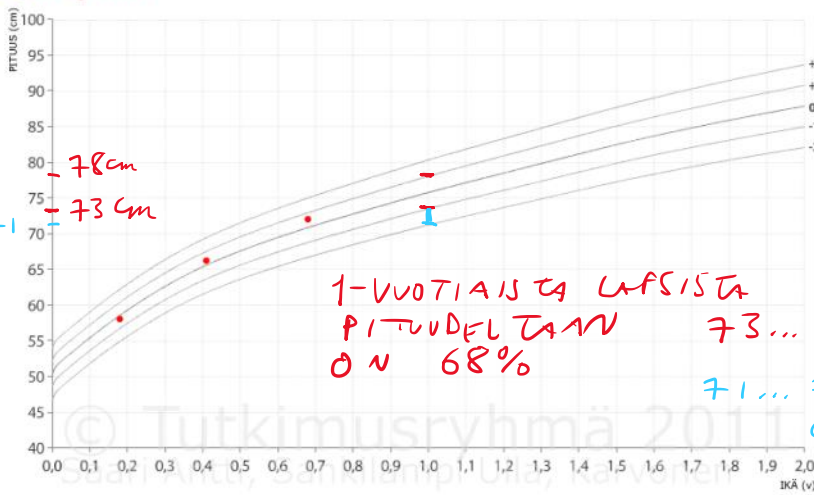
$$y = f(x) \Rightarrow f''(x) = 0$$

KONKAAVI
 MUUTTUU
 KONVEKSIKSI

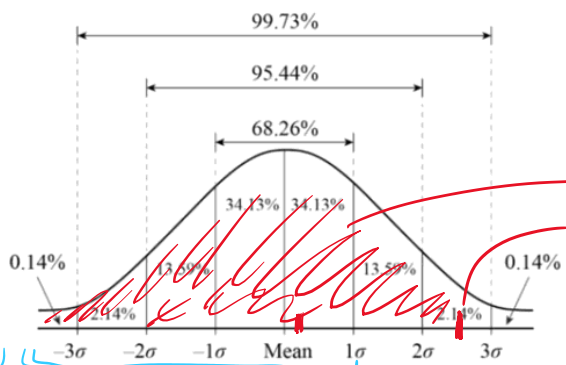


EI
 HYVÄ KUVA

ESIM. LASTEN PITUUS

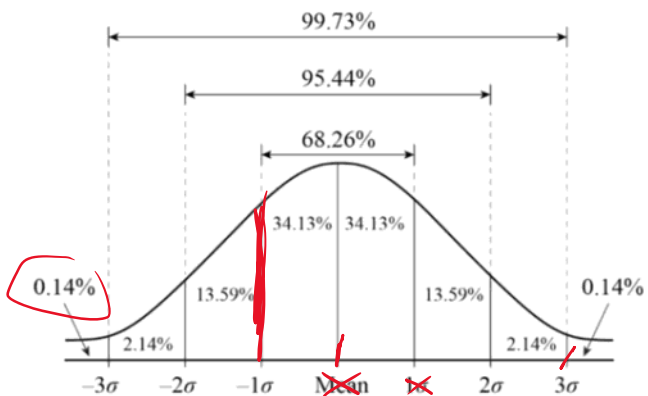


TAULUKKO ARVOJA NORMAALISÄKAUMASTA



$\Phi(z)$ "F"

NÄITÄ ARVOJA
LÖYTÄY
TAULUKOSTA



$$\Phi(-1) = 0.14$$

$$+ 2.14$$

$$+ 13.59$$

$$\Phi(-1) = 15.87$$

$$\Phi(1) = 15.87$$

$$+ 68.26$$

$$\Phi(1) = 84.13$$

$$\Phi(-1) + \Phi(1) = 100\% = 1$$

$$\Phi(-a) + \Phi(a) = 1$$

RITTGÄ

https://www.wolframalpha.com/input?i=%281%2Fsqrt%282*pi%29%29*int+from+-infy+to+1+exp%28-t%5E2%2F2%29+dt

 NATURAL LANGUAGE

 $\int_{-\infty}^{\infty}$ MATH INPUT

You are screen sharing

EXTENDED KEYBOARD

Stop
EX

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^1 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$
$$\frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1 \right) \approx 0.841345$$

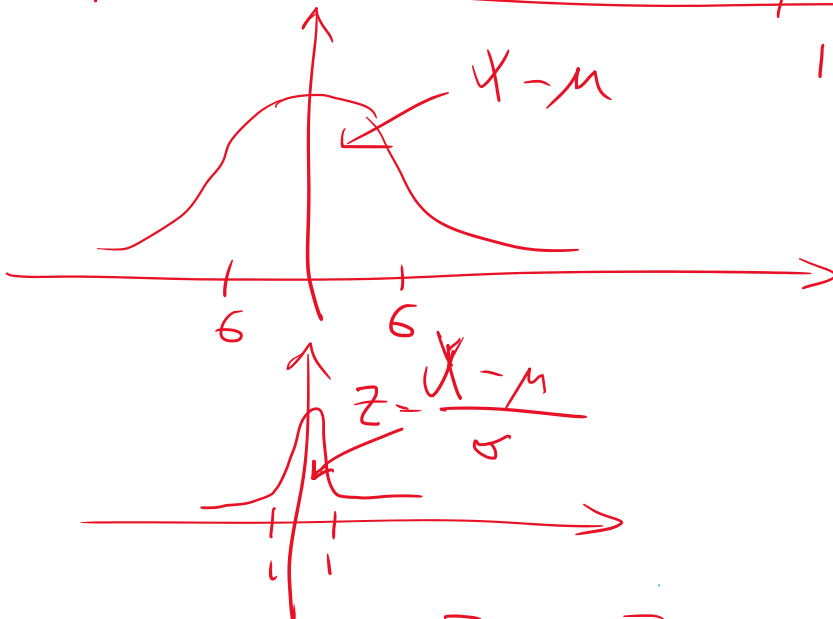
https://www.wolframalpha.com/input/?i=%281%2Fsqrt%282*pi%29%29%int+from+-1+to+1+exp%28-t%5E2%2F2%29+dt

 NATURAL LANGUAGE

 MATH INPUT

You are screen sharing

EXTENDED KEYBOARD

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$
$$\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.682689$$


$$\Phi(b) - \Phi(a) \quad \Phi(1,5) - \Phi(-1)$$

$$\Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\Phi(1.5) - \Phi(-1)$$

$$= \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1))$$

LOF TAULUKKO

45. Satunnaismuuttuja x noudattaa normaalijakaumaa. Laske todennäköisyydet

a) $P(z \leq 0.25)$

b) $P(1.2 \leq z \leq 2.1)$

c) $P(-1 \leq z \leq 1.5)$

46. Satunnaismuuttuja x noudattaa normaalijakaumaa. Odotusarvo on 8 ja keskihajonta 1.7.

Laske todennäköisyys, että $7 \leq x \leq 12.2$.

SAMANKALUIN

KUIN LOF TAULUKKO

47. Kännykän akkuja valmistava yritys on todennut, että akkujen elinikä vuosina noudattaa normaalijakaumaa $N(3; 1.2)$. Yksi valmistuserä on 7000 kpl. Kuinka monen akun voidaan olettaa toimivan viiden vuoden kuluttua?

$$X \sim N(18, 3)$$

48. Miesten pituusjakauma on normaali ja odotusarvo on 175 cm ja keskihajonta on 8 cm.

Kuinka monta prosenttia miehistä on yli 2 m?

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

49. Tuotteiden paino noudattaa normaalijakaumaa $N(80 \text{ kg}; 4 \text{ kg})$.

a) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu tuote painaa 77 ... 80 kg?

b) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu tuote painaa yli 80 kg?

$$a' = \frac{a - \mu}{\sigma}$$

$$b' = \frac{b - \mu}{\sigma}$$

50. Olkoon X normaali, jonka odotusarvo on 5 ja varianssi 0.04. Määritä vastaava x , jolle on annettu todennäköisyydet a) $P(X \leq x) = 95\%$ b) $P(X > x) = 1\%$

$$P(a' \leq z < b')$$

$$= \Phi(b') - \Phi(a')$$

51. Vastuksen resistanssi noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 3 Ω ja keskihajonta on 0.1 Ω . Laske todennäköisyys, että vastuksen resistanssi on

a) 2.9 ... 3.05 Ω b) enemmän kuin 2.95 Ω c) vähemmän kuin 2.83 Ω .

45. Satunnaismuuttuja x noudattaa normaalijakaumaa. Laske todennäköisyydet
 a) $P(z \leq 0.25)$ b) $P(1.2 \leq z \leq 2.1)$ c) $P(-1 \leq z \leq 1.5)$
46. Satunnaismuuttuja x noudattaa normaalijakaumaa. Odotusarvo on 8 ja keskihajonta 1.7.
 Laske todennäköisyys, että $7 \leq x \leq 12.2$.
47. Kännykän akkuja valmistava yritys on todennut, että akkujen elinikä vuosina noudattaa normaalijakaumaa $N(3; 1.2)$. Yksi valmistuserä on 7000 kpl. Kuinka monen akun voidaan olettaa toimivan viiden vuoden kuluttua?
48. Miesten pituusjakauma on normaali ja odotusarvo on 175 cm ja keskihajonta on 8 cm.
 Kuinka monta prosenttia miehistä on yli 2 m?
49. Tuotteiden paino noudattaa normaalijakaumaa $N(80 \text{ kg}; 4 \text{ kg})$.
 a) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu tuote painaa 77 ... 80 kg?
 b) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu tuote painaa yli 80 kg?
50. Olkoon X normaali, jonka odotusarvo on 5 ja varianssi 0.04. Määritä vastaava x , jolle on annettu todennäköisyydet
 a) $P(X \leq x) = 95\%$ b) $P(X > x) = 1\%$
51. Vastuksen resistanssi noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 3Ω ja keskihajonta on 0.1Ω . Laske todennäköisyys, että vastuksen resistanssi on
 a) $2.9 \dots 3.05 \Omega$ b) enemmän kuin 2.95Ω c) vähemmän kuin 2.83Ω .

HANKALAMPI

ETKÄ
AUTTAA
↓

$$\Phi(a) = 0.9, a = ?$$

VASTAUS
LÖYTÄY TAVLUKOSTA

the normed normal distribution.
 Example
 $P(X < -1,2) = 1 - P(X \leq 1,2) = 0,1151$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177

$\Phi(a) = 0.9$
 $\Rightarrow a = 1.28$

Book1 - Excel

Search

Draw Page Layout Formulas Data Review View Automate Help

Font Alignment

General

Conditional Formatting Format as Table Cell Styles Insert Delete Format

You are screen sharing Stop Share

B	C	D	E	F	G
0,84134	=NORM.DIST(1;0;1;TRUE)	kertymän lukeminen			
1,28155	=NORM.INV(0,9;0;1)	kertymän arvoa vastaavan Z-arvon lukeminen			

~~ALOITETAAN 19.10.~~

~~TÄNÄÄN~~

EI KETÄÄN LINJOILLA 19.10

~~— VOIDAAN KÄYÄÄ LÄPI TUKIEXCELIA~~

— SAA KYSELLÄ, KÄYV VÄLILLÄ
HUONEESSA
CHÄTTIÄ
LUKEMASSA

JUHA-MATTI KÄY TARVITTAESSA PAIKALLA
17.15 →

KAIKKI KOE TEHTÄVÄT OVAT
HARJOITUSTEHTÄVIÄ MUOKATUILLA
LUKVARVOILLA.
KOE ENSI VIIKOLLA.

KOKEEN LUONNOS

① Tietotekniikan opiskelijoiden pituusjakauma on seuraava

pituus (m)	opiskelijoiden lkm
1.51 ... 1.53	2
1.54 ... 1.56	2
1.57 ... 1.59	5
1.60 ... 1.62	38
1.63 ... 1.65	62
1.66 ... 1.68	110
1.69 ... 1.71	126
1.72 ... 1.74	130
1.75 ... 1.77	126 110
1.78 ... 1.80	72
1.81 ... 1.83	42
1.84 ... 1.86	23
1.87 ... 1.89	7
1.90 ... 1.92	1

KAIKKIEEN LKM

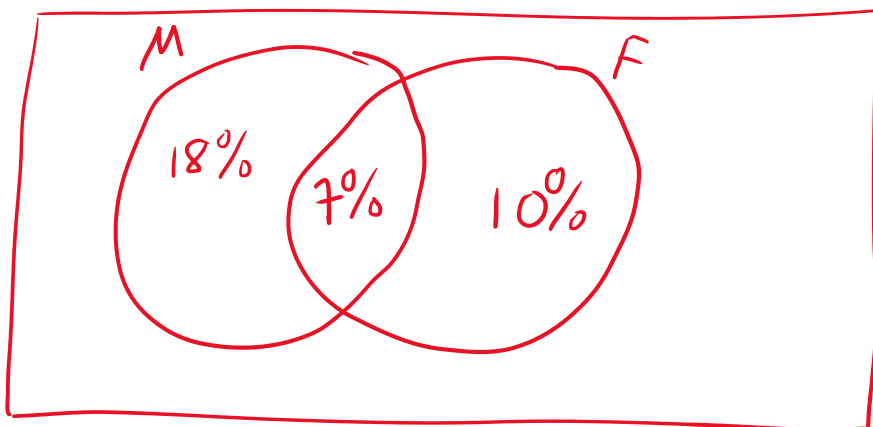
$$P = \frac{\text{SUOT. LKM}}{\text{KAIKKIEEN LKM}}$$

Millä todennäköisyydellä sattumanvaraisesti valittu opiskelija on pituudeltaan

a) yli 180 cm ~~67/165 ... 1/4 cm~~ ~~67/165 ... 1/4 cm~~

174

② 8. Opiskelijoista saa arvosanan 5 matematiikan kokeissa ~~15%~~ 25%, fysiikan kokeissa ~~12%~~ 17% ja molemmissa 7%. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu opiskelija saa arvosanan 5 ainakin toisessa näistä kokeissa?



$$25\% - 7\% = 18\%$$

$$17\% - 7\% = 10\%$$

$$P = \left(\frac{18}{+7} + \frac{10}{+10} \right) \% = 35\%$$

③ 18. Sää tiedotus ilmoitti sadekuurojen mahdollisuudeksi lauantaina ~~30%~~ 40% ja sunnuntaina ~~60%~~ 70%.
Millä todennäköisyydellä viikonloppuna sataa vettä?

18. Sää tiedotus ilmoitti sadekuurojen mahdollisuudeksi lauantaina 30% ja sunnuntaina 60%.
Millä todennäköisyydellä viikonloppuna sataa vettä?

$$\begin{aligned}
 &P(\text{viikonloppuna sataa}) \\
 &= 1 - P(\text{viikonloppuna ei sataa}) \\
 &= 1 - P(\text{ei sataa lauantaina}) \cdot P(\text{ei sataa sunnuntaina}) \\
 &= 1 - (1 - 0,4) \cdot (1 - 0,7) = 1 - \underbrace{0,6 \cdot 0,3}_{0,18} = \underline{\underline{0,82}} = 82\%
 \end{aligned}$$

(u) 24. Montako erilaista ryhmää, jossa on 3 miestä ja 2 naista voidaan valita 7 miehestä ja 5 naisesta?

30 22 70 50

24. Montako erilaista ryhmää, jossa on 3 miestä ja 2 naista voidaan valita 7 miehestä ja 5 naisesta?

RATK. MONESSA LASKIMESSA/OHJELMISSA

KOMBINAATIOIDEN LUKUMÄÄRÄ

$$\begin{aligned}
 &= \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \text{CHOOSE}(n, k) \\
 &= \text{"VALITSE } n\text{:stä } k\text{: kpl."}
 \end{aligned}$$

MIESTEN VALINTATAPOJA = $\binom{7}{3}$

NAISTEN — " — = $\binom{5}{2}$

RYHMÄ

$$\begin{aligned}
 &= \binom{7}{3} \binom{5}{2} = \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{5!}{2!3!} = 35 \cdot 10 = 350
 \end{aligned}$$

$\underbrace{3! \cdot 4!}_{= 1 \cdot 2 \cdot 3}$ $\underbrace{2! \cdot 3!}_{= 2 \cdot 3}$

SAA LASKEA
LASKIMELLA

(5) 100

28. Noppaa heitetään kymmenen kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan tasan 3 kuutosta?

KUUTOSIA 16 - 18 kpl?

RATK. BINOMIJAKUMA

$$n = 100$$

$$p = \frac{1}{6}$$

$$\text{BIN}(100, \frac{1}{6})$$

$$P(\text{kuutusia } k \text{ kpl})$$

$$P(\text{kuutosia } k \text{ kpl}) = \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k} \quad p = \frac{1}{6} \quad \text{BIN}(100, \frac{1}{6})$$

$$P(\text{kuutosia } 16-18 \text{ kpl}) = P(16 \text{ kpl}) + P(17 \text{ kpl}) + P(18 \text{ kpl})$$

$$= \underbrace{\binom{100}{16} \left(\frac{1}{6}\right)^{16} \left(\frac{5}{6}\right)^{84}}_{0,1065} + \underbrace{\binom{100}{17} \left(\frac{1}{6}\right)^{17} \left(\frac{5}{6}\right)^{83}}_{0,1052} + \underbrace{\binom{100}{18} \left(\frac{1}{6}\right)^{18} \left(\frac{5}{6}\right)^{82}}_{0,0970}$$

← LASKIN

⑥

$$\text{NETTOVOITTO} = 100\text{€} - 1\text{€} = 99\text{€}$$

$$\text{BRUTTOVOITTO} \rightarrow$$

38. Arpajaisissa on 1000 arpaa ja niissä on voittoja seuraavasti 1 kpl 100€, 10 kpl 50€ ja 15 kpl 20€. Yksi arpa maksaa 1 €. Laske nettovoiton odotusarvo.

RATK. ODOTUSARVO = PAINOTETTU KESKIARVO

$$= \sum_k \underbrace{V_{\text{OITTO } k}}_{\text{ERILAISIA VOITTOJA}} \cdot \underbrace{P(k)}_{\substack{\uparrow \\ \text{PAINOJA /} \\ \text{TODENNÄK.}}}$$

$$= 99 \cdot \frac{1}{1000} + 49 \cdot \frac{10}{1000} + 19 \cdot \frac{15}{1000} - 1 \cdot \frac{1000 - (1 + 10 + 15)}{1000}$$

$$= \frac{99 + 490 + 285 - 974}{1000} = \frac{874}{1000}$$

OctaveOnline

Vars

```
octave:1> 99/1000+49/100+19*15/1000-974/1000
ans = -0.1000
```

VASTAUS: NETTOVOITTON ODOTUSARVO = -0,10€

⑦

51. Vastuksen resistanssi noudattaa normaalijakumaa, jonka odotusarvo on 3 Ω ja keskihajonta on 0.1Ω. Laske todennäköisyys, että vastuksen resistanssi on
~~a) 2.9 ... 3.05 Ω~~ ~~b) enemmän kuin 2.95 Ω~~ c) vähemmän kuin 2.83 Ω.

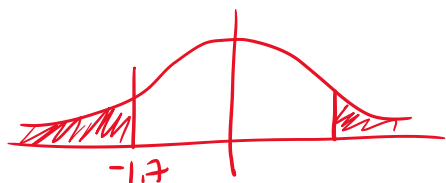
$$P(R < 2.83 \Omega) = P(Z < -1.7) = \Phi(-1.7)$$

$$P(R < 2.83\Omega) = P(Z < -1.7) = \Phi(-1.7)$$

$$\text{TÄLLÄKKÖ} \rightarrow = 1 - \Phi(1.7)$$

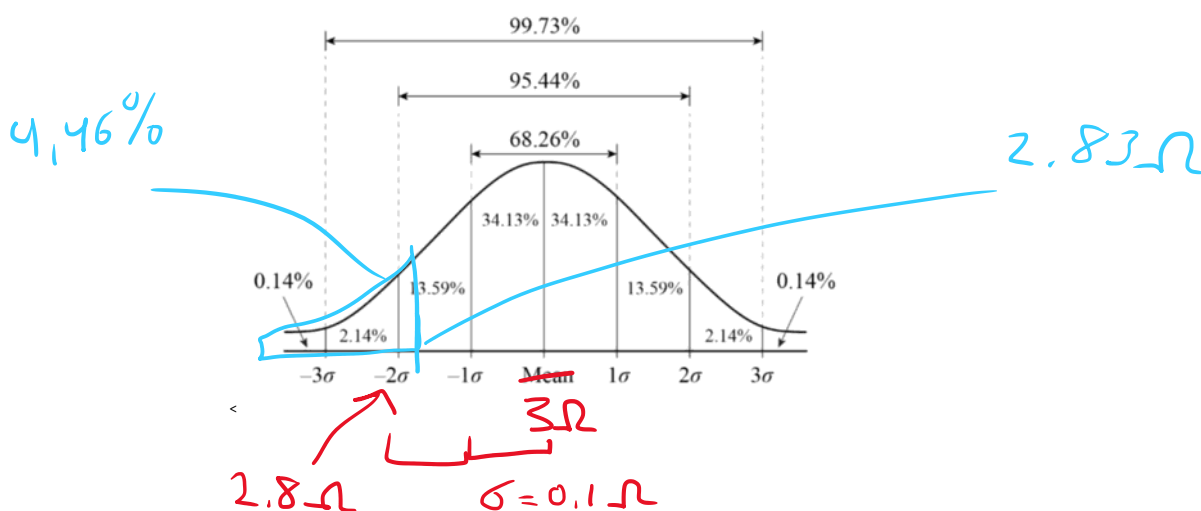
$$= 1 - 0.9554$$

$$= 0.0446 \approx \underline{\underline{4.46\%}}$$



$$X_0 = 2.83 \leftarrow \text{NORMFERRAATTO} \quad X \sim N(3, 0.1)$$

$$Z_0 = \frac{2.83 - 3}{0.1} = \frac{-0.17}{0.1} = -1.7 \leftarrow \text{NORMFERRAATTO} \quad Z \sim N(0, 1)$$



8

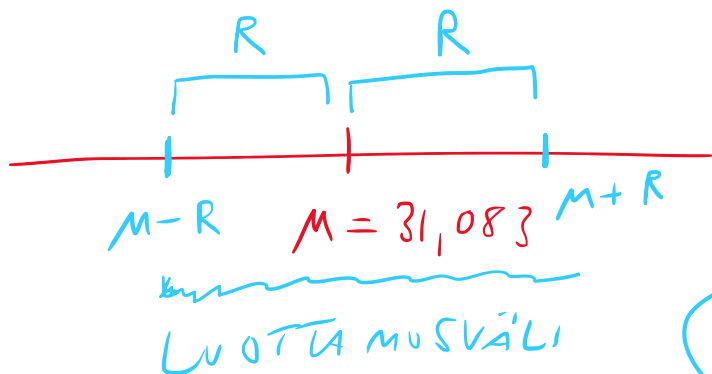
52. Määritä 99% luottamusväli keskiarvolle, kun muuttujan jakauma on likimain normaali ja keskihajonta on 2,5 käyttämällä otosta: 30,8; 30,0; 29,9; 30,1; 31,7; 34,0.

KESKIARVO

$$\bar{M} = 31.083$$

RATK. $\sigma = 2.5$ ANNETTU $\Rightarrow$ NORMAALI JAKAUMA

~~Studentin t-jakauma~~
 $n = 6$

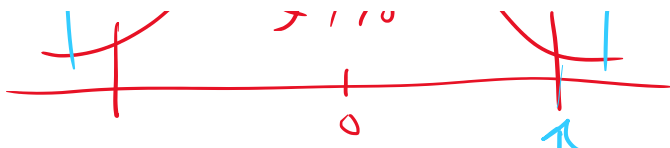


$$R = Z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 2.58 \cdot \frac{2.5}{\sqrt{6}}$$

$$= 2.6332$$





$$z = \Phi^{-1}\left(\frac{99+0.5}{100}\right) = \Phi^{-1}(0,995) = 2,58$$

$$\begin{aligned} M - R &= 31,083 - 2,6322 = 28,450 \\ M + R &= 31,083 + 2,6322 = 33,716 \end{aligned}$$

octave:4> 31.083-2.6332
ans = 28.450
octave:5> 31.083+2.6332
ans = 33.716

VASTAUS: LUOTTAMUS VÄLI 28,450,, 33,716

koe 19.12. klo 19-21