

TÄNÄÄN

- TUUTOROINTIA : STUDY GROUPIT 15 min?
- KÄYTÄNNÖN ASIA T/MOODLE 30 min?
- MURTO LUVUT 60 min
- LISÄÄ MURTO LUKUJA TMS, 20.40-21

NATURAL

LUKUJOUKOT

- LUONNOLLISET LUVUT = $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
 VOIDAAN OTTAA
 JOKIN PIENI JOUKKO
 JOUKKO,
 AALTO SULT

- ESIM. $A = \{1, 2, 100\}$

kolme n alkion joukko

- KOKONAISLUVUT = $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
 ?
 SAKSAKSI
 LUKU = ZAHL

- MURTOluvut
 = RATIONAALILUVUT
 = FRACTION
 = QUOTIENT = $\mathbb{Q} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{1}, \dots\}$

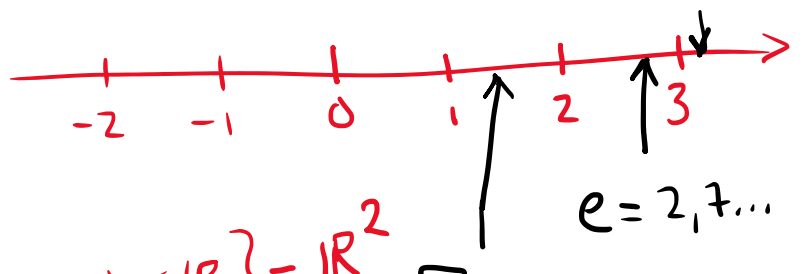
$$\frac{-3}{2} = \frac{-3}{-2}$$

$$= \left\{ \frac{m}{n}, \text{ missä } m \in \mathbb{Z} \text{ ja } n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\frac{-3}{2} \leftarrow \text{OSOITTAJA}$$

$$2 \leftarrow \text{NIMITTÄJÄ}$$

- REAALILUVUT = LUKUSUORA = $\mathbb{R}$ $\pi = 3,14\dots$



- REAALI TASO

• REAALITASO

$$= \{ (x, y), \text{ missä } \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ 2 \text{ kpl} \end{matrix} \begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix} \} = \mathbb{R}^2 \quad | \quad e = 2, 7 \dots$$

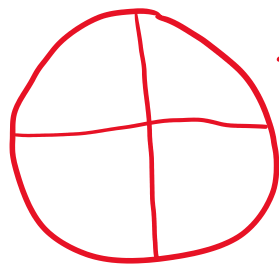
$\sqrt{2} = 1, 4 \dots$

• 3D-AVARUUS = $\{ (x, y, z), \begin{matrix} \{ \\ x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{matrix} \} = \mathbb{R}^3$

MURTOLUVUT

ESIM. VILLE SÖI PITSASTA $\frac{1}{4}$.
PIIRÄ KUVA AIHESTA.

RATK.

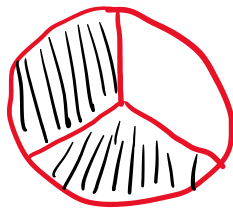


TÄMÄN
VILLE
SÖI

ESIM.

PIIRÄ $\frac{2}{3}$.

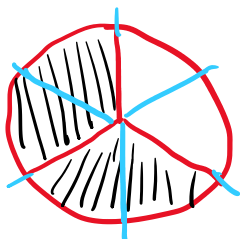
RATK.



LAVENTAMINEN

ESIM. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

PERUSTELU



KERROTAAN OSOITTAJA
JA NIMITÄJÄ
SAMALLA LUVULLA

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$$

→

SUPISTAMINEN

SUPLISTAMINEN

$$\frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{5 \cdot 2} = \frac{5}{10}$$

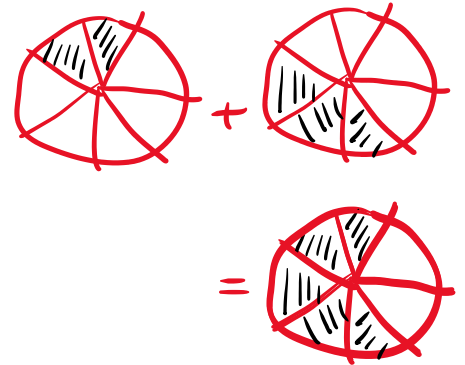
El.

$$\frac{2}{6} = \frac{2}{3 \cdot 2} \neq \frac{0}{3} = 0?$$

MURTOLOKUJEN SUMMA

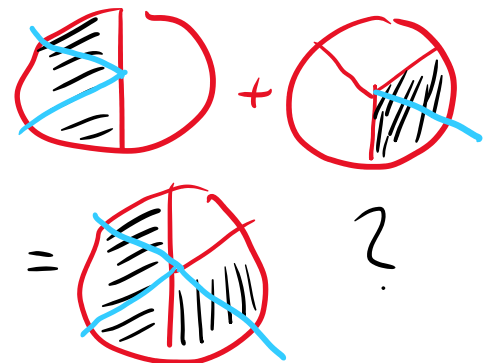
$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$$

↑ ↑
SAMA



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

↑ ↑
ERI SAMA



LAVENTAMILLA

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

MURTOLOKUJEN EROTUS

$$\frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{4-2}{7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

↑ ↑
ERI
NIMITTÄJÄ

LAVENNE TAAV
SAMAN NIMISIKSI

KOLME KUUESOSAA

ERI
NIMITTÄJÄ

LAVENNE LAAN
SAMAN NIMISIKSI

KOLME KUUESOSAA
KAKSI KUUESOSAA

MURTELUKUJEN KERTOLASKU

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{4} = \frac{2 \cdot 10}{5 \cdot 4} = \frac{20}{20} = 1$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 4} = \frac{18 : 2}{12 : 2} = \frac{9}{6} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{2}$$

SEKALUKUNA

$$1 \frac{1}{2} = 1 \frac{1}{2}$$

MODULI $\nearrow$?



SEKALUKUJEN VAARA

$$\frac{9}{2} = \frac{8+1}{2} = \frac{8}{2} + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{2} = 4 \frac{1}{2}$$

SIEVENNETTY
MUOTO

OK SEKALUKU

JOS VAHINGOSSA

LIPSAHTAA KERTOMERKKI

$$4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 4} = \frac{18 : 2}{12 : 2} = \frac{9}{6} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{2}$$

IKÄVÄ VÄLIVAIHE!

ISOJA LUKUJA

FIKSUMPI TAPA

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 4} = \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{2}} = \frac{3}{2}$$

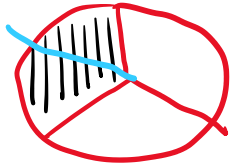
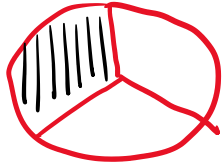
REAAALI-ILMIÖ

PIZZA - PUULET PITSASTA

KEAALI - ILMIÖ

$$\frac{1}{2} \cdot \text{PIZZA} = \text{PUOLET PITSASTA}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \text{ PUOLET KUVAN PITSANÄÄRÄSTÄ}$$



$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

MURTOLOKUVEN JAKOLASKU

$$2 : 3 = \frac{2}{3} = 2/3 \quad \text{JAKO MERKKIJÄ}$$

$$2 : 2 = \frac{2}{2} = 1$$

$$103 : 103 = \frac{103}{103} = 1$$

$$\boxed{\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1}$$

LUKU JAETTU NA
ITSELLÄÄN ON 1

MITEN LASKEAAN ?

$$\textcircled{1} \text{ TAPA } \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{1:1}{2:2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{6}{14} : \frac{2}{7} = \frac{6:2}{14:7} = \frac{3}{2}$$

↑
2:7

$$\textcircled{2} \text{ TAPA } \frac{1}{7} : \frac{1}{7} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot 2}{1} = \frac{2}{2} = 1$$

OK

OK

$$\textcircled{2} \text{ TAPA} \quad \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{6}{14} : \frac{2}{7} = \frac{6}{14} \cdot \frac{7}{2} = \frac{6 \cdot 7}{14 \cdot 2} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 7}{\cancel{2} \cdot \cancel{7} \cdot 2} = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{4} : \frac{3}{5} = \frac{\textcircled{4}}{1} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 3} = \frac{20}{3}$$

$$\frac{3}{5} : \textcircled{4} = \frac{3}{5} : \frac{\textcircled{4}}{1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$$

KIRJOITETTII N
ERI TAVALLA

1. Laske

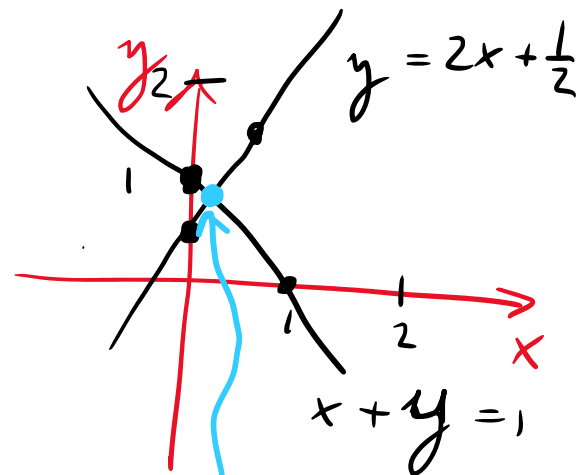
a) $\frac{1}{7} + \frac{2}{3}$, b) $\frac{1}{7} - \frac{2}{3}$, c) $\frac{1}{7} \times \frac{2}{3}$, d) $\frac{1}{7} / \frac{2}{3}$, e) $\frac{3}{14} (\frac{2}{3} + 4)$, f) $(\frac{1}{9} + \frac{7}{3}) / (2 + \frac{26}{9})$

LASKE TÄN 20.40 - 21.00

YHTÄLÖPARI (VIKKO 3 TA 4)

$$\begin{cases} y = 2x + \frac{1}{2} \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

VASTAUS
ON TÄMÄ
LEI KKAUSPISTE



1. Laske

a) $\frac{1}{7} + \frac{2}{3}$, b) $\frac{1}{7} - \frac{2}{3}$, c) $\frac{1}{7} \times \frac{2}{3}$, d) $\frac{1}{7} / \frac{2}{3}$, e) $\frac{3}{14} (\frac{2}{3} + 4)$, f) $(\frac{1}{9} + \frac{7}{3}) / (2 + \frac{26}{9})$

$$\textcircled{e} \quad \frac{3}{14} \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{1} \right) = \frac{3}{14} \left(\frac{2}{3} + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 3} \right) = \frac{3}{14} \left(\frac{2+12}{3} \right)$$

$\uparrow$ ERI NIMISIA
 $\uparrow$ LAVE NNE TAAV
 $\downarrow$ = $\frac{12}{3}$

$$= \frac{3}{14} \cdot \frac{14}{3} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 1$$

$$\textcircled{f} \quad \left(\frac{1}{9} + \frac{7}{3} \right) / \left(\frac{2}{1} + \frac{26}{9} \right)$$

$\uparrow$ HALUTAAV 9
 $\uparrow$ HALUTAAV 9

$$= \left(\frac{1}{9} + \frac{7 \cdot 3}{3 \cdot 3} \right) / \left(\frac{2 \cdot 9}{1 \cdot 9} + \frac{26}{9} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{9} + \frac{21}{9} \right) / \left(\frac{18}{9} + \frac{26}{9} \right)$$

$$= \frac{22}{9} / \frac{44}{9} = \frac{22}{9} : \frac{44}{9}$$

KOKKESSA

$$\left(\frac{1}{9} + \frac{7}{3} \right) / \left(\frac{2}{1} + \frac{26}{9} \right) = \frac{1}{2}$$

AJA TUKSEN KULKU EI OLE SELVÄ

EI H!

ISOJA
LUKUJA

$$\downarrow$$

$$= \frac{22}{9} \cdot \frac{9}{44} = \frac{198}{396}$$

$$= \frac{22 \cdot 1}{1 \cdot 44} = \frac{22}{2 \cdot 22}$$

$$= \frac{1}{2}$$

TÄNÄÄN 17.07

- MURTO LUVUT

- SUMMA JA TULO

- POTENSSEIT

- LASKE TAAN 18.30?

- LOPPU 18.45?

- TÄYNNÄ

- TOINEN TUNTI

19.00 DIGITAALITEK.
MANNE

MURTO LUVUT, KERTAUS

$$\frac{3a+2b}{7} + \frac{2a-b}{5+7}$$

← MUUTTUJISTA
a JA b
RIIPPUVA
LAUSEKE

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{15}{35} + \frac{14}{35} = \frac{15+14}{35} = \frac{29}{35}$$

↑ ERI NIMISIÄ, LAVENNETAAN ↑ SAMAN NIMISIÄ

$$\frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{15}{35} - \frac{14}{35} = \frac{15-14}{35} = \frac{1}{35}$$

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{7} : \frac{2}{5} &= \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 2} = \frac{15}{14} = \frac{14+1}{14} = \frac{14}{14} + \frac{1}{14} \\ &= 1 + \frac{1}{14} \\ &= 1\frac{1}{14} \end{aligned}$$

KUN JUHA-MATTI OLI
10-VUOTIAS

SEKALUKU $= 1\frac{1}{14}$

KOKKIKOULUSSA

VANILJAKIISSELI: VANILJASOKERIA $\frac{1}{4}$ TL

SUMMAN JA TULON LASKUSÄÄNNÖT

$$a + b = b + a$$

YHTEENLASKU ON
VAIHDANNAINEN

ESIM. $3 + 4 = 4 + 3$

ESIM. $5 + 12 + 6 + 18 + 25 = 66$

$\underbrace{5+12}_{17} + \underbrace{6+18}_{23} + \underbrace{25}_{41} = 66$

TAI

$$5 + 12 + 6 + 18 + 25$$
$$= \underbrace{5+25}_{30} + \underbrace{12+18}_{30} + 6 = 66$$

$$a + b = b + a$$

$$a - b = \underbrace{-b} + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

KUVA

$2 \cdot 3 = \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} = \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array} = 3 \cdot 2$

KERTOLASKU
VAIHDANNAINEN

ESIM.

$$4 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 5$$

$$= \underbrace{4 \cdot 25}_{100} \cdot \underbrace{2 \cdot 5}_{10} \cdot 17 = 17000$$

$$a(b+c) = ab + ac \quad \text{OSITTTELULAKI}$$

$$3(2+1) = 3 \cdot 3 = \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} = \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

SIIS

$$3(2+1) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1$$

$$\begin{array}{c} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 \end{array}$$

ESIM.

$$4 \cdot 87 = 4 \cdot (80 + 7)$$

~~4~~

$$= 4 \cdot 80 + 4 \cdot 7$$

$$= 320 + 28 = 348$$

ESIM.

$$2 \cdot 67 + 7 + 2 \cdot 33$$

$$= 2 \cdot 67 + 2 \cdot 33 + 7$$

NÄILLÄ ON YHTEISENÄ
TEKIJÄNÄ 2

$$= 2(\underbrace{67 + 33}_{100}) + 7$$

$$= 2 \cdot 100 + 7 = 200 + 7 = 207$$

2. Sievennä

a) $3a + b - 2a + b - 4b$, b) $(2a + b) + (5b - 3a)$, c) $(2a + b) - (5b - 3a)$, d) $x(x + 2) - x^2 - 2x$, e) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) - \frac{1}{x^2-1}$.

VAPAA EHTOINEN

PARI ESIMERKKIÄ TÄTÄ VARTEN

ESIM. $2a + 3b + 7a - b$

$$= 9a + 2b$$

• a JA b
OVA T
MINTTUJIA

• NIIDEN
PAIKALLE
VOI
SIJOITTAA
LUKUJA

ESIM. $2a + b + 4(a + 3b)$

$$= 2a + b + 4a + 12b$$

$$= 6a + 13b$$

• SIEVENNETÄSSÄ
PIDÄ a JA b
ERILLÄÄN

ESIM. $2a + b - 4(a - 3b)$

$$= 2a + b + (-4)a + (-4)(-3)b$$

$$\begin{array}{l} 4 = +4 = +++4 \\ -4 = +(-4) = +++-4 \end{array}$$

$$= 2a + b + (-4)a + (-4)(-3)b$$

KAKSI MIINUSMERKKIÄ?
→ POSITIIVISEN
LUKU

$$= 2a + b - 4a + 12b$$

$$= -2a + 13b$$

TARKISTUS

(EI VEDENPITÄVÄ)

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$2a + b - 4(a - 3b) = 2 \cdot 2 + 1 - 4(2 - 3 \cdot 1) = 4 + 1 - 4(-1)$$

$$2a + b - 4(a - 3b) = 2 \cdot 2 + 1 - 4(2 - 3 \cdot 1) = 4 + 1 - 4(-1) = 4 + 1 + 4 = 9$$

$$-2a + 13b = -2 \cdot 2 + 13 \cdot 1 = -4 + 13 = 9$$

NÄIDEN TÄYTYY OLLA

SAMAT KAIKILLA a JA b ARVOILLA OK

HYVÄLTÄ
NÄYTTÄÄ

LYHKESTI POLYNOMEISTA

MONOMI

ESIM.

$$7x^4$$

↑ ↑
KERROIN MUUTTUJA

POTENSSI

MONOMIEN KERTOLASKU

$$7x^4 \cdot 5x^3 = 7 \cdot 5 \cdot x^4 \cdot x^3$$

$$= 35 x^{4+3}$$

$$= 35 x^7$$

BINOMI: KAKSI MONOMIA ESIM.

$$\underbrace{2x^2 + 3x^5}_{2 \text{ kpl}}$$

POLYNOMI: MONOMEJA ESIM.
JONKIN
VERRAN

$$7x^4$$

$$x + 3 + 7x^5$$

↑

$$= 3 \cdot 1$$

$$= 3 \cdot x^0$$

$$= 3 \cdot 1 = 3$$

$$= 3 \cdot \underline{\underline{x^{-1}}}$$

ESIM. $2x^3(3x + 7x^4)$

OSITTEWLAKI

$$\begin{aligned} &= 2x^3 \cdot 3x + 2x^3 \cdot 7x^4 \\ &= 2 \cdot 3 x^3 \cdot x^1 + 2 \cdot 7 \cdot x^3 \cdot x^4 \\ &= 6 x^{3+1} + 14 x^{3+4} \\ &= \underline{\underline{6 x^4 + 14 x^7}} \end{aligned}$$

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 6 \cdot 2 = 12$$

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_4 = 2^3 = 8$$

KAKKOSEVEN POTENSSIT

n	2^n
0	$1 = 2^0$
1	$1+1=2 \rightarrow \cdot 2 = 2 = 2^1$
2	$2+2=4 \rightarrow \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 2^2$
3	$4+4=8 \rightarrow \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$
4	$8+8=16$
5	$16+16=32 = 2^5$
6	$32+32=64$
7	$64+64=128$
8	$128+128=256$
9	$256+256=512$
10	$512+512=1024 = 2^{10}$

VÄRIEN ESITYS
HEKSADESIIMAALI
LUKUNA R G B
VÄRI = #230101
MINKÄ VERRAN
PUNAISTA?
 $23_{16} = 2 \cdot 16 + 3 = 35$

TÄRKEITÄ TIE TO TEKNIIKASSA

ESIM. 1 KILOTAUVA = 1 (k)T = 1024 TAVUA

$$[1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}]$$

POTENSSIEN LASKUSÄÄNNÖT

$$2^2 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32 = 2^5$$

$$\rightarrow 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} \rightarrow \boxed{a^b \cdot a^c = a^{b+c}}$$

$$\frac{2^4}{2^1} = \frac{16}{2} = 8 = 2^3 = 2^{4-1}$$

$$\rightarrow \frac{2^4}{2^1} = 2^{4-1} \rightarrow \boxed{\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}}$$

$a \neq 0$

$$(2^3)^2 = 8^2 = 8 \cdot 8 = 64 = 2^6 = 2^{3 \cdot 2}$$

$$\rightarrow (2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} \rightarrow \boxed{(a^b)^c = a^{bc}}$$

$$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 6 \cdot 6 = 36 = 4 \cdot 9 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$\rightarrow (2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \rightarrow \boxed{(ab)^c = a^c b^c}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4} = \frac{3^2}{2^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}}$$

TÄNÄÄN

LOGARITMI

ALOITELLAAN

19.05

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}}$$

MYÖS:

$$\frac{1}{2^3} = \frac{2^0}{2^3} = 2^{0-3} = 2^{-3}$$

3. Sievennä (tässä voi käyttää potenssin laskusääntöjä tai vain potenssin määritelmää ja murtolukujen supistamista)

a) $2a^2b \cdot 3a^3b^2$, b) $xy^3 \times 2xy^4$, c) $\frac{4s^3k^2}{2k^2s}$, d) $\frac{6x^2yz^3}{3xy^3z}$, e) $(2m^2n)^2$, f) $(5q/r^2)^3$, g) $\frac{(tz^2)^3}{t(tz^2)^2}$

HUOM, NÄMÄ VOI LASKEA KAAROLEN AVULLA

ESIM.

$$\frac{a^3b^1}{a^2b^5} = a^{3-2}b^{1-5} = a^{+1}b^{-4} = \frac{a}{b^4}$$

NEG.

TAI ② KIRJOITAMALLA POTENSSIT AVU, JA SUPISTAMALLA

$$\frac{a^3b^1}{a^2b^5} = \frac{\cancel{a} \cancel{a} \cancel{a} b}{\cancel{a} \cancel{a} b b b b b} = \frac{a}{b^4}$$

LASKEAAN, SITTEEN TAVOLLE

MUISTA KLO 19 DIGITAALITEKNIKAN TUNTI

SELITYKSIÄ ESIM, JYVÄSKYLÄN YLIOPISTON MATEMAATIIKASSA

Potenssien laskusäännöt

Potenssimerkinnällä a^n tarkoitetaan lukua, joka saadaan kun kerrotaan reaaliluku a itsellään n kertaa. Lisäksi sovitetaan, että

$$a^0 = 1 \quad \text{ja} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Seuraavat säännöt pätevät, kun n ja m ovat positiivisia kokonaislukuja.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Samankantaisten tulo.
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Samankantaisten osamäärä.
$(a^m)^n = a^{mn}$	Potenssin potenssi.
$(ab)^n = a^n b^n$	Tulon potenssi on potenssien tulo.
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	Osamäärän potenssi on potenssien osamäärä.

→ Mutta miksi?

• Samankantaisten tulo

Annetaan todistuksen idea samankantaisten lukujen tulolle tarkastelemalla tapausta $n = 4$ ja $m = 3$

$$\begin{aligned} a^4 \cdot a^3 &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{4 \text{ kpl}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3 \text{ kpl}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{7 \text{ kpl}} = a^{4+3} = a^7. \end{aligned}$$

2. Sievennä

a) $3a + b - 2a + b - 4b$, b) $(2a + b) + (5b - 3a)$, c) $(2a + b) - (5b - 3a)$, d) $x(x + 2) - x^2 - 2x$, e) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) - \frac{1}{x^2-1}$

VAPAHEITOLINEN

3. Sievennä (tässä voi käyttää potenssin laskusääntöjä tai vain potenssin määritelmää ja murtolukujen supistamista)

a) $2a^2b \cdot 3a^3b^2$, b) $xy^3 \times 2xy^4$, c) $\frac{4s^3k^2}{2k^2s}$, d) $\frac{6x^2yz^3}{3xy^3z}$, e) $(2m^2n)^2$, f) $(5q/r^2)^3$, g) $\frac{(tz^2)^3}{t(tz^2)^2}$

HÄMÄÄKÄN
HELPPO,
SULUT
VOIDAAN
OTTA A SUIKAN
POIS

2(b) $(2a+b) + (5b-3a)$

$$= 2a + b + 5b - 3a$$

$$= -a + 6b$$

$$\log_2(8) = 3 \quad 2^3 = 8$$

$$\log(x) = u \Leftrightarrow a^u = x$$

$$\log_2(8) = 3 \quad 2^3 = 8$$

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

$$\log_a(1) = 0, \quad \log_a(a) = 1, \quad \log_a(a^x) = x, \quad a^{\log_a(x)} = x$$

$$\log_a(b^c) = c \log_a(b)$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

KANTALUVUN
VAIHTO

$$\lg(x) = \log_2(x), \quad \lg(x) = \log_{10}(x), \quad \ln(x) = \log_e(x), \quad e \approx 2,72$$

LYHENYYS MERKINTÖJÄ

- SIEVENTÄMISTÄ
- EKSP. YHT.
- LOG. YHT.

LOGARITMI VOIDAA
OTTAA ERI
KANTALUVILLE

- PALJON KANTALUKUA?
- LASKIMESSA VAIN $\ln()$

RATKAISU: KANTALUVUN
VAIHTO

$$\log_2(8) = \frac{\ln(8)}{\ln(2)}$$

$$\log_2(8) = 3$$

$$\log_5(25) = 2$$

$$\log_{10}(1000) = 3$$

$$\log_e(x) = \ln(x) \quad e \approx 2,7$$

LUONNOLLINEN-
LOGARITMI

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

JOS ET TYKKÄÄ
KANTALUVUSTA a

VOIT KÄYTTÄÄ

SUOSIKKI KANTALUKUASI b

ÄRSYTTÄVÄ
KERROIN

VRT,

$$1 + (1+x) \approx 1,4 \cdot x$$

YLEISIMMÄT

$$\log_2$$

- TIETOKONE

$$\log_{10}$$

- IHMINEN
& KYMMEN -
JÄRJESTELMÄ

$$\log_e$$

- LASKUKAAVAT

$$\log_p(1+x) \approx x$$

V

LASKUKAAVAT

$$\log_e(1+x) \approx x$$

VRT,

KERROIN

$$\log_2(1+x) \approx 1.4 \cdot x$$

$\log_2$ TOIMISI NYÖS

YHTÄLÖT LYHYESTI

<https://www.wolframalpha.com/input?i=7%5E%282x%29%3D4%5E%28x%2B5%29>

Solve for x over the real numbers:

$$7^{2x} = 4^{x+5}$$

Hint: Take logarithms of both sides to turn products into sums and powers into products.

Take the natural logarithm of both sides and use the identity $\log(a^b) = b \log(a)$:

$$2 \log(7) x = 2 \log(2) (x + 5)$$

$\ln()$
↓
0

$ax = b$ ENSIMMAISEN ASTEEN YHTÄLÖ
 $\rightarrow x = \frac{b}{a}$

$$7^{2x} = 4^{x+5} \parallel \ln()$$

$$\ln(7^{2x}) = \ln(4^{x+5})$$

$$2x \ln(7) = (x+5) \ln(4)$$

$$2x \ln(7) = x \ln(4) + 5 \ln(4)$$

$$2x \ln(7) - x \ln(4) = 5 \ln(4)$$

$$x(2 \ln(7) - \ln(4)) = 5 \ln(4)$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \ln(4)}{2 \ln(7) - \ln(4)}$$

~~...~~
EI TURVITSE LASKEA KOKKESSA

(VOI KÄYTTÄÄ TARKISTUKSESSA)

$$\ln(a^b)$$

Solve for x over the real numbers:

$$3 \log(2x) - 2 \log(x) = \log(x+1)$$

Hint: Move everything to the left hand side.

Subtract $\log(x+1)$ from both sides:

$$-2 \log(x) + 3 \log(2x) - \log(x+1) = 0$$

Hint: Combine logarithms.

$$3 \ln(2x) - 2 \ln(x) = \ln(x+1)$$

$$\ln((2x)^3) - \ln(x^2) = \ln(x+1)$$

$$\ln(8x^3) - \ln(x^2) = \ln(x+1)$$

$$\ln\left(\frac{8x^3}{x^2}\right) = \ln(x+1)$$

$$\ln(8x) = \ln(x+1)$$

$$8x = x+1 \parallel -x$$

$$7x = 1 \parallel :7$$

$$x = \frac{1}{7}$$

$$\ln() = \log_e()$$

↑
≈ 2.7

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

$$\log_a(1) = 0, \quad \log_a(a) = 1, \quad \log_a(a^x) = x, \quad a^{\log_a(x)} = x$$

$$\begin{aligned} \log_a(b^c) &= c \log_a(b) \\ \log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\ \log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \end{aligned}$$

$$\text{lb}(x) = \log_2(x), \quad \lg(x) = \log_{10}(x), \quad \ln(x) = \log_e(x), \quad e \approx 2,72$$

ESIMERKKEJÄ

1. Aukaise käyttäen logaritmin laskusääntöjä

a) $\lg\left(\frac{2ab^2}{c}\right)$,

b) $\ln\left(\frac{(a+b)^2}{\sqrt{c}}\right)$.

1. a) $\Leftrightarrow$ VERTA*

$$\lg\left(\frac{3 \times y^7}{z}\right) = \lg(3 \times y^7) - \lg(z)$$

$$= \lg(3) + \lg(y^7) - \lg(z)$$

$$\lg\left(\frac{2a^+b^2}{c^-}\right) = +\lg(a) + \lg(b^2) - \lg(c) + \lg(2)$$

2. Sievennä yhdeksi logaritmiksi

a) $\ln(xy) + \ln(y^2)$,

b) $\lg\left(\frac{x^3y^2}{z}\right) - 2\lg\left(\frac{xy}{z}\right)$,

c) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln\left(\frac{b}{c}\right) + \ln\left(\frac{c}{d}\right) + \ln\left(\frac{d}{a}\right)$,

d) $\log_2(t^3) - \log_2(2t) + 2\log_2 t$.

$$2. b) \lg\left(\frac{x^3y^2}{z}\right) - 2\lg\left(\frac{xy}{z}\right)$$

$$= \lg\left(\frac{x^3y^2}{z}\right) - \lg\left(\frac{x^2y^2}{z^2}\right)$$

$$= \lg\left(\frac{x^3y^2}{z}\right) - \lg\left(\frac{x^2y^2}{z^2}\right)$$

$$= \lg\left(\frac{x^3y^2}{z} : \frac{x^2y^2}{z^2}\right)$$

$$= \lg\left(\frac{x^3y^2}{z} \cdot \frac{z^2}{x^2y^2}\right)$$

$$= \lg (x^{3-2}) = \underline{\underline{\lg (x^1)}}$$

LASKUSÄÄNTÖJÄ

KERTAUSTA

TÄRKEIN OSITTELULAKI:

$$a(b+c) = ab + ac$$

ESIM.

$$7(6+9) = 7 \cdot 15 = 105$$

TAI

$$7(6+9) = 7 \cdot 6 + 7 \cdot 9 = 42 + 63 = 105$$

MONOMIEN TULO

$$\begin{aligned} a x^n \cdot b x^k &= (ab) x^n \cdot x^k \\ &= (ab) x^{n+k} \end{aligned}$$

ESIM. $4x^7 \cdot 6x^5 = (4 \cdot 6) x^{7+5} = \underline{\underline{24x^{12}}}$

Kertausta (laskusäännöt)

1. Sievennä polynomit

a) $x(x+2) - 2(x^2+1)$, b) $(x+2)(x^2+1)$, c) $x\{x^2-1-2[x-(1-2x)]+1\}$, d) $(x+a)^2 - (x-a)^2$, e) $(x+2a)^2 - (x+a)(x-a)$, f) $(2x+1)^3$.

1. a) $x'(x'+2) - 2(x^2+1)$

$$= 1 \cdot x^2 + 2x - 2x^2 - 2 = -x^2 + 2x - 2$$

POTENSIN
MÄÄRITELMÄ

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$$

1. f) $(2x+1)^3 = (2x+1)(2x'+1)(2x'+1)$

ALOITETAAN NÄISTÄ

$$= (2x+1)(4x^2+2x+2x+1)$$

$$= (2x+1)(4x^2+4x+1)$$

$$= 8x^3 + 4x^2 + 2x$$

$$+ 4x^2 + 4x + 1$$

$$= \underline{\underline{8x^3 + 8x^2 + 6x + 1}}$$

2. Kirjan tehtävä 1.2.3 (sivulla 10):

Sievennä a) x^4x^7 , b) $x^2(-x)$, c) $\frac{x^2}{x}$, d) $\frac{x^{-2}}{x^{-1}}$, e) $(x^{-2})^4$, f) $(x^{-2.5}x^{-3.5})^2$

3. Kirjan tehtävä 1.2.4 (sivulla 10):

Sievennä mahdollisimman paljon.

a) $\frac{x^{1/3}}{x^{1/3}}$, b) $(16x^4)^{0.25}$, c) $\left(\frac{27}{y^3}\right)^{1/3}$, d) $\frac{2xy^2}{(2xy)^2}$, e) $\sqrt{a^2b^3c^4}$, f) $(64t^3)^{2/3}$.

NÄISSÄ TEHTÄVISSÄ ON

LISÄKSI MM. $\sqrt{\quad}$ JA $x^{\frac{1}{2}}$.

→ NELIÖJUURET

VIIME VUOKALLA

$$\cdot x^n \cdot x^k = x^{n+k}$$

$$\cdot \frac{x^n}{x^k} = x^{n-k}$$

$$\cdot (x^n)^k = x^{nk}$$

$$\cdot (x^k y^k)^k = x^k y^k$$

KATSO TAAN
KAAVAA

$$(x^n)^k = x^{nk}$$

VALITAAN $n = \frac{1}{k}$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{k}\right)^k \cdot x^{\frac{1}{k}k} = x \quad \cdot \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$$

VALITTAAN $n = \frac{1}{k}$. $(x^{\frac{1}{k}} y^{\frac{1}{k}})^k = x^{\frac{1}{k} \cdot k} y^{\frac{1}{k} \cdot k}$

$\rightarrow (x^{\frac{1}{k}})^k = x^{\frac{1}{k} \cdot k} = x$. $(\frac{x}{y})^k = \frac{x^k}{y^k}$

ESIM. $x = 5$
 $k = 2$

$\Rightarrow \underbrace{(5^{\frac{1}{2}})^2}_{\sqrt{5}} = 5$

NELIÖJUURI VIIDES TÄ $= \sqrt{5}$
ON SELLAINEN LUKU, ETÄ
 $\sqrt{5}^2 = 5$.

KUINKA SUURI $\sqrt{5}$ ON?
LIKIARVO?

a	a^2	HALUTTAAN $= 5$
<u>2</u>	$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$	< 5 LIIAN PIENI
3	$3^2 = 9 > 5$	LIIAN SUURI
2.5	$2.5^2 = 6.25 > 5$	LIIAN SUURI
2.2	$2.2^2 = (1.1 \cdot 2)^2$ $= 1.1^2 \cdot 2^2 = 1.21 \cdot 4$ $= 4.84 < 5$	LÄHELLÄ!

SIIS $\sqrt{5} \approx 2.2$

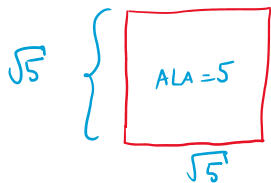
GEOMETRIASSA

YKSIKKÖNELIÖ

ALA $= 1 \cdot 1 = 1$



$\sqrt{5}$ KERTO, MITEN PITKÄ NELIÖN SIVUN TÄYTY OLLA, ETÄ NELIÖN PINTA-ALA ON 5.



MERKINTÄ

$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ NELIÖJUURI

$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ KUUTIÖJUURI

$5^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{5}$ n:5 JUURI

2. Kirjan tehtävä 1.2.3 (sivulla 10):

Sievennä a) $x^4 x^7$, b) $x^2(-x)$, c) $\frac{x^2}{x}$, d) $\frac{x^{-3}}{x^{-1}}$, e) $(x^{-2})^4$, f) $(x^{-2.5} x^{-3.5})^2$

3. Kirjan tehtävä 1.2.4 (sivulla 10):

Sievennä mahdollisimman paljon.

a) $\frac{x^{1/3}}{x^{1/3}}$, b) $(16x^4)^{0.25}$, c) $\left(\frac{27}{y^3}\right)^{1/3}$, d) $\frac{2xy^2}{(2xy)^2}$, e) $\sqrt{a^2 b^3 c^4}$, f) $(64t^3)^{2/3}$.

$$\begin{aligned} 2. \textcircled{f} \quad & (x^{-2.5} x^{-3.5})^2 \\ &= (x^{-2.5-3.5})^2 \\ &= (x^{-6})^2 = x^{-12} = \frac{1}{x^{12}} \end{aligned}$$

https://www.wolframalpha.com/input/?i=(x^(-2.5)*x^(-3.5))^2



$(x^{(-2.5)*x^{(-3.5)}})^2$

NATURAL LANGUAGE

MATH INPUT

EXTENDED KEYBOARD

Input

$$\left(\frac{1}{x^{2.5} x^{3.5}}\right)^2$$

Result

$$\frac{1}{x^{12}}$$

TARKISTUS
WOLFRAM ALPHALLA

Share Copy link Download CDHF-EM-1-Review-of-a... Info

1.3 Number bases 11

Solutions

1 (a) 8 (b) 9 (c) 5 (d) 361	2 (a) x^{11} (b) $-x^3$ (c) x
(e) 4 (f) $\frac{1}{16}$ (g) $\frac{1}{2}$ (h) 3	(d) $\frac{1}{x}$ (e) $\frac{1}{x^3}$ (f) $\frac{1}{x^{12}}$

OIKEA VASTAUS
KIRJASSA

2. Kirjan tehtävä 1.2.3 (sivulla 10):

Sievennä a) $x^4 x^7$, b) $x^2(-x)$, c) $\frac{x^2}{x}$, d) $\frac{x^{-3}}{x^{-1}}$, e) $(x^{-2})^4$, f) $(x^{-2.5} x^{-3.5})^2$

3. Kirjan tehtävä 1.2.4 (sivulla 10):

Sievennä mahdollisimman paljon.

a) $\frac{x^{1/3}}{x^{1/3}}$, b) $(16x^4)^{0.25}$, c) $\left(\frac{27}{y^3}\right)^{1/3}$, d) $\frac{2xy^2}{(2xy)^2}$, e) $\sqrt{a^2 b^3 c^4}$, f) $(64t^3)^{2/3}$.

$$\begin{aligned} 3. \textcircled{f} \quad & (64t^3)^{2/3} \\ &= 64^{2/3} t^{3 \cdot \frac{2}{3}} \\ &= 64^{2/3} t^2 \\ &= (2^6)^{2/3} t^2 \\ &= 2^{6 \cdot \frac{2}{3}} t^2 = 2^4 t^2 = 16t^2 \end{aligned}$$

n	2^n
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128

TAPA 2 LASKIMEN KANSSA

$$\begin{aligned} & (64t^3)^{2/3} \\ &= 64^{2/3} t^{3 \cdot \frac{2}{3}} = \underbrace{64^{2/3}}_{=16} t^2 \end{aligned}$$

$$= 64^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{4}{3} = \underbrace{64^{\frac{2}{3}}}_{=16} \cdot \frac{4}{3}$$

LASKIN

ENSIMMAISEN ASTEEN YHTALÖ

Osien (f)-(l) kysymykset pyritään käymään läpi 15.1. tunnilla.

f) Ratkaise $2x + 3 = 5x - 6$.

g) Ratkaise $\frac{3x}{2} - 17 = 0$.

h) Ratkaise $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$.

i) Ratkaise $2x - 1 = \frac{x}{2} + 2$.

j) Ratkaise $2(y + 1) = 6$.

k) Ratkaise $3(2y - 1) = 2(y + 2)$.

l) Ratkaise $\frac{3}{2}(t + 3) = \frac{2}{3}(4t - 1)$.

IDEA

① + JA -
POLITTAIN,
KUNNES

"X-TERMIT = LUUT"

6. f)

$$2x + 3 = 5x - 6 \quad || -3$$

$$2x + \boxed{3-3} = 5x - \boxed{6-3}$$

$$2x = 5x - 3 \quad || -5x$$

$$2x - 5x = \boxed{5x-3-5x}$$

$$\boxed{-3x = -3} \quad || :(-3)$$

$$x = \frac{-3}{-3} = 1$$

VALMIS!

"X-TERMIT = LUUT"

② JAETAAAN
X:N KERTOIMELLA

SIIIS x=1,

③ $2x - 1 = \frac{x}{2} + 2 \quad || +1$

$$2x = \frac{x}{2} + 3 \quad || -\frac{x}{2}$$

TAPA 1

$$\boxed{2x - \frac{x}{2}} = 3$$

X YHTYISEKSI TEKNIKKI

$$\boxed{x(2 - \frac{1}{2})} = 3$$

$$\boxed{x(\frac{4}{2} - \frac{1}{2})} = 3$$

$\frac{3}{2}$

$$\boxed{\frac{3}{2}x} = 3 \quad || : \frac{3}{2}$$

$$x = 3 : \frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

SIIIS x=2

TAPA 2

$$\boxed{\frac{2x}{1} - \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{4x}{2} - \frac{x}{2}$$

$$= \frac{4x - x}{2} = \boxed{\frac{3x}{2}}$$

TAPA 3

$$2x - \frac{x}{2} = 3 \quad || \cdot 2$$

$$4x - x = 6$$

$$3x = 6 \quad || :3$$

$$x = 2$$

LASKETAAN 20.30 - 21.00

4. Kirjan tehtävä 1.4.6 (sivulla 26):

Tarkista, että annetut arvot ovat polynomiyhtälöiden ratkaisuja

a) $x^2 + x - 2 = 0$ $x = -2, x = 1$

4a. $x^2 + x - 2 = 0$ Sijoitetaan $x = -2$

$$(-2)^2 + (-2) - 2 = 0$$

$$4 - 2 - 2 = 0$$

$$0 = 0$$

TOSI, SIIS $x = -2$
ON RATKAISU

$x^2 + x - 2 = 0$ Sijoitetaan $x = 1$

$$1^2 + 1 - 2 = 0$$

$$1 + 1 - 2 = 0$$

$$0 = 0$$

TOSI, SIIS $x = 1$
ON RATKAISU

5. Kirjan tehtävä 2.4.1.1 (sivulla 74):

Aste tarkoittaa korkeinta muuttujan potenssia. Esimerkiksi polynomin $x^3 + 2x^7 - 3$ aste on 7.

Mikä on polynomilausekkeen aste?

a) $z^3 + 2z^2 - 8 + 13z$ Aste on 3.

3. Kirjan tehtävä 1.2.4 (sivulla 10):

Sievennä mahdollisimman paljon.

a) $\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}}$, b) $(16x^4)^{0.25}$, c) $\left(\frac{27}{y^3}\right)^{1/3}$, d) $\frac{2xy^2}{(2xy)^2}$, e) $\sqrt{a^2b^6c^4}$, f) $(64t^3)^{2/3}$.

3. e) $\sqrt{a^2 b^6 c^4} = (a^2 b^6 c^4)^{1/2}$
 $= \underline{\underline{a^1 b^3 c^2}}$

Ensimmäisen asteen yhtälön

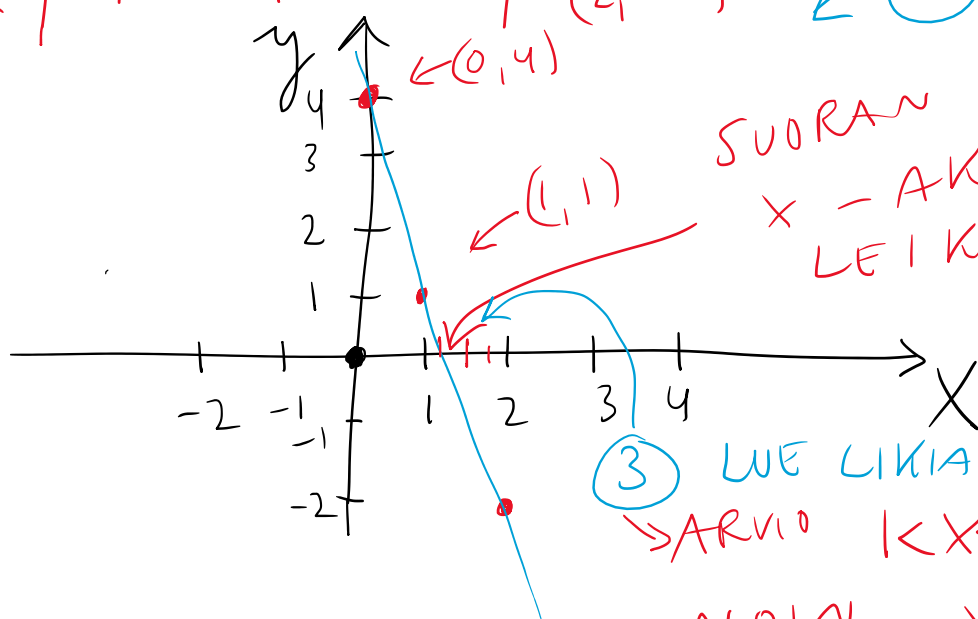
ENSIMMÄISEN ASTEEN YHTÄLÖN
RATKAISEMINEN
PIIRTTÄMÄLLÄ → PIIRTEHTÄVÄ
MOODLESSA

ESIM. YHTÄLÖ $4 - 3x = 0$

X	$y = 4 - 3x$	PISTE (x, y)
0	$4 - 3 \cdot 0 = 4$	$(0, 4)$
1	$4 - 3 \cdot 1 = 1$	$(1, 1)$
2	$4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$	$(2, -2)$

① Taulukko

② KWVA



=> PÄTEE

$$y = 4 - 3x = 0$$

③ WE LIKIARVO
ARVO $1 < x < 2$

NOIN $x = 1,25$

VERTAA

$$4 - 3x = 0 \quad || -4$$

$$-3x = -4 \quad || :(-3)$$

$$x = \frac{+4}{+3} = \frac{4}{3}$$

LASKIN

$$x = 1,33...$$

OK

(KWVA HIEMÄN
EPÄTARKKA)

+ - . :

KERTAUSTA

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 1} = \frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned} & a(b+c) - 2a(4b-3c) \\ &= ab + ac - 8ab + 6ac \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a+2b)(a+b-c) \\ &= a^2 + ab - ac + 2ab + 2b^2 - 2bc \end{aligned}$$

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8$$

$$\left(\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} \right)$$

$$(2^3)^5 = 2^{15}$$

$$(2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$$

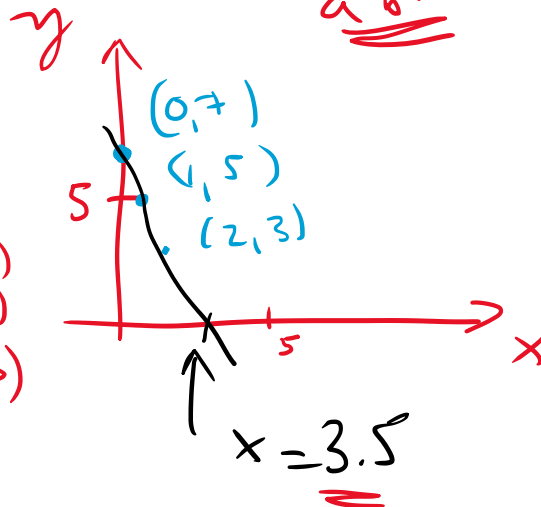
$$\left(\frac{2}{3} \right)^5 = \frac{2^5}{3^5}$$

$$a^1 b^3 c^1 = a^{1-2} b^{3-7} c^1 = a^{-1} b^{-4} c^1$$

$$\frac{a^1 b^3 c^1}{a^2 b^7} = a^{1-2} b^{3-7} c^1 = a^{-1} b^{-4} c^1 = \frac{c^1}{a^1 b^4}$$

$$7 - 2x = 0$$

x	y = 7 - 2x	(x, y)
0	7 - 2 \cdot 0 = 7	(0, 7)
1	7 - 2 \cdot 1 = 5	(1, 5)
2	7 - 2 \cdot 2 = 3	(2, 3)



$$7 - 2x = 0 \parallel -7$$

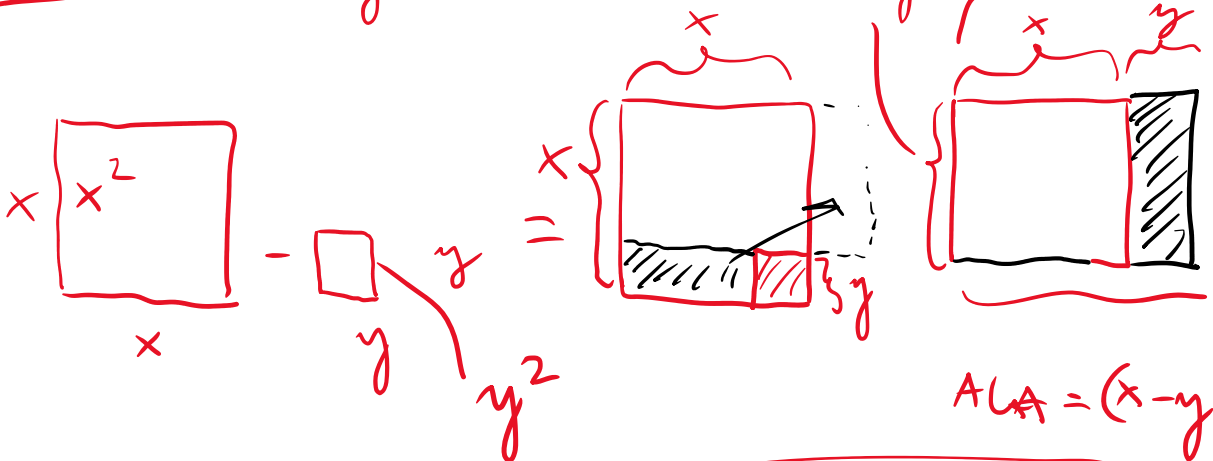
$$-2x = -7 \parallel : -2$$

$$x = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

TOISEN ASTEEV YHTÄLÖ

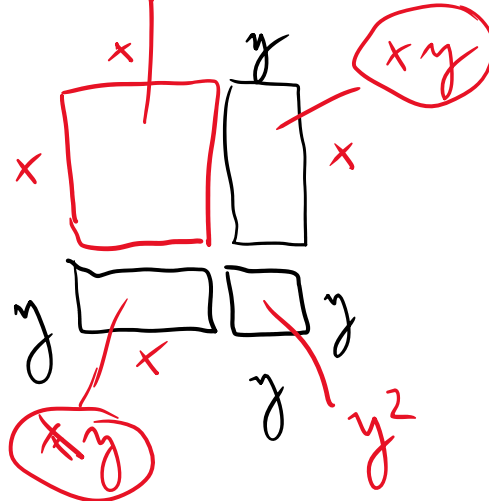
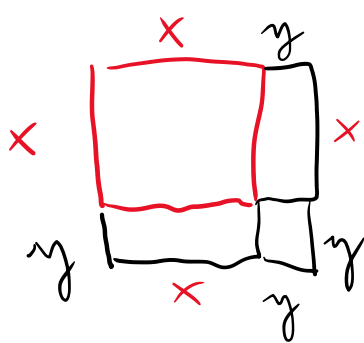
KUVIEN AVULLA

ESIM. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$



ESIM. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

ESIM. $(x+y)^2$



$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

SİJOI TETAN

$$y = -u$$

$$(x-u)^2 = x^2 + 2x(-u) + (-u)^2$$

$$(x-u)^2 = x^2 - 2xu + u^2$$

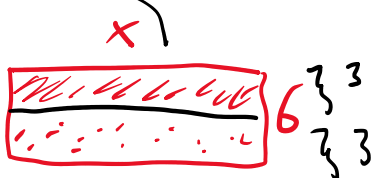
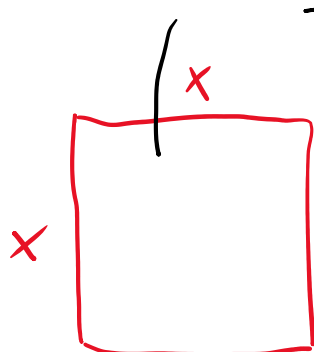
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

KUVA

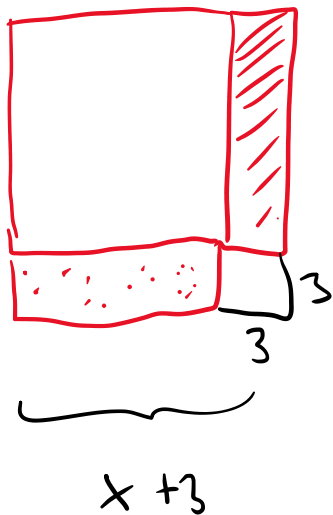
$$x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$+8$$

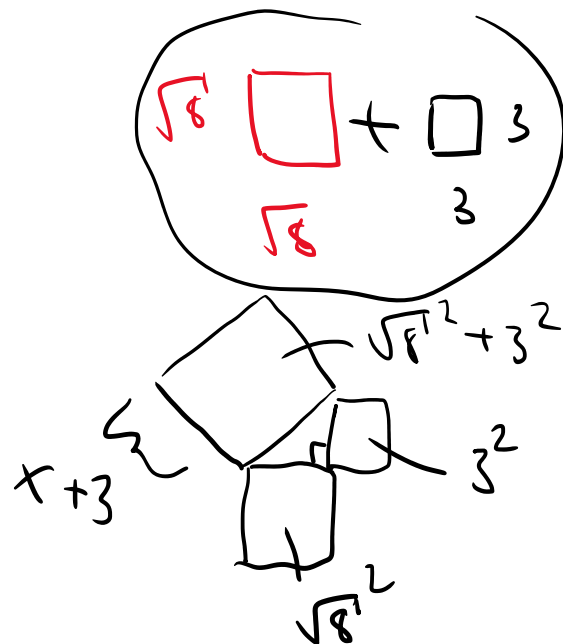
=



$$\sqrt{8}$$



=



$$x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x = 8$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = 8 + \overbrace{3^2}^9 = 17$$

$$(x+3)^2 = 17 \quad || \sqrt{\quad} = (\quad)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{17}$$

$$(x+3) = \pm \sqrt{17}$$

$$x+3 = \pm \sqrt{17}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{17}$$

$$= \frac{-6}{2} \pm \sqrt{8 + \left(\frac{6}{2}\right)^2}$$

$$= -\frac{6}{2} \pm \sqrt{8 + \frac{6^2}{4}} \quad 1.4$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(-2)^2 = 4$$

$$2^2 = 4$$

$$x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$= -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\underbrace{(-4)^2 + 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}_{4}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tehtäviä: Toisen asteen yhtälö

torstai 25. tammikuuta 2024 9.45

1. Toisen asteen yhtälöitä.

[Kirjan tehtävästä 1.4.4 (sivuilla 25-26).] Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisukaavaa $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ käyttämällä ratkaise seuraavat yhtälöt.

a) $x^2 + x - 1 = 0$;

b) $t^2 - 3t - 2 = 0$;

c) $h^2 + 5h + 1 = 0$;

g) $3r^2 = 7r + 2$;

Ⓐ $1 \cdot x^2 + 1x - 1 = 0$

$a = 1$

$b = 1$

$c = -1$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$
 $= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\begin{cases} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \dots \\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = \dots \end{cases}$

1. Toisen asteen yhtälöitä.

[Kirjan tehtävästä 1.4.4 (sivuilla 25-26).] Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisukaavaa $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ käyttämällä ratkaise seuraavat yhtälöt.

Ⓐ $x^2 + x - 1 = 0$;

b) $t^2 - 3t - 2 = 0$;

c) $h^2 + 5h + 1 = 0$;

Ⓐ $3r^2 = 7r + 2$;

$3r^2 = 7r + 2$

$3r^2 - 7r - 2 = 0$

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = 3$

$b = -7$

$c = -2$

$7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 + 24}}{6}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{73}}{6}$$

$$r_1 = \frac{7 + \sqrt{73}}{6} = \dots$$

$$r_2 = \frac{7 - \sqrt{73}}{6} = \dots$$

2. Toisen asteen yhtälöön johtavia murtolukuyhtälöitä. Tarkista lopuksi sijoittamalla.

a) Ratkaise $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = 3$. Vihje: aluksi kerro luvulla $2x$ puolittain.

b) Ratkaise $\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x} < 1$. Vihje: aluksi kerro luvulla ~~$(x+1)x$~~ puolittain.

c) Ratkaise $\frac{x-1}{2x+2} + \frac{x-1}{x+1} = 1$. Vihje: aluksi kerro luvulla $2x+2$ puolittain.

d) Ratkaise $\frac{2}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$. Vihje: aluksi kerro luvulla $x-1$ puolittain.

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x} - 1 < 0$$

$$\frac{x(x-1)}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x(x+1)}{x(x+1)} < 0$$

$$\frac{ax^2 + bx + c}{x(x-1)} \neq 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dots \\ x_2 = \dots \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} a < b & \parallel \cdot c < 0 \\ \hline ac > bc \end{array}$$

2. Toisen asteen yhtälöön johtavia murtolukuyhtälöitä. Tarkista lopuksi sijoittamalla.

a) Ratkaise $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = 3$. Vihje: aluksi kerro luvulla $2x$ puolittain.

b) Ratkaise $\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x} = 1$. Vihje: aluksi kerro luvulla $(x+1)x$ puolittain.

c) Ratkaise $\frac{x-1}{2x+2} + \frac{x-1}{x+1} = 1$. Vihje: aluksi kerro luvulla $2x+2$ puolittain.

d) Ratkaise $\frac{2}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$. Vihje: aluksi kerro luvulla $x-1$ puolittain.

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = 3 \quad || \cdot 2x$$

$$\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} + \cancel{2x} \cdot \frac{3}{\cancel{2x}} = 3 \cdot 2x$$

$$2 + 3 = 6x$$

$$5 = 6x \quad || :6 \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{5}{6}}}$$

2. Toisen asteen yhtälöön johtavia murtolukuyhtälöitä. Tarkista lopuksi sijoittamalla.

a) Ratkaise $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = 3$. Vihje: aluksi kerro luvulla $2x$ puolittain.

b) Ratkaise $\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x} = 1$. Vihje: aluksi kerro luvulla $(x+1)x$ puolittain.

c) Ratkaise $\frac{x-1}{2x+2} + \frac{x-1}{x+1} = 1$. Vihje: aluksi kerro luvulla $2x+2$ puolittain.

d) Ratkaise $\frac{2}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$. Vihje: aluksi kerro luvulla $x-1$ puolittain.

TEE ITSE

$$\frac{2}{x-1} = \frac{x+1}{x-1} \quad || \cdot (x-1)$$

Siis,
 $x=1$

$$2 = x+1 \quad || -1 \Rightarrow \underline{\underline{1=x}}$$

TARKISTUS

$$\frac{2}{\underline{1-1}} = \frac{1+1}{\underline{1-1}} = 0$$

NOLLA
EI SAA
JAKAA!

$x=1$
EI OKEI

EI OLE

OIKKA

RATKAISU

YHTÄLÖLLÄ

$$\frac{2}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

$\Rightarrow$

EI OLE

RATKAISUA

Tehtäviä: Juuriyhtälö

torstai 25. tammikuuta 2024 9.46

3. Toisen asteen yhtälöön johtavia juuriyhtälöitä.

- a) Ratkaise $\sqrt{x+3} = 5$. Vihje: aluksi puolittain $()^2$.
- b) Ratkaise $\sqrt{x+2} = 2x$. Vihje: aluksi puolittain $()^2$.
- c) Ratkaise $\sqrt{2x-1} = 3x-1$. Vihje: aluksi puolittain $()^2$.
- d) Ratkaise $\sqrt{1+\sqrt{2+x}} = 3$. Vihje: puolittain $()^2$, puolittain -1 ja puolittain $()^2$.
- e) Ratkaise $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1$. Vihje: aluksi puolittain $()^2$. Kaava $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ auttaa. Sitten pieni järjestely ja puolittain $()^2$.

a) $\sqrt{x+3} = 5 \quad || ()^2$

$$\cancel{\sqrt{x+3}}^2 = 5^2$$

$$x+3 = 25 \quad || -3$$

$$\underline{\underline{x = 22}}$$

3. Toisen asteen yhtälöön johtavia juuriyhtälöitä.

- a) Ratkaise $\sqrt{x+3} = 5$. Vihje: aluksi puolittain $()^2$.
- b) Ratkaise $\sqrt{x+2} = 2x$. Vihje: aluksi puolittain $()^2$.
- c) Ratkaise $\sqrt{2x-1} = 3x-1$. Vihje: aluksi puolittain $()^2$.
- d) Ratkaise $\sqrt{1+\sqrt{2+x}} = 3$. Vihje: puolittain $()^2$, puolittain -1 ja puolittain $()^2$.
- e) Ratkaise $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1$. Vihje: aluksi puolittain $()^2$. Kaava $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ auttaa. Sitten pieni järjestely ja puolittain $()^2$.

$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1 \quad || ()^2$

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^2 = 1^2 = 1$$

$$\cancel{\sqrt{x+1}}^2 - 2\sqrt{x+1}\sqrt{x}^{\frac{1}{2}} + \cancel{\sqrt{x}}^2 = 1$$

$$\dots \sqrt{x(x+1)} + x = x$$

$(ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$

$$x + x - 2\sqrt{x(x+1)} + x = \cancel{x}$$

$$2x = 2\sqrt{x(x+1)} \quad || : 2$$

$$x = \sqrt{x(x+1)} \quad || ()^2$$

$$x^2 = x(x+1)$$

$$0 \cancel{x^2} = 0 \cancel{x^2} + x$$

$$0 = x \Rightarrow \underline{\underline{x = 0}}$$

RATKA ISU

UARK,

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1$$

$$x = 0$$

$$\sqrt{0+1} - \sqrt{0} = 1$$

$$\sqrt{1} = 1 \quad \text{TOSI}$$

$$\underline{\underline{\text{JASTAVS: } x = 0}}$$

Tehtäviä: Yhtälöiden kertoimista

torstai 25. tammikuuta 2024 9.47

$$2 \cdot 2 \rightarrow \frac{3}{4} + \frac{5}{2} = A \quad || \cdot 4$$

b) Ratkaise $\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x} = 1$. Vihje: aluksi kerro luvulla $(x+1)x$ puolittain. Tee ja palauta.

c) Ratkaise $\frac{x-1}{2x+2} + \frac{x-1}{x+1} = 1$. Vihje: aluksi kerro luvulla $(2x+2)$ puolittain. Tee ja palauta.

⑥

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x} = 1 \quad || \cdot (x+1)x$$

VERRATAAN

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = A \quad || \cdot 7 = \frac{7}{1}$$

$$\frac{7}{1} \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \right) = 7A$$

$$\frac{7 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 3}{1 \cdot 5} = 7A$$

HALUTTAAN 3 JA 5 POIS

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = A \quad || \cdot 3 \text{ MILLÄ KERROTAAN PUOLITTAIN?}$$

$$3 \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \right) = 3A$$

$$\frac{3 \cdot 2}{3} + \frac{3 \cdot 3}{5} = 3A$$

$$2 + \frac{9}{5} = 3A \quad || \cdot 5$$

HALUTTAAN 5 POIS!

$$5 \left(2 + \frac{9}{5} \right) = 5 \cdot 3A$$

$$5 \cdot 2 + \frac{5 \cdot 9}{5} = 15A$$

OKOTIE $\rightarrow \cdot 3 \cdot 5$

$$3 \cdot 5 \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \right) = 3 \cdot 5 \cdot A$$

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 2}{3} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{5} = 15A$$

$$10 + 9 = 15A$$

$$19 = 15A \quad || :15$$

$$\frac{19}{15} = A$$

$$5.2 + \frac{8.7}{8} = 15A$$



$$10 + 9 = 15A \quad A = ?$$

$$19 = 15A \quad || : 15$$

$$\frac{19}{15} = A$$

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x} = 1 \quad || \cdot (x+1)x$$

$$(x+1)x \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x} \right) = (x+1)x \cdot 1$$

$$\frac{(x+1)\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x+1}} + \frac{(x+1)\cancel{x} \cdot 1}{\cancel{x}} = (x+1)x$$

$$x(x-1) + x+1 = (x+1)x$$

$$x^2 - x + x + 1 = x^2 + x$$

$$1 = x$$

$$\text{SİS} \quad \underline{x = 1}$$

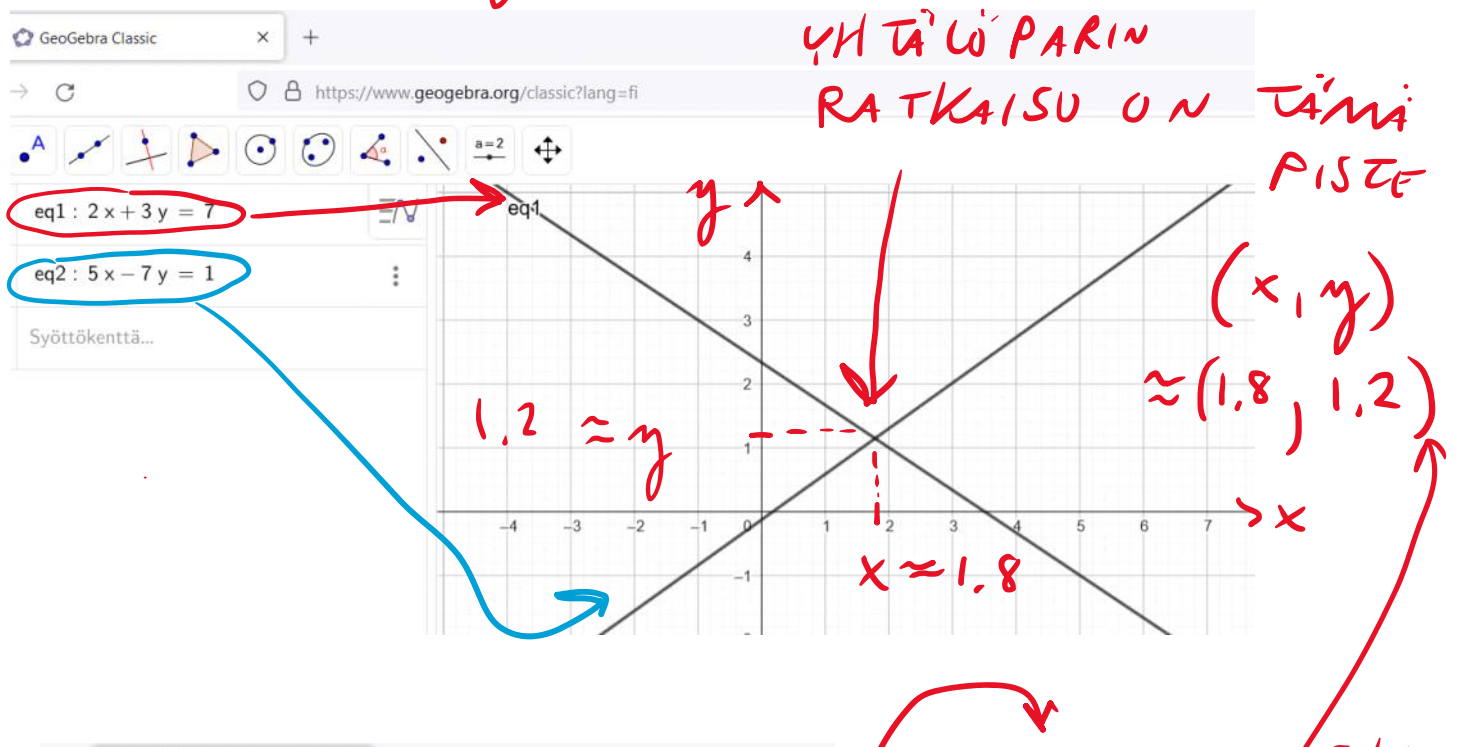
YHTÄLÖPARI ON MUOTOA

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 7y = 1 \end{cases}$$

TARKOITUKSENA ON
SAADA SELVILLE x JA y
(JOS MAHDOLLISTA).

MITÄ RATKAISU $\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$ TARKOITTA?

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 7y = 1 \end{cases} \leftarrow \begin{array}{l} \text{SUORAN YHTÄLÖ} \\ \text{JONKIN TOISEN} \\ \text{SUORAN YHTÄLÖ} \end{array}$$



Lineaarinen yhtälöryhmä — on: X +

https://www.calculat.org/fi/yhtalot/yhtaloryhma/

CALCULAT.ORG

- Laskin ratkaisee lineaarisia yhtälöryhmiä kahden muuttujan kanssa.

Laskin

Syötä yhtälö

$2x + 3y + 0 = 7$
 $5x - 7y + 0 = 1$

$2x + 3y = 7$
 $5x - 7y = 1$

$(x; y) = (1, 793; 1, 138)$

OK, Sama

SEURAAVAKSI

MITEN RATKAISTAA
KÄSIN?

- SIIJOITUSMENETELMÄ
- YHTEENLASKUMENETELMÄ

YHTEENLASKUMENETELMÄ

- KERROTAAN YHTÄLÖITÄ LUVUILLA NIIN, ETTÄ YHTEENLASKIESSA x TAI y HÄVIÄÄ

ESIM.

$$\begin{array}{rcl}
 + 2x + 3y = 7 & | \cdot 5 \\
 + 5x - 7y = 1 & | \cdot (-2) \\
 \hline
 10x + 15y = 35 \\
 -10x + 14y = -2 \\
 \hline
 29y = 33 & | : 29
 \end{array}$$

$y = \frac{33}{29}$

TAPA 1

SITTE N
SIIJOITUS JA
RATKAISTAA

TAPA 2

$$\begin{array}{rcl}
 \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 7y = 1 \end{array} \right. & \begin{array}{l} || \cdot 7 \\ || \cdot 3 \end{array} \\
 \left\{ \begin{array}{l} 14x + 21y = 49 \\ 15x - 21y = 3 \end{array} \right. & \\
 + & \\
 29x + 0y = 52 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 29x = 52 \quad || : 29 \\
 \boxed{x = \frac{52}{29}}
 \end{array}$$

$$2x + 3y = 7 \quad \text{RATKAISTAAN}$$

$$x = \frac{52}{29}$$

VASTAUS:

$$\begin{cases} x = \frac{52}{29} \\ y = \frac{33}{29} \end{cases}$$

SIJOTUS MENETELMÄ

- RATKAISTAAN JOHANNASTA KUMMASTA YHTÄLÖSTÄ x TAI y

JA SIJOITETAAN TOISEEN YHTÄLÖÖN

ESIM.

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} \Rightarrow y = 3 - 2x$$

$$3x + 4(3 - 2x) = 7$$

RATKAISTAAN x

$$3x + 12 - 8x = 7 \quad || -12$$

$$3x - 8x = 7 - 12$$

$$-5x = -5 \quad || : -5$$

$$x = 1 \leftarrow \text{SIJOITETAAN JOHANNASTA}$$

$$y = 3 - 2x$$

$$y = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$$

VASTAUS:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

ESIM.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 5x + 7y = 2 \end{cases}$$

$$2y = 3 - 3x \quad || : 2$$

$$y = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x$$

$$5x + 7\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x\right) = 2 \quad || \cdot 2$$

$$10x + 2 \cdot 7\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x\right) = 4$$

$$10x + 7(3 - 3x) = 4$$

$$10x + 21 - 21x = 4 \quad || - 21$$

$$10x - 21x = 4 - 21$$

$$-11x = -17 \quad || : -11$$

$$x = \frac{17}{11}$$

$$y = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x\right)$$

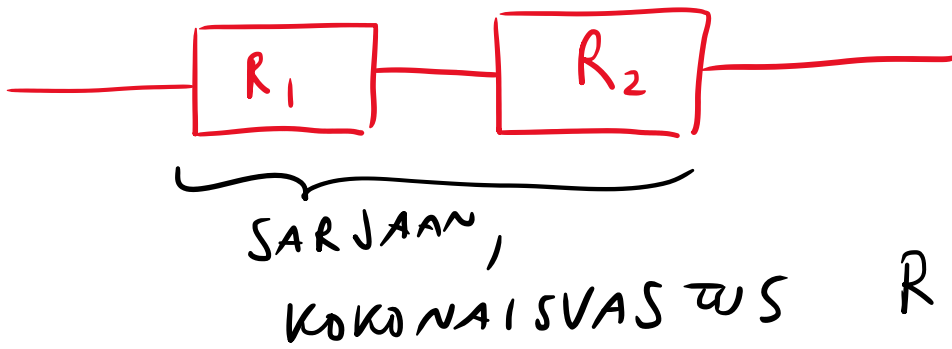
$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{17}{11} = \frac{3 \cdot 11}{2 \cdot 11} - \frac{51}{22} = \frac{33 - 51}{22}$$

$$= \frac{-18}{22} = \frac{-9}{11}$$

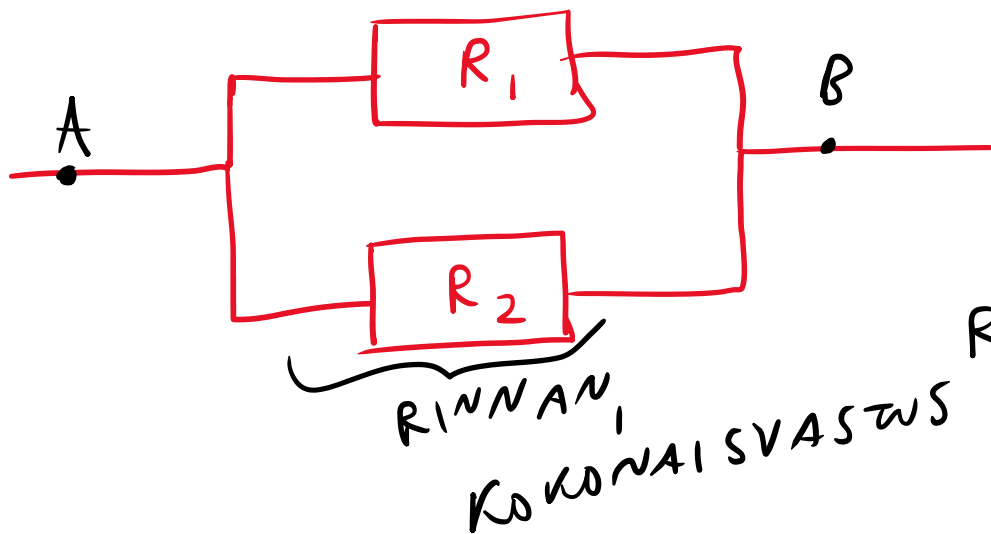
VASTAUS:

$$\begin{cases} x = \frac{17}{11} \\ y = \frac{-9}{11} \end{cases}$$

SOVELLUS ELEKTRONIIKKAA



$$R = R_1 + R_2 > R_1 > R_2$$



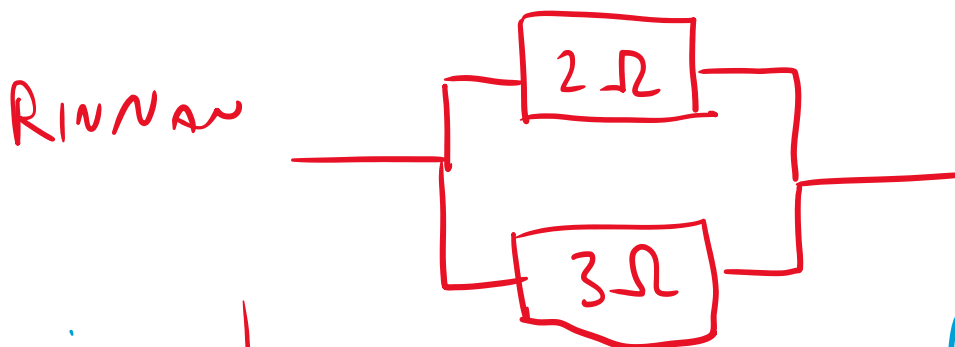
$$R : \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$



$$< R_1 < R_2$$

KOK VASTUS $R = 2 + 3 = \underline{\underline{5\Omega}}$



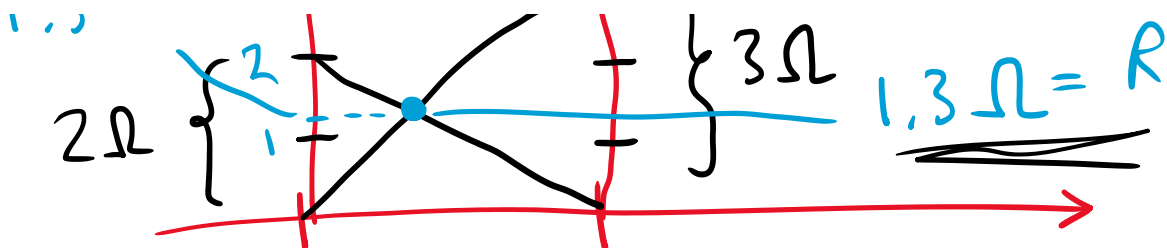
KOKONAIS-
VASTUS

1.3

~~x2~~

3Ω

$$1.3\Omega = R$$



LASKEMA LLA

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1.3}{2.3} + \frac{1.2}{2.3}$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$$

$$= \frac{5}{6}$$

$$\rightarrow \frac{1}{R} = \frac{5}{6}$$

$$1.6 = 5 \cdot R$$

$$6 = 5R \quad || : 5$$

$$\frac{6}{5} = R$$

KUVA ANTU, 1.3Ω

$$R = \frac{6}{5} = \frac{6 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10} = \underline{\underline{1.2 \Omega}}$$

3. Ratkaise

a) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 0, \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 14x + 7y = 0, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3 = 0, \\ 2x + 3y + 4 = 0, \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0, \\ 9x - 6y - 3 = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 & || -3 \\ 2x + 3y + 4 = 0 & || -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = -3 & || \cdot (-2) \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 4y = 6 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$$

$$0x - 1y = 2$$

$$-y = 2 \quad || \cdot (-1)$$

$$x + 2y = -3$$

$$x + 2(-2) = -3$$

$$x - 4 = -3 \quad || + 4$$

$$x = -3 + 4 = 1$$

$$\underline{x = 1}$$

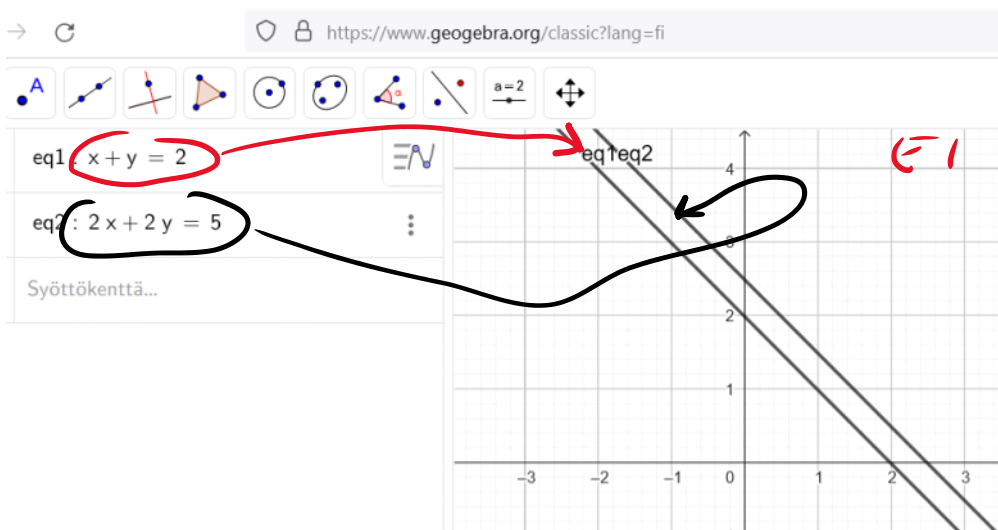
$$-y = 2 \quad || \cdot (-1)$$

$$+(-y) = -2$$

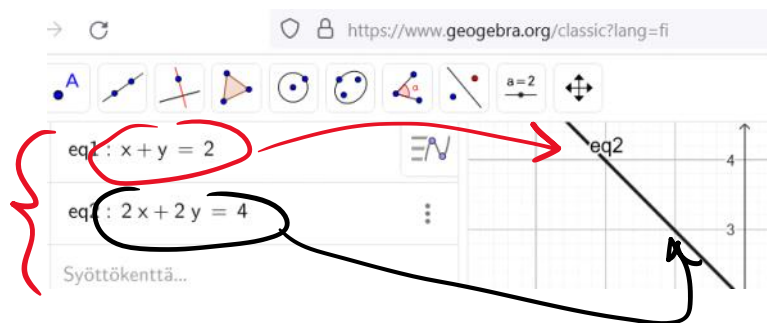
$$\underline{y = -2}$$

VASTAUS

JOSKUS YHTÄLÖPARILLA
 — EI OLE RATKAISUA
 — ON ÄÄRETÖMÄIN MONTA
 RATKAISUA



EI
 LEIKKAUS -
 PISTETTÄ
 EI RATKAISUA



SAMA SUORA

SIIS

ESIM,

x voi olla
mikä tahansa
luku

KUUKHAN $x + y = 2$

VASTAUS: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 - x \end{cases} \rightarrow y = 2 - x$

ESIMERKKI. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 & || \cdot 4 \\ 4x + 6y = 12 & || \cdot (-2) \end{cases}$

$$+ \begin{cases} 8x + 12y = 4 \\ -8x - 12y = -24 \end{cases}$$

$$0x + 0y = -20$$

$$0 = -20$$

EPÄTOSI,

EI RATKAISUA.

ESIMERKKI.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y = 3 & \parallel \cdot 2 \\ 2x + 2y = 6 & \parallel \cdot (-1) \end{cases} \\ & y = 3 - x \\ & \begin{aligned} & \begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ -2x - 2y = -6 \end{cases} \\ & \hline & 0x + 0y = 0 \\ & 0 = 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

$x = 3 - y$

TOSI,

YHTÄLÖLÄI ON
ÄÄRITTÖMÄSTI
RATKAISUJA

VASTAUS:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3 - x \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \text{TÄI} \\ \text{VASTAUS:} \end{array} \begin{cases} x = 3 - y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ESIM.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + y = 3 & \parallel \cdot (-2) \\ 4x + 3y = 6 + y \end{cases} \\ & \begin{aligned} & \begin{cases} -4x - 2y = -6 \\ 4x + 3y = 6 + y \end{cases} \\ & \hline & 0x + y = y \end{aligned} \end{aligned}$$

$$0x + y = y$$

$$\text{TO SI } y = y$$

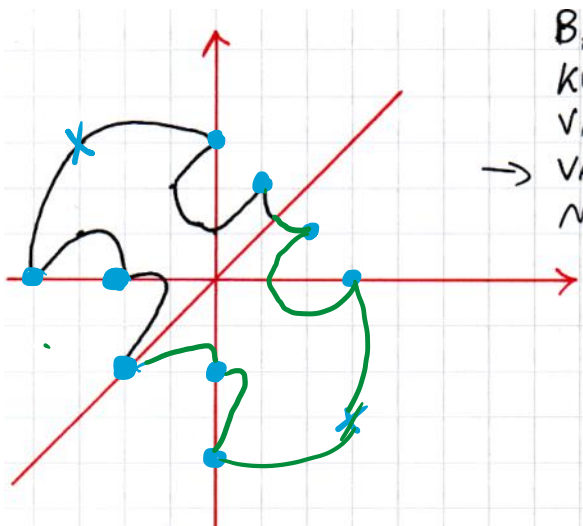
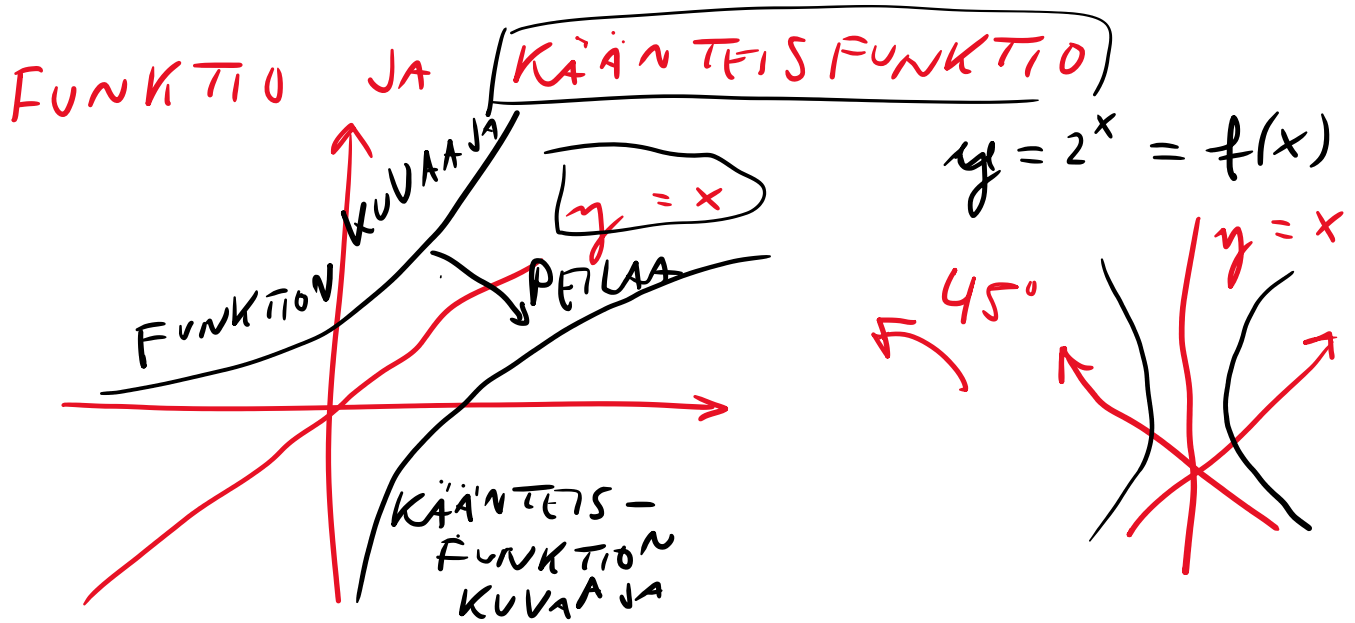
ESIMERKKI.

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2x = 6 \end{cases}$$

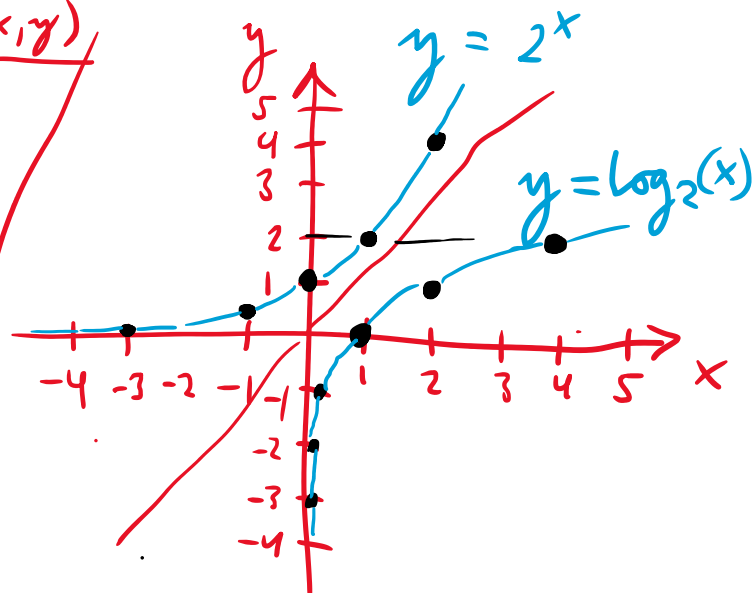
$$\begin{cases} x + y = 3 + y \\ 2x + 4y = 6 + 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x = 6 \quad || :2 \\ x = 3 \end{cases}$$

VASTAUS:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$



x	$2^x = y$	(x, y)
-3	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0.125$	
-2	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$	
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0.5$	$(-1, 0.5)$
0	$2^0 = 1$	$(0, 1)$
1	$2^1 = 2$	$(1, 2)$
2	$2^2 = 4$	$(2, 4)$
3	$2^3 = 8$	



$$\begin{array}{c|c} 2 & 2^2 = 4 \\ 3 & 2^3 = 8 \end{array} \quad | \quad (2, 4)$$

LOGARITMIN
MÄÄRITELMÄ

KANTALUKU POTENSSI
↓ ↓
 $2^3 = 8$ TULOS

POTENSSI
↓
TULOS
↓
KANTALUKU
 $\log_2(8) = 3$

$2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2(8) = 3$

"LOGARITMI KERTOO
MIHIN POTENSSIIN KANTALUKU TULEE LAITTA,
ETTA SAADAAN HALUTTU TULOS."

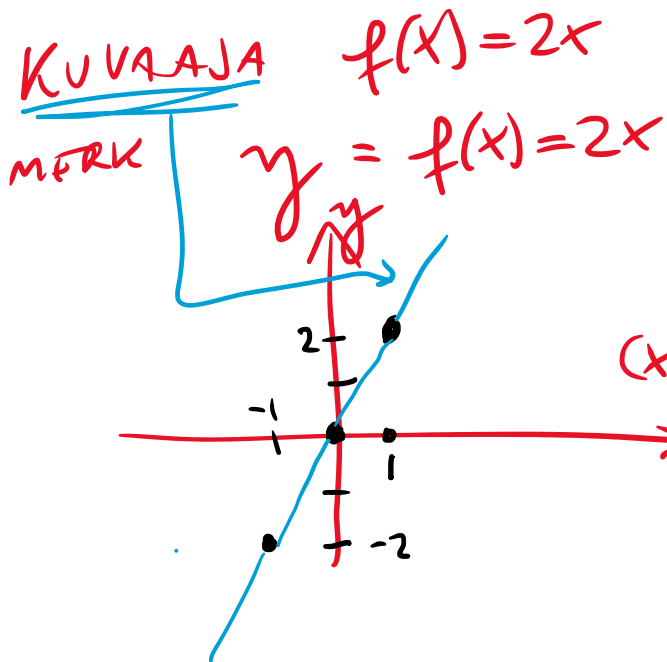
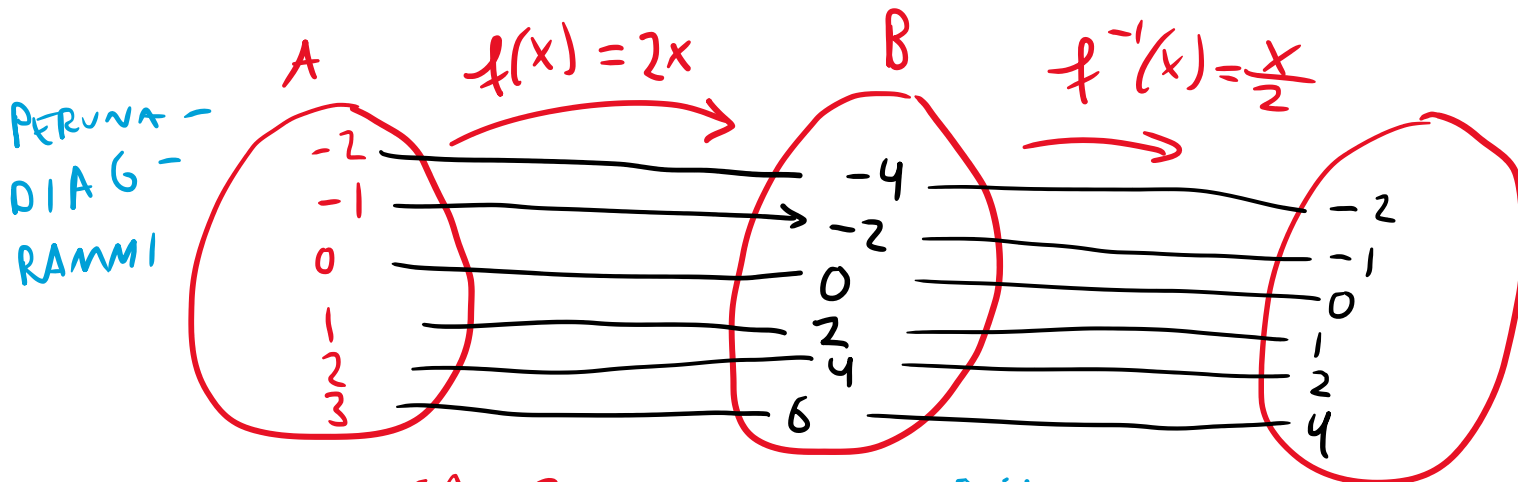
$$\log_{10}(1000) = 3 \quad \text{koska} \quad 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

$$\log_5(25) = 2 \quad \text{koska} \quad 5^2 = 25$$

$$\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \quad \text{koska} \quad 2^{(-2)} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

FUNKTIO ON SÄÄNTÖ, JOKA TUOTTAA
YKSIKÄSITTEISEN LOPPUTULOKSEN

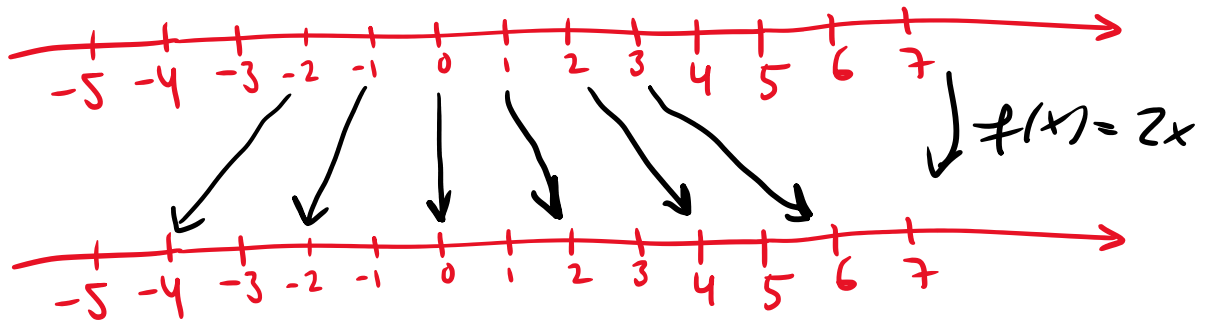
- USEIN FUNKTION VOI ILMAISTA KAAVALLA
- FUNKTIOITA VOI HAVAINNOLLISTAA MONELLA TAVALLA



KÄÄNTEISFUNKTIO
 $f^{-1}(x)$ KUMOAA
FUNKTION $f(x)$
TEHMÄN OPERATION

JOS ON TARVETTA,
VOI HAVAINNOLLISTAA
MUUTUNKIN





KÄSITTELTÄ

(QUIZ)

LÄHTÖJOUKKO

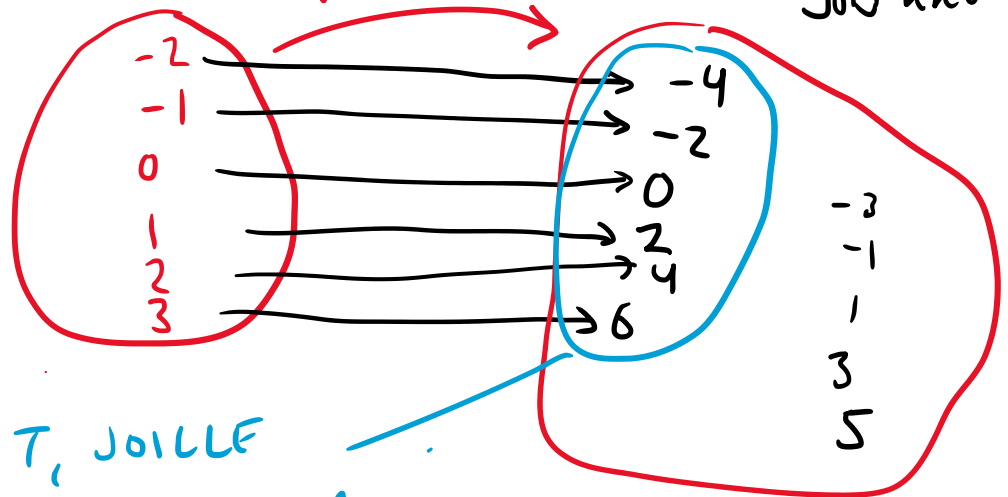
= MÄÄRITTELYJOUKKO = $A = \mathbb{Z}$ $f(x) = 2x$

B = MAALI-JOUKKO

$f(3) = 6$
LUVUN 3
KUVA ON 6

LUVUN 6
ALKUKUVA
ON 3

LUVUT, JOILLE
TULEE NUOLIA
= KUVAJOUKKO



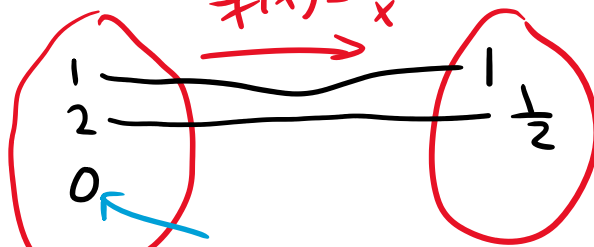
MILLOIN KÄÄNTÖFUNKTIO
ON OLEMASSA?

FUNKTIO EI SAA

TEHDÄ SEURAAVA ASIOITA

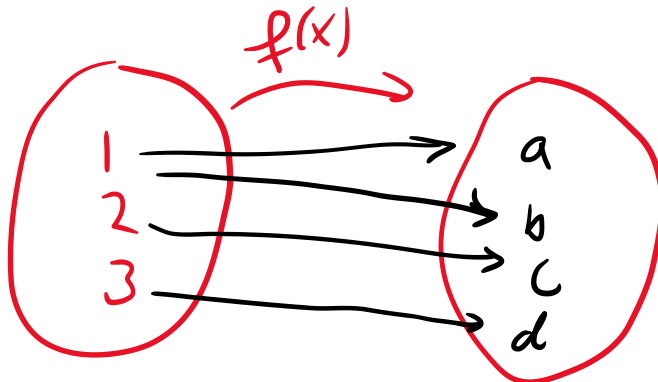
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

①



0
EI VOIDA LASKEA $f(0) = \frac{1}{0}$

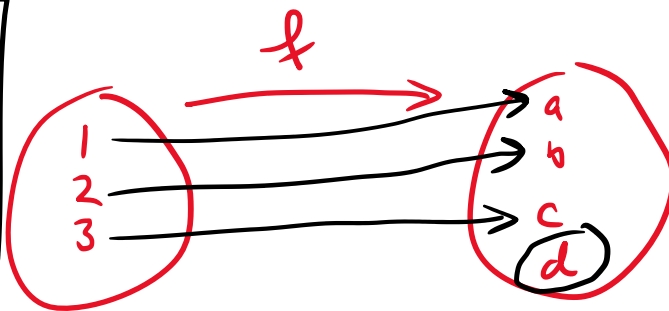
(2)



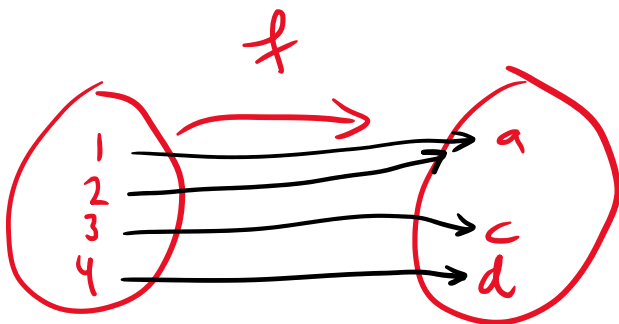
EI SAA OLLA JOSKUS $f(1) = a$
JA JOSKUS $f(1) = b$

FUNKTION ARVON TUKEE OLLA YKSIKÄSITTENÄ

ESIM.



$\Rightarrow f^{-1}$
EI OLE OLE MASSA
KOSKA



$\Rightarrow f^{-1}$

EI MÄÄRITELTY
KOSKA

$f^{-1}(d)$
EI MÄÄRITELTY

$$f(x) = x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f^{-1}$$

EI OLEM.

$$x^2 = y \Rightarrow x = \pm \sqrt{y}$$

$f^{-1}(a) = 1?$
 $f^{-1}(a) = 2?$ } MONI-KÄSITTELYSSYYS

LASKU ESIMÄRKKIJÄ

1. SIJOITUS
- 2.
3. YHDISTETTY FUNKTIO

ESIM.

$$f(x) = 2x$$

$$g(x) = x + 1$$

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x+1) \\ &= 2(x+1) = 2x+2 \end{aligned}$$

$$g(f(x)) = g(2x) = 2x + 1$$

FRITULOS

ESIM. $f(x) = 3x - 2$

$$f(-2) = 3 \cdot (-2) - 2 = -6 - 2 = -8$$

$$f(-5) = 3 \cdot (-5) - 2 = -15 - 2 = -17$$

$$f(\alpha) = 3\alpha - 2$$

ALFA

$$\begin{aligned} f(x+2) &= 3(x+2) - 2 \\ &= 3x + 6 - 2 = 3x + 4 \end{aligned}$$

4. KÄÄNTÄISFUNKTION KAAVAN ETSIMISTÄ

$$f(x) = 3x + 2 \quad \boxed{f^{-1} ?}$$

MERKITÄÄN

$$3x + 2 = y \quad -2 \quad \text{RATKAISUAAN } x$$

$$3x = y - 2 \quad || :3$$

$$x = \frac{y-2}{3} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}}$$

LASKEAAN

$$20.23 \rightarrow 20.45$$

3. Olkoot $f(x) = 2x$, $g(x) = x - 1$ ja $h(x) = x^2$. Määritä

a) $f(g(x))$,

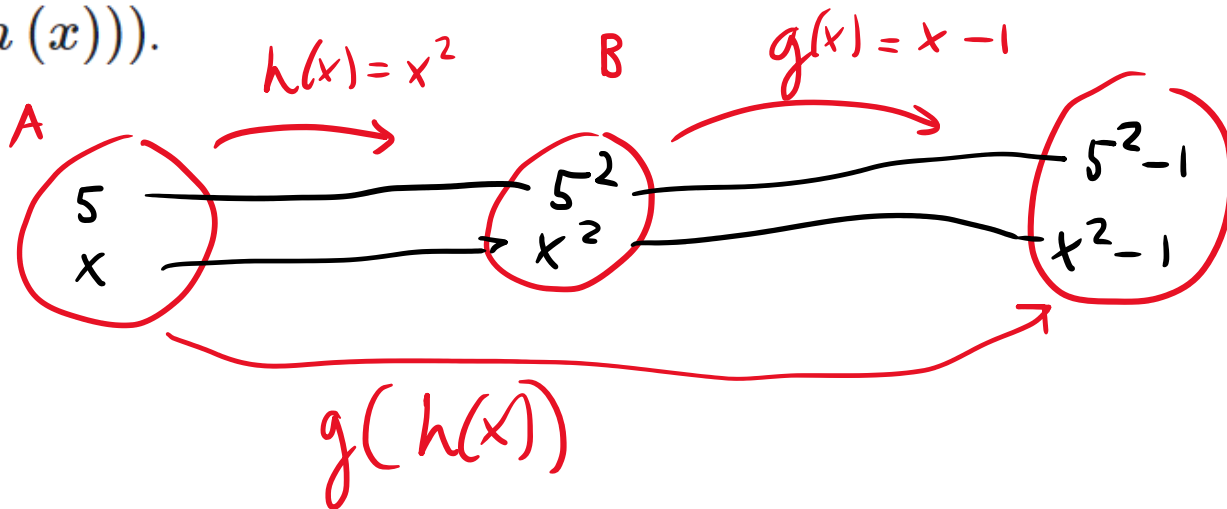
b) $f(h(x))$,

c) $g(h(x))$,

d) $g(f(x))$,

a) $f(g(h(x)))$.

$$\underline{\underline{g(h(x)) = x^2 - 1}}$$



<https://www.wolframalpha.com/input?i=g%28h%28x%29%29+where+h%28x%29%3Dx%5E2+and+g%28x%29%3Dx-1>



$g(h(x))$ where $h(x) = x^2$ and $g(x) = x - 1$

NATURAL LANGUAGE

MATH INPUT

EXTENDED KEYBOARD

Input interpretation

$g(h(x))$ where $h(x) = x^2$, $g(x) = x - 1$

Result

$x^2 - 1$

LASTIN STÄ VOI YRITTÄÄ TARKISTAA

$$h(x) = x^2$$

$$h(5) = 5^2$$

$$g(x) = x - 1$$

$$g(h(5)) = g(5^2)$$

$$g(h(x)) = x^2 - 1$$

$$= 5^2 - 1$$

"TARKISTUS"

$$g(h(5)) = 5^2 - 1$$

OK

TÄNÄÄN

- PARI ESIMERKKIÄ YHDISTETTYISTÄ FUNKTIOISTA
- KATSO TAAN TEHT. 3 YHDESSÄ
- LASKE TAAN, SAA KYSELLÄ

Yhdistetty funktio sanallisesti

laskun vaihe	tulos
1. otetaan luku x	X
2. kerrotaan kahdella	2X
3. lisätään 3	<u>2X + 3</u>

OK, sama

$$\left. \begin{array}{l} 2. f(x) = 2x \\ 3. g(x) = x + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$g(f(x)) = g(\underline{2x}) = \underline{\underline{2x + 3}}$$

laskun vaihe	tulos
1. otetaan luku x	X
2. lisätään 3	X + 3
3. jaetaan 7:llä	$\frac{X + 3}{7}$

3. Jaetaan 7:lla

$$\frac{x+3}{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2. f(x) = x+3 \\ 3. g(x) = \frac{x}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow g(f(x)) = g(x+3) = \frac{x+3}{7} = \frac{x+3}{7}$$

laskun vaihe

tulos

1. otetaan luku x

x

2. lisätään 3

x+3

3. laitetaan potenssiksi 2

$$\begin{aligned} \underline{(x+3)^2} &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\left. \begin{array}{l} 2. f(x) = x+3 \\ 3. g(x) = x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow g(f(x)) = g(x+3) = \underline{(x+3)^2}$$

3. Olkoot $f(x) = 2x$, $g(x) = x - 1$ ja $h(x) = x^2$. Määritä

a) $f(g(x))$,

Ratkaisu.

- Tapa 1. Käytetään funktiota g ja sitten funktiota f. Saadaan $f(g(x))$
- Tapa 2. Käytetään funktiota f ja sitten funktiota g. Saadaan $f(g(x))$
- Tapa 3. Voidaan tehdä välivaihe $f(y) = 2y$ ja $g(x) = x - 1$

b) $f(h(x))$,

c) $g(h(x))$,

d) $g(f(x))$,

a) $f(g(h(x)))$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x = 2(\quad) \\ g(x) &= (x) - 1 = (\quad) - 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = \dots$$

$$g(x) = (x) - 1$$

$$h(x) = x^2$$

$$= (\dots) - 1$$

$$(a) \quad f(g(x)) = f(x-1) = 2(x-1) = 2x-2$$

$$= x-1$$

$$(b) \quad f(h(x)) = f(x^2) = 2(x^2) = 2x^2$$

$$(c) \quad g(h(x)) = g(x^2) = (x^2) - 1 = x^2 - 1$$

$$(d) \quad g(f(x)) = g(2x) = (2x) - 1 = 2x - 1$$

$$(e) \quad f(g(h(x))) = f(g(x^2)) = f((x^2) - 1)$$

ALDIŢE TAV
SISĂLTĂ

$$= f(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1)$$

$$= 2x^2 - 2$$

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x} - 1 = 0$$

$$\frac{x(x-1)}{x(x+1)} + \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x(x-1)}{x(x-1)} = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{x(x-1)}{x(x+1)}} \right\} \text{VĂŢĂRIU}$$

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x} - 1 = 0$$

$$\frac{x(x-1)}{x(x+1)} + \frac{1(x+1)}{x(x+1)} - \frac{x(x+1)}{x(x+1)} = 0$$

② $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$

$$f(-2) = \sqrt{4 + 2(-2)}$$

↓ SINOITE TANU ↑

$$= \sqrt{4 + 4}$$

$$= \sqrt{8}$$

$$f(-2) = \frac{(-2) + 2}{3(-2) + 1} = \frac{0}{-5} = 0$$

SIRFLU² in

$$2x + 3 = 4x + 7$$

$$2x - 4x = 7 - 3$$

$$2x + 3 - 4x = \cancel{4x} + 7 - \cancel{4x} \quad || -3$$

$$2x - 4x = 7 - 3$$

154 11-5A 1410157-7741

YLI MÄÄRÄINEN HUOMAUTUS

HIINTOLOMAN JÄLKEEN YHDISTETTYJÄ
FUNKTIONIA TARVIKSEN DERIVOITAESSA

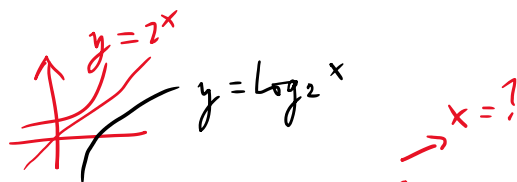
ESIM. $D \ln(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{(\quad)}$

$$D \sin(x) = \underline{\cos(x)}$$

$$D \ln(\sin(x)) = \frac{1}{(\sin(x))} \cdot D \sin(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

KERTAUSTA

- POTENSSIN LASKUSÄÄNNÖT
- KUVAAJIA



- LOGARITMIT
- { EKS PONENTTI YHTÄYTIÄ
LOGARITMI YHTÄYTIÄ

$$\text{ESIM. } 7^x = 4^{2x+3}$$

$$\text{ESIM. } \ln(x+2) = 2\ln(x) + 3 \rightarrow x = ?$$

LOGARITMIN MÄÄRITELMÄ

SA NALLISESTI

LOGARITMI KERTOO

MIKÄ TÄYTYY LAITTA KANTALUVULLE POTENSSIKSI,
ETTU SAADAAN MAHTAV LUKU.

$$2^3 = 8$$

$$2^3 = 8$$

$$2^0 = 1 \quad \boxed{0 \quad 0} = 1$$

$$3^0 = 1$$

$$\log_2(8) = 3$$

$$\log_3(9) = 2$$

$$\log_{10}(1000) = 3$$

KOKONAISLUKUN
LOGARITMI T

$$3^2 = 9$$

KOKKI -
LEMMILLA

$$\textcircled{3} \quad 10 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

LUKUN 1
LOGARITMI
ON AINA 0

$$\begin{cases} \log_2(1) = 0 \\ \log_3(1) = 0 \end{cases}$$

$$2^0 = 1$$

$$3^0 = 1$$

LUKUN ITSE
LOGARITMI
ON AINA 1

$$\begin{cases} \log_2(2) = 1 \\ \log_3(3) = 1 \end{cases}$$

$$2^1 = 2$$

$$3^1 = 3$$

$$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = -2$$

$$\log_2(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{3^{-2} = \frac{1}{3^2}}$$

$$\sqrt{2} = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

u

$$2^3 = 8$$

SIIS JOSKUS
LOGARITMIN
ARVON SAA
KÄYTTÄMÄLLÄ

$$\log_2(8) = ? \quad \text{mikä?}$$

$$2^{\quad} = 8$$

→ 3 on
sopiva luku

$$\rightarrow \log_2(8) = 3$$

Käytetään
harjoittelua materiaalia

← kurssi-
kirja

EXERCISES 1.2

1. Evaluate
 - (a) 2^3
 - (b) 3^2
 - (c) $\frac{5^{11}}{5^{12}}$
 - (d) $\frac{19^{-11}}{19^{-10}}$
 - (e) $(2^{1/4})^8$
 - (f) $(-4)^{-2}$
 - (g) $4^{-1/2}$
 - (h) $(9^{1/3})^{3/2}$
 - (i) $\sqrt{33}\sqrt{2}$
 - (j) $\sqrt{0.01}$
 - (k) $81^{1/4}$
2. Use a scientific calculator to evaluate
 - (a) $10^{1.2}$
 - (b) $6^{-0.7}$
 - (c) $8^{2.5}$
 - (d) $(3^{-1}4^2)^{0.8}$
3. Express each of the following expressions using a single positive index:
 - (a) x^3x^7
 - (b) $x^2(-x)$
 - (c) $\frac{x^5}{x}$
 - (d) $\frac{x^{-2}}{x^{-1}}$
 - (e) $(x^{-2})^4$
 - (f) $(x^{-2.5}x^{-1.5})^2$
4. Simplify as much as possible
 - (a) $\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}}$
 - (b) $(16x^4)^{0.25}$
 - (c) $\left(\frac{27}{y^3}\right)^{1/3}$
 - (d) $\frac{2xy^2}{(2xy)^2}$
 - (e) $\sqrt{a^2b^3c^4}$
 - (f) $(64x^3)^{2/3}$

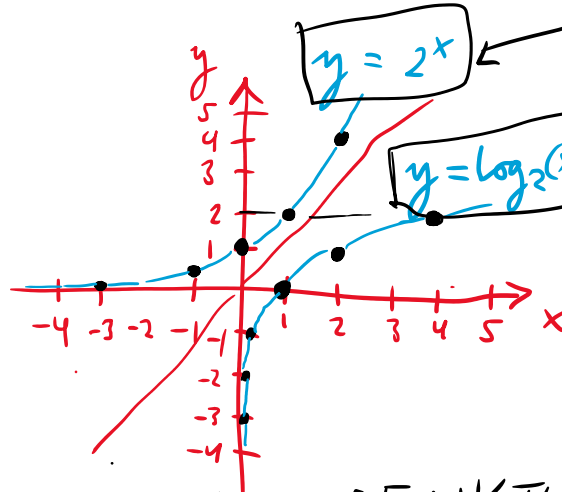
1.3 Number bases 11

Solutions

1. (a) 8 (b) 9 (c) 5 (d) 361
(e) 4 (f) $\frac{1}{10}$ (g) $\frac{1}{2}$ (h) 3
(i) 8 (j) 0.1 (k) 27
2. (a) 15.8489 (b) 0.2853 (c) 8.159
(d) 88.1816 (e) 3.8159
3. (a) x^{10} (b) $-x^3$ (c) x
(d) $\frac{1}{x}$ (e) $\frac{1}{x^2}$ (f) $\frac{1}{x^{12}}$
4. (a) $x^{1/6}$ (b) $2x$ (c) $\frac{3}{y}$
(d) $\frac{1}{2x}$ (e) ab^3c^2 (f) $16x^2$

KUVAAJAT

PIIRRETTIIN
VIIME
VIIKKOLLA



TOISTENSA
KÄÄNTÄIS-
FUNKTIOITA

FUNKTIO

$2x$
 $x - 3$
 x^2
 2^x

KÄÄNTÄISFUNKTIO

$\frac{1}{2}x$
 $x + 3$
 $\sqrt{x}$
 $\log_2(x)$

KUMOUTUMINEN

$$\frac{1}{2}(2x) = x$$

$$2\left(\frac{1}{2}x\right) = x$$

$$\begin{cases} (x-3)+3 = x \\ (x+3)-3 = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2} = x \\ \sqrt{x^2}^2 = x \end{cases}$$

$$2^{\wedge}$$

$$\log_2(x)$$

$$(\sqrt{x})^2 = x$$

ESIM.

$$\log_2(2^3) = \log_2(8) = 3$$

$$2^{\log_2(16)} = 2^4 = 16$$

$$\begin{cases} \log_2(2^x) = x \\ 2^{\log_2(x)} = x \end{cases}$$

POTENSSIN
LASKUSÄÄNNÖT

$$a^b a^c = a^{b+c}$$

LOGARITMIN
LASKUSÄÄNNÖT

$$\log_2$$

$$\log_2(ab) = \log_2(a) + \log_2(b)$$

ESIM.

$$10 = \log_2(1024) = \log_2(2 \cdot 512)$$

$$= \log_2(2) + \log_2(512)$$

$$= 1 + 9$$

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

$$\log_2\left(\frac{a}{b}\right) = \log_2(a) - \log_2(b)$$

ESIM.

$$3 = \log_2(8) = \log_2\left(\frac{32}{4}\right)$$

$$= \log_2(32) - \log_2(4)$$

$$= 5 - 2$$

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

$$\log_2(a^b)$$

ESIM.

$$3 = \log_{10}(1000)$$

$$= \log_{10}(10^3)$$

$$\begin{aligned} &= \log_{10}(10^3) \\ &= 3 - \log_{10}(10) = 3 \cdot 1 \end{aligned}$$

(EI KÄYTTÄEN)

TALLETUS 1000 €, KORKO 2%, MILLOIN 2000 €?

$$\log_{10}(x) \approx \frac{x-1}{x+1} \quad , \quad \text{jos} \quad 1 < x < 5$$

└──────────┘

TÄMÄN SAA AIKAAN

$$\log_{10}(\underbrace{1000}_3) = 3$$

$$\log_{10}(2) = 0,3$$

ESIM. $\log_{10}(4000)$

ESIM. $\log_{10}(800)$

K: ONKO $\lg = \log_{10}$?

V: PITÄISI OLLA, MUTTA Kokeile: $\lg(10) = 1 \Rightarrow OK$

EILEN "PERHE"
 KOSKA $2^3 = 8$
 NIIN $\log_2(8) = 3$

$$2 = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$$

$$3 = \log_2(8)$$

$$8 = 2^3$$

$$\log_{10}(4000) = ?$$

ARVIO

$$\log_{10}(x) \approx \frac{x-1}{x+1}$$

$$\text{JOS } 1 < x < 5$$

$$\begin{aligned} \log_{10}(4000) &= \log_{10}(1000 \cdot 4) = \log_{10}(\underbrace{1000}_3) + \log_{10}(4) \\ &= 3 + \frac{4-1}{4+1} \\ &= \underline{\underline{3.6}} \quad = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0.6 \end{aligned}$$

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

$$\log_a(1) = 0, \quad \log_a(a) = 1, \quad \log_a(a^x) = x, \quad a^{\log_a(x)} = x$$

$$\begin{aligned}\log_a(b^c) &= c \log_a(b) \\ \log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\ \log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}\end{aligned}$$

$$\text{lb}(x) = \log_2(x), \quad \text{lg}(x) = \log_{10}(x), \quad \ln(x) = \log_e(x), \quad e \approx 2,72$$

4. Ratkaise

- a) $16 = 10^x$,
 b) $3^{2x+1} = 7$,
 c) $2e^x = 9$,
 d) $e^{2x} = 7e^x$,
 e) $3^{3x} = 7^{x+1}$,
 f) $2^{x-1} = 4^{2x}$.

TAPA ① $\parallel \ln()$

② MUOKATAAN 7:ÄÄ SUMMA

⑤

$$3^{3x} = 7^{x+1} \parallel \log_7()$$

$$\log_7(3^{3x}) = \log_7(7^{x+1}) = x+1$$

$$3 \times \log_7(3) = x+1 \parallel -x \rightarrow ax = b \parallel :a$$

$$x = \frac{b}{a}$$

$$3 \times \log_7(3) - 1 \cdot x = 1$$

$$x(3 \log_7(3) - 1) = 1$$

0 TETTII N
 YHTÄISEKSI,
 TEKIJÄKSI

$$x = \frac{1}{3 \log_7(3) - 1}$$

$$= 1.44$$

Sama!

$$x = \frac{\ln 7}{3 \ln 3 - \ln 7} = 1.44$$

$$xy + 4x = x(y + 4)$$

TARKISTUS

$$x(y+4) = xy + 4x$$

$$7^{2x} = 4^{x+5}$$

JOS ON x POTENSSISSA,
O TA LOGARITMI,

2. Sievennä yhdeksi logaritmiksi

a) $\ln(xy) + \ln(y^2)$,

b) $\lg\left(\frac{x^3y^2}{z}\right) - 2\lg\left(\frac{xy}{z}\right)$,

c) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln\left(\frac{b}{c}\right) + \ln\left(\frac{c}{d}\right) + \ln\left(\frac{d}{a}\right)$,

d) $\log_2(t^3) - \log_2(2t) + 2\log_2 t$.

$$\ln(2 \cdot 7) = \ln(2) + \ln(7)$$

HÄJÖTETÄÄN

$$\ln(2) + \ln(7) = \ln(2 \cdot 7)$$

YHDISTETÄÄN

a) $\ln(xy) + \ln(y^2)$
 $= \ln(xy \cdot y^2) = \underline{\underline{\ln(xy^3)}}$

b) $\lg\left(\frac{x^3y^2}{z}\right) - 2\lg\left(\frac{xy}{z}\right)$
 $= \lg\left(\frac{x^3y^2}{z}\right) + \lg\left(\left(\frac{xy}{z}\right)^{-2}\right)$

$$= \underbrace{-\lg(z)}_{\text{}} \cdot \underbrace{-\lg\left(\frac{z^2}{x^2 y^2}\right)}_{\text{}} = \lg\left(\left(\frac{z^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{2}} y^{\cancel{2}}}\right)\right) = \lg\left(\frac{z^2}{x^2 y^2}\right)$$

$$= \lg\left(\frac{x^3 y^2}{z^1} \cdot \frac{z^2}{x^2 y^2}\right) = \lg(xz)$$

$$\textcircled{c} \lg\left(\frac{a}{b}\right) + \lg\left(\frac{b}{c}\right) + \lg\left(\frac{c}{d}\right) + \lg\left(\frac{d}{a}\right)$$

$$= \lg\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}\right)$$

$$= \lg\left(\frac{\cancel{a}}{\cancel{b}} \cdot \frac{\cancel{b}}{\cancel{c}} \cdot \frac{\cancel{c}}{\cancel{d}} \cdot \frac{\cancel{d}}{\cancel{a}}\right)$$

$$= \lg(1) = 0$$

↑
Laskin

"LOGARITMIEN
SUMMA
ON
TULON
LOGARITMI"

$$d) \log_2(t^3) - \log_2(2t) + 2\log_2 t$$

$$\textcircled{+} \log_2(t^3) \textcircled{-} \log_2(2t) \textcircled{+} \log_2(t^2) = \log_2\left(\frac{t^3 \cdot t^2}{2t}\right)$$

$$= \log_2\left(\frac{t^3 \cdot t^2}{2\cancel{t}}\right) = \log_2\left(\frac{t^4}{2}\right)$$

5. Ratkaise

a) $\ln(x^2 - 1) = 3$,

b) $2 \ln x + 5 = 1$,

c) $\ln(x + 1) + \ln x = \ln 12$,

d) $\lg(x - 1) + 1 = \lg(x^2 - 1)$.

$$3 = \ln(e^3)$$

$$1 = \ln(e)$$

5. Ratkaise

a) $\ln(x^2 - 1) = 3$, $\leftarrow 3 = \ln(e^3)$

b) $2 \ln x + 5 = 1$, $\leftarrow 1 = \ln(e)$

c) $\ln(x + 1) + \ln x = \ln 12$,

d) $\lg(x - 1) + 1 = \lg(x^2 - 1)$.

VER TAA ^{MAALLI -} KO E TEH TÄ' VÄ'

$\textcircled{3} \ln(2x) - \textcircled{2} \ln(x) = \ln(x + 1)$.

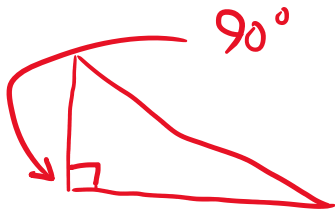
$\ln(8x^3) - \ln(x^2) = \ln(x + 1)$

$\ln\left(\frac{8x^3}{x^2}\right) = \ln(x + 1)$

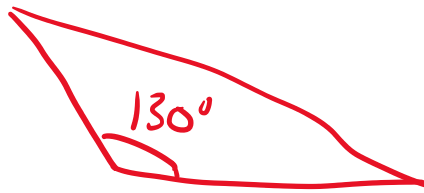
$8x = x + 1 \rightarrow x = \underline{\underline{\frac{1}{7}}}$
 $7x = 1$

TRIGONOMETRIA

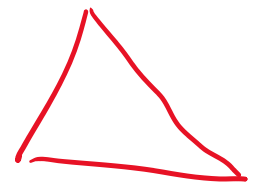
KOLMIO MITTAAAN

ERILAISIAKOLMIOITA

SUORAKULMAINEN



TYLPPÄKULMAINEN



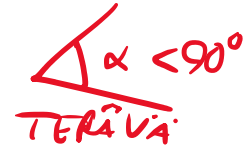
TERÄVÄKULMAINEN

ERILAISET KULMAT

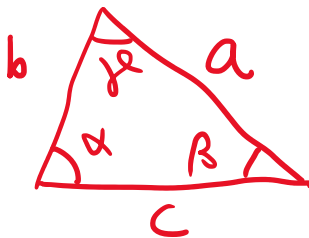
SUORA



TYLPPÄ



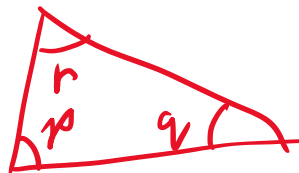
TERÄVÄ

YLEISIÄ ASIOITA, JOTKA PÄTEVÄT

• $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ PERISTELU



α ALFA
 β BEE TA
 γ GAMMA
 δ DELTA



• KOLMIO EPÄYHTÄLÖ

SIVUN PITUUS $\leq$ KAHDEN MUUN SIVUN PITUUKSEN SUMMA

ESIM. $\begin{cases} a \leq b + c \\ a - b \leq c \end{cases} \quad || -b$

ESIM. VÄLIMATKOJA SUOMESSA.

JOENSUU - HELSINKI ETÄISYYS = 440 km

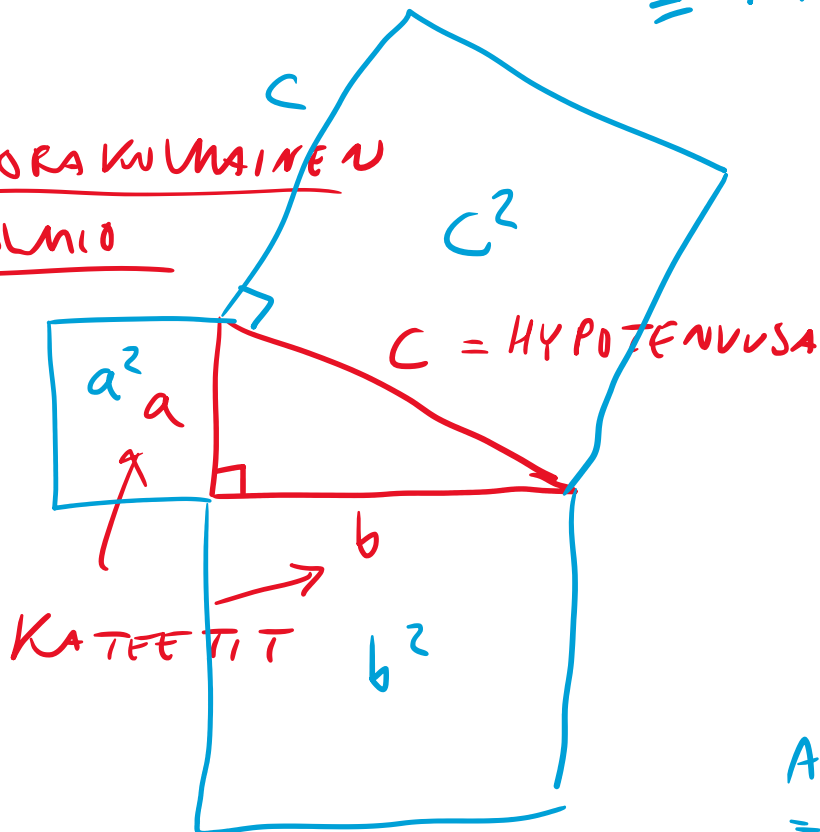
JOENSUU - KUHMU — " — = 220 km

PÄÄTELLÄÄN

KUHMU - HELSINKI $\leq 440 + 220 = 660$ km

$\geq 440 - 220 = 220$ km

SUORAKUVAISEN
KOLMION



PYTHAGORAN LAUSE:

$$a^2 + b^2 = C^2$$

PÄTEE

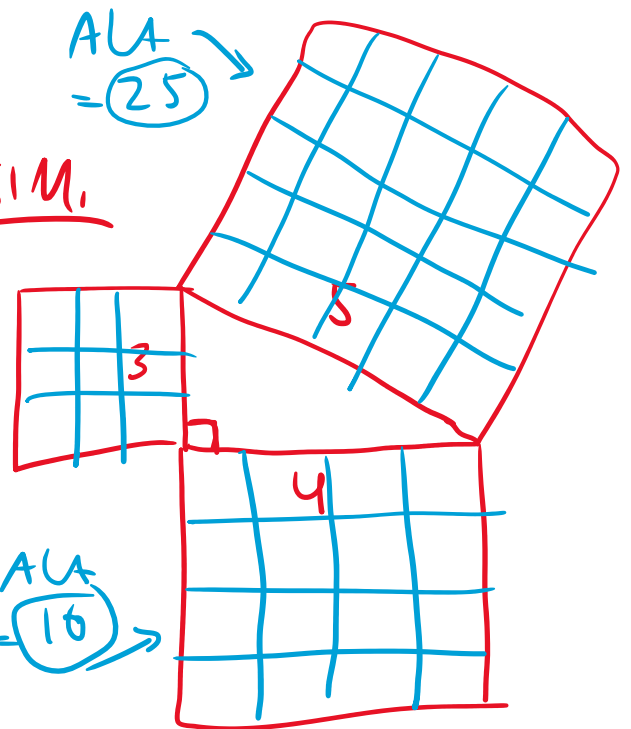
$$9 + 16 = 25$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

ESIM.

ALA = 9

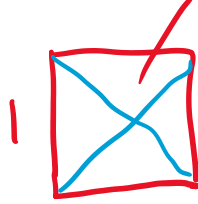
ALA = 16



ESIMERKKI. ALA = $1 \cdot 1 = 1$

MILLAINEN...

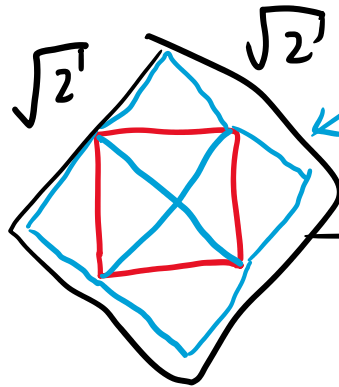
ESIMERKKI. $ALA = 1 \cdot 1 = 1$



← 4 kolmiota

MILLAINEN
NELIÖ ON
PINTA - ALALTaan 2?

RATKAISU.



8 kolmiota

$ALA = 2$

MOODLEN

PIIRTO TEHTÄVÄSTÄ

TEHTÄVÄ.

SUORAKULMAISEN

KOLMION KATETIT OVAT

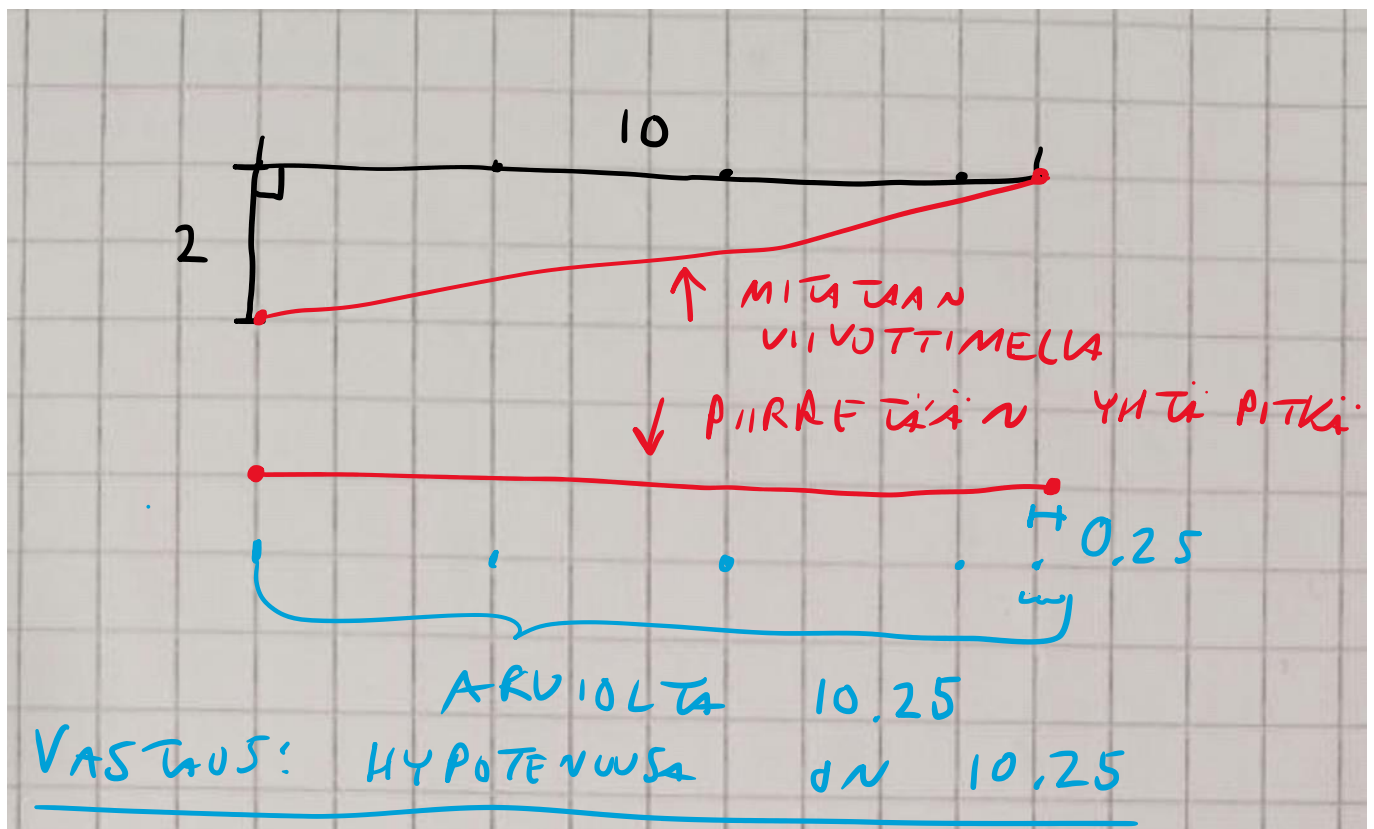
2 JA 10.

KUINKA PITKÄ ON HYPOTENUUSA?

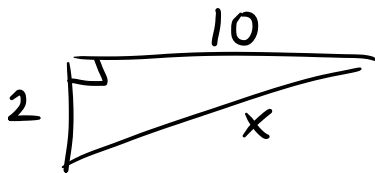
RATKAISU.

TAPA (1)

PIIRRETÄÄN KUVA JA
MITATAAN.



② KÄYTTÄÄN PYTHAGORAN LAUSETTA: $2^2 + 10^2 = x^2 \parallel \sqrt{\quad}$

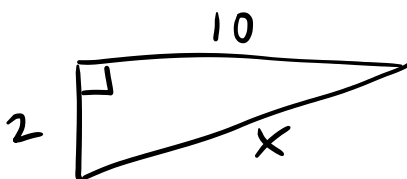


$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{10^2 + 2^2} = \\
 &= \sqrt{100 + 4} = \\
 &= \sqrt{104} \approx 10.198
 \end{aligned}$$

↑
LASKIN

VASTAUS:
HYPOTENUUSA ON 10.198

③ LIKIARVO KAAVA



$$\begin{aligned}
 x &\approx 0.96 \cdot \text{PIDEMPÄ} + 0.4 \cdot \text{LYHEMPÄ} \\
 &= 0.96 \cdot 10 + 0.4 \cdot 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0.96 \cdot 10 + 0.4 \cdot 2 \\
 &= 9.6 + 0.8 \\
 &= 10.4
 \end{aligned}$$

VASTAUS:
HYPOTENUSA ON 10,4

HIIHTOLOMAN JÄLKKEEN DERIVAATTA

$$\Rightarrow \ln(1+x) \approx x, \text{ kun } x \approx 0$$

$$\sqrt{x+h} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} h, \text{ kun } h \approx 0$$

TRIGONOMETRISET FUNKTIOT

ELI SIN/COS/TAN

ESIM.

PUISTOSSA ON VANHA PUU,
 JONKA PITUUS HALUTAAN
 SELVITTÄÄ.



LASKETAAN PUUN KORKEUS

$$\begin{aligned}
 1.37h &= 42 \quad || : 1.37 \\
 h &= \frac{42}{1.37}
 \end{aligned}$$

LASKELAN PUUN KORKEUS

$$1,37 + h = 42 \quad \dots$$

$$h = \frac{42}{1,37}$$

PÄITE

$$\frac{\text{VARJON PITUUS}}{\text{ESINEEN PITUUS}} = \text{VAKIO} =$$

$$\boxed{\frac{1,37}{1} = \frac{42}{h}}$$

YHTÄLÖ
RATKAISTAA h

$$\frac{h}{42} = \frac{1}{1,37} \quad || \cdot 42$$

$$h = \frac{42}{1,37} \approx 30,7 \text{ m}$$

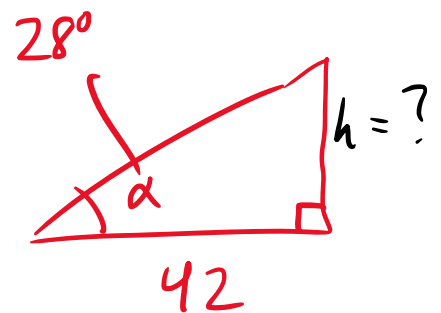
SIIS PUU ON
30,7 m PITKÄ

SIN, COS JA TAN

AUTTAVAT RATKAISMAAN
NÄITÄ TEHTÄVIÄ
JOS TIEDETÄIN KULMA.



ESIM.

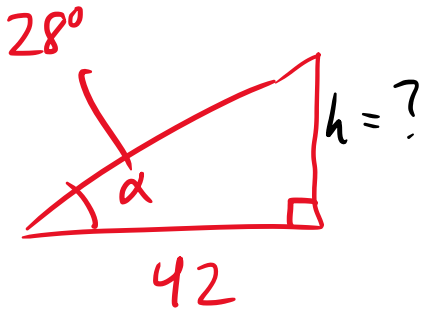


$$\sin(\alpha) = \frac{\text{VASTAINEN}}{\text{HYPOTENUUSA}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{VIEREINEN}}{\text{HYPOTENUUSA}} = \frac{a}{c}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{VASTAINEN}}{\text{VIEREINEN}} = \frac{b}{a}$$

ESIM.



RATKAISU.

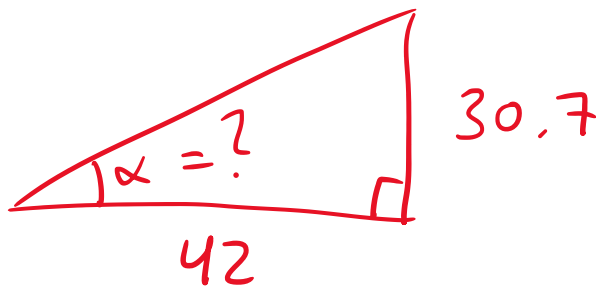
$$\frac{h}{42} = \tan(28^\circ) \quad || \cdot 42$$

$$h = 42 \underbrace{\tan(28^\circ)}_{=0,53} = 22,33$$

$$\approx \underline{\underline{22}} \quad \leftarrow \text{LASKETTIN JOKIN PITUUS}$$

ESIMERKKI KULMALASKUSTA

RATKAISU.



$$\frac{30,7}{42} = \tan(\alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{30,7}{42} \quad || \tan^{-1}()$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\underbrace{\frac{30,7}{42}}_{=0,73}\right)$$

$$\alpha \approx \underline{\underline{36,17^\circ}}$$

KÄÄNTÖFUNKTIO

$$x^2 = 5 \quad || \sqrt{\quad}$$

$$x = \sqrt{x^2} = \sqrt{5}$$

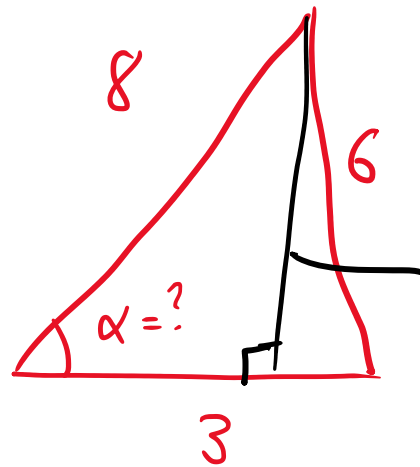
$$2^x = 8 \quad || \log_2()$$

$$x = \log_2(2^x) = \log_2(8) = 3$$

↑
LASKEIN

MUUT KOLMIOT
KUIN SUORAKULMAINEN
KOLMIO

ESIM.



$$3^2 + 6^2 \neq 8^2$$

KORKEUS JA NA,
PITUUS $h = ?$

RATKAISU. PYTHAGORAAN LAUSE EI TOTEU,
PÄTEE

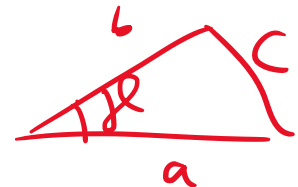
kosinilause (laajennettu Pythagoraan lause)

VASTAPÄÄTÄ:

(EI KOKKESEEN)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma).$$

MENI VÄÄRIN
TUNNILLA



$$6^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos(\alpha)$$

$$36 = 73 - 48 \cos(\alpha)$$

$$36 - 73 = -48 \cos(\alpha)$$

$$-37 = -48 \cos(\alpha) \quad || : (-48)$$

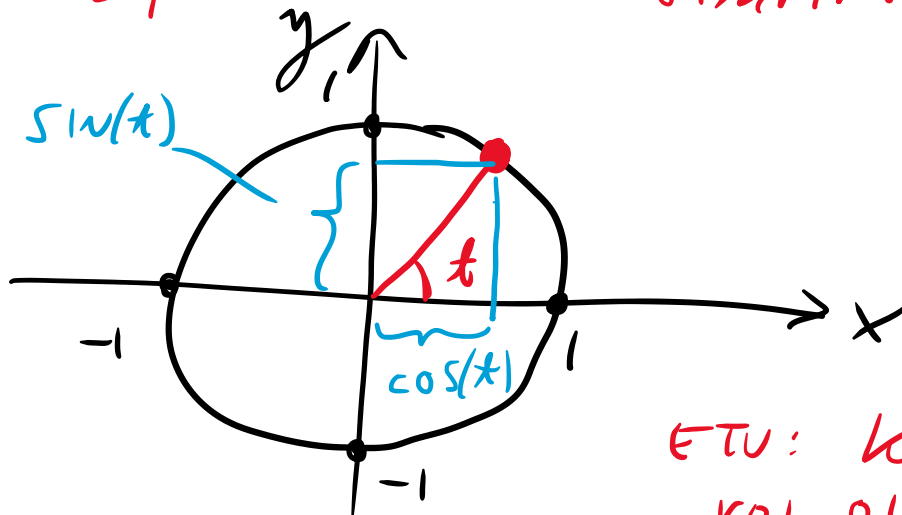
$$\cos(\alpha) = \frac{37}{48} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{37}{48}\right) \approx 39,574^\circ$$

$$\frac{h}{8} = \sin(\alpha) \Rightarrow h = 8 \sin(\alpha) = 8 \sin(39,574^\circ) = 5,096$$

VASTAUS: $\begin{cases} \alpha \approx 39,6^\circ \\ h \approx 5,1 \end{cases}$

KULMISTEN PARIA
ASIAA

SIN, COS, TAN YKSIKKÖYMPYRÄSSÄ



ETU: KULMA
VOI OLLA
MITEN SUURI
TAHANSAA

360°

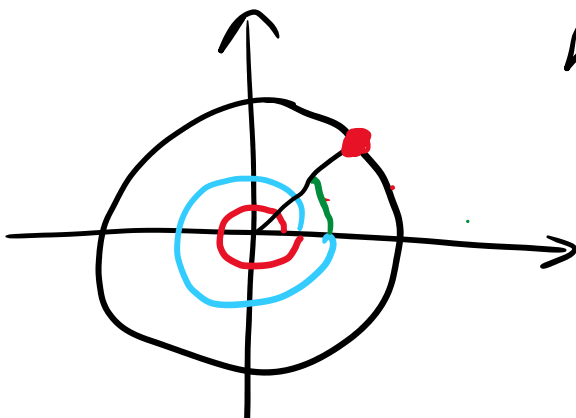


ESIM. $\sin(765^\circ)$

RATKAISU: TÄYSI KULMA

$$765^\circ = 360^\circ + 405^\circ$$

$$= \underbrace{360^\circ + 360^\circ}_{\text{KAKSI TÄYTTÄ KIERROSTA}} + 45^\circ$$



KAKSI
TÄYTTÄ
KIERROSTA

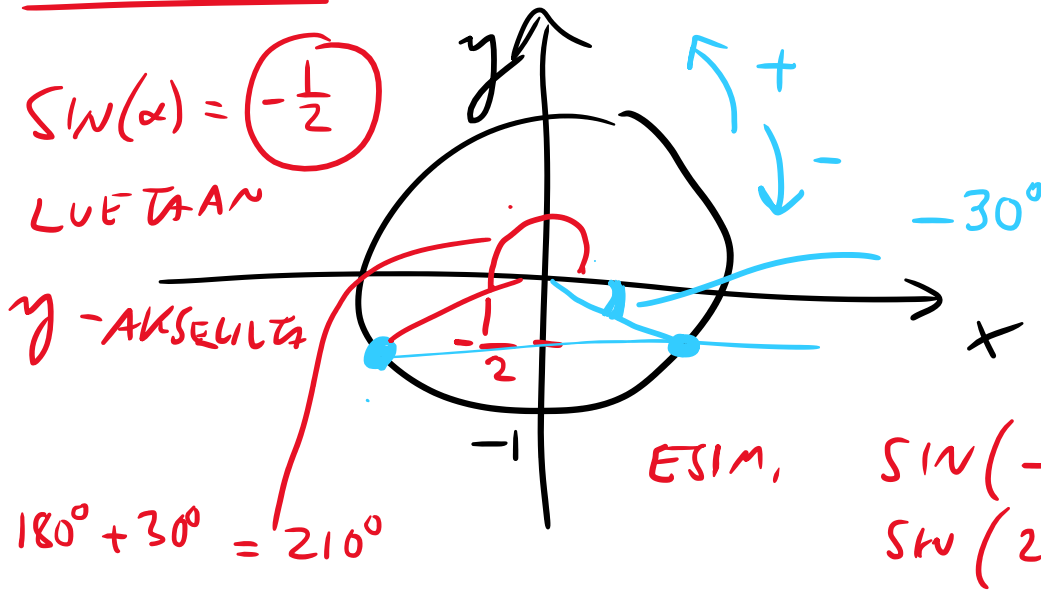
$$\sin(765^\circ) = \sin(45^\circ) \approx \underline{\underline{0,707}}$$

TOINEN ETU:

SIN, COS JA TAN
VOIVA T SAADA
MYÖS NEGATIIVISIA
ARVOJA

ESIM. $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$, $\alpha = ?$

RATKAISU. LASKIN $\alpha = \sin^{-1}(-\frac{1}{2}) = -30^\circ$



$\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$

KAIKKI RATKAISUT

KOKONAISLUKU

$\alpha = -30^\circ + 360^\circ \cdot n$

$\alpha = 210^\circ + 360^\circ \cdot n$

Trigonometrian kaavoja

tiistai 20. helmikuuta 2024 18.00

MATEMATIIKKA

Suorakulmaisen kolmion trigonometria

1. $a^2 + b^2 = c^2$ (Pythagoraan lause)

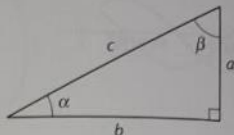
2. $A = \frac{1}{2}ab$

3. $\beta = 90^\circ - \alpha$

4. $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

5. $\cos \alpha = \frac{b}{c}$

6. $\tan \alpha = \frac{a}{b}$



Peruskaavat

7. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

8. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Merkkikaaviot

sin	+	+	cos	-	+	tan	-	+
	-	-		-	+		+	-

Trigonometristen funktioiden väliset yhteydet

Etumerkkivaihtoehtoista valitaan edellä olevan merkkikaavion mukainen kyseiseen neljännekkseen kuuluva etumerkki.

9. $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$

10. $\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$

11. $\tan x = \pm \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$

Palautuskaavat

12. $\sin(-x) = -\sin x$

13. $\cos(-x) = \cos x$

14. $\tan(-x) = -\tan x$

15. $\sin x = -\sin(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(\pi - x) = \sin(x + n2\pi)$

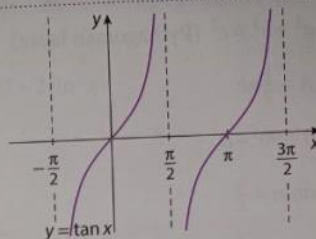
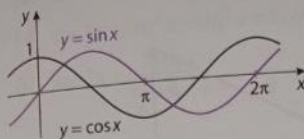
16. $\cos x = \cos(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos(\pi - x) = \cos(x + n2\pi)$

17. $\tan x = -\tan(-x) = -\tan(\pi - x) = \tan(x + n\pi)$

HYVIÄ!

EI TARVITA
TÄLLÄ
KURSSILLA

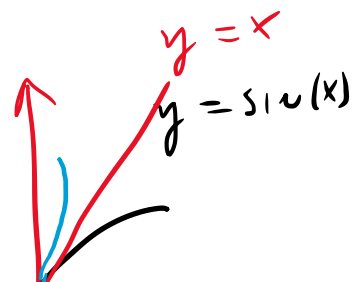
Kuvaajat



Arkusfunktiot

Määritelmät

$f(x) = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \arcsin x$



Arkusfunktiot

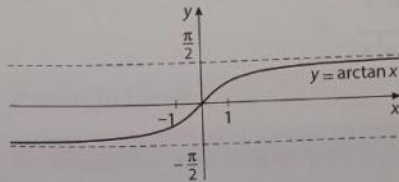
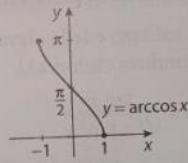
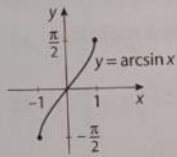
Määritelmät

$$f(x) = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \arcsin x$$

$$f(x) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \arccos x$$

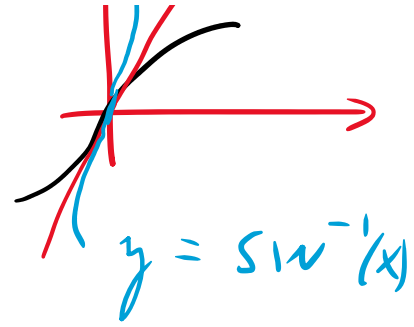
$$f(x) = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \arctan x$$

Kuvaajat



Ominaisuuksia

Funktio	Määrittelyjoukko	Arvojoukko
arcsin	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
arctan	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

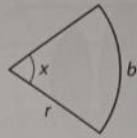


TRIGONOMETRIA

Absoluuttinen kulmayksikkö radiaani

Määritelmä

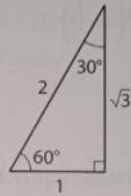
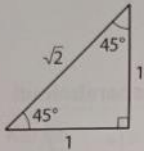
$$x = \frac{b}{r}$$



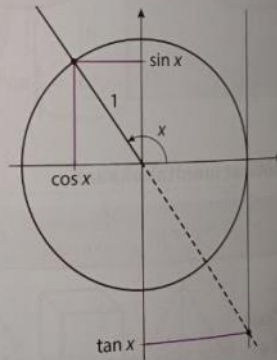
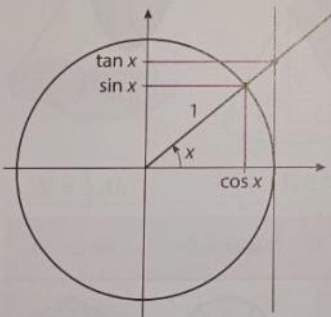
Yhteys

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

Muistikolmiot



Trigonometriset funktiot

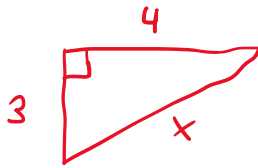


Ominaisuuksia

Funktio	Määrittelyjoukko	Arvojoukko	Perusjakso	Symmetria
sin	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π	pariton
cos	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π	parillinen
tan	$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$	$\mathbb{R}$	π	pariton

LIKIARVO KAAVA HY POTENUUSALLE

ESIM.



VERTA,
PYTHAGORAS

$$x = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$x = 0,96 \cdot \text{PIDEMPİ} + 0,4 \cdot \text{LYHYEMPİ} \\ = 0,96 \cdot 4 + 0,4 \cdot 3 \\ = 4,96$$

MELKEIN SAMAT

$$0,94 \cdot 4 + 0,4 \cdot 3$$

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT

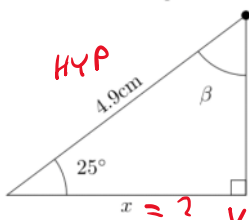
Input

$$0,94 \times 4 + 0,4 \times 3$$

Result

$$4,96$$

6. Laske kateetin x pituus. Ratkaisu ~~5.46~~ 4.44 cm



$x = ?$, VIERFINE

SUORAKULMAISESSA
KOLMIOSSA
PISIN SIVU
SIIS
 $x < 4,9$

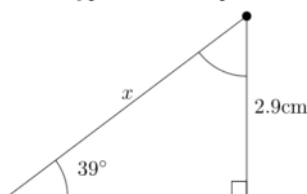
RATKAISU-

$$\frac{x}{4,9} = \frac{\text{VIER}}{\text{HYP}} = \cos(25^\circ) \quad || \cdot 4,9$$

$$x = 4,9 \cos(25^\circ) = \underline{\underline{4,44}}$$

↑
LASKIN

7. Laske hypotenuusan x pituus. Ratkaisu 4.6 cm



RATKAISU-

① KIRJOITETAAN
JOKIN SUHDE

ESIM. $\frac{2,9}{x} =$

② PÄÄTELLÄÄN
MIKÄ FUNKTIO

SIN/COS/TAN

TÄNNE TULEE

$$\frac{2,9}{x} = \frac{\text{VAST}}{\text{HYP}} = \sin(39^\circ)$$

SIN/COS/TAN -
TÄINNE TULEE

$$\frac{2.9}{x} = \frac{\text{VAST}}{\text{HYP}} = \sin(39^\circ)$$

KERROTAAN RISTILIN

$$\hookrightarrow \frac{2.9}{x} \times \frac{\sin(39^\circ)}{1}$$

$$\Rightarrow x \cdot \sin(39^\circ) = 2.9 \cdot 1 \quad || : \sin(39^\circ)$$

$$x = \frac{2.9}{\sin(39^\circ)} \approx \underline{\underline{4.608}}$$

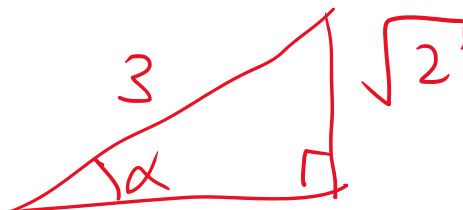
KOKOEN PISTEYTYS

- JOKA TEHTÄVÄSTÄ MAX = 4 PISTETTÄ
- LASKINRATKAISU $\Rightarrow$ 1 PISTE
- MIELEKÄS KUVA $\Rightarrow$ 1 PISTE
- OSAA LASKEA KÄSIN $\Rightarrow$ TÄYDET PISTEET

ESIM.

7. Erään suorakulmaisen kolmion terävät kulmat ovat α ja β . Määritä $\cos(\alpha)$ ja $\cos(\beta)$, kun tiedetään, että $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{\text{VASTAINEN}}{\text{HYP}}$

KOLMIO
ESIMERKIKSI
TÄMÄ



$\Rightarrow$ (1 P)

3. Ratkaise toisen asteen yhtälö

$$2x^2 - 2x - 4 = 0.$$

SAIN LASKIMELLA

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

1 PISTE

4. Ratkaise yhtälöparista

$$\begin{cases} 6x + 5y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

tuntemattomat x ja y .

VERTA A

