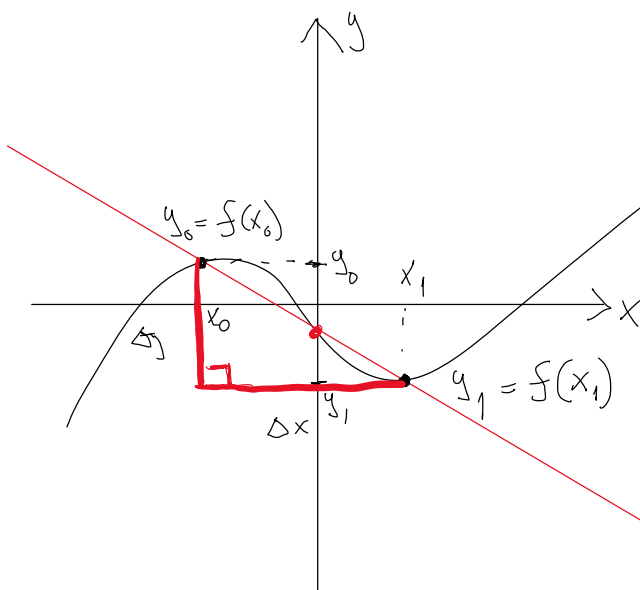
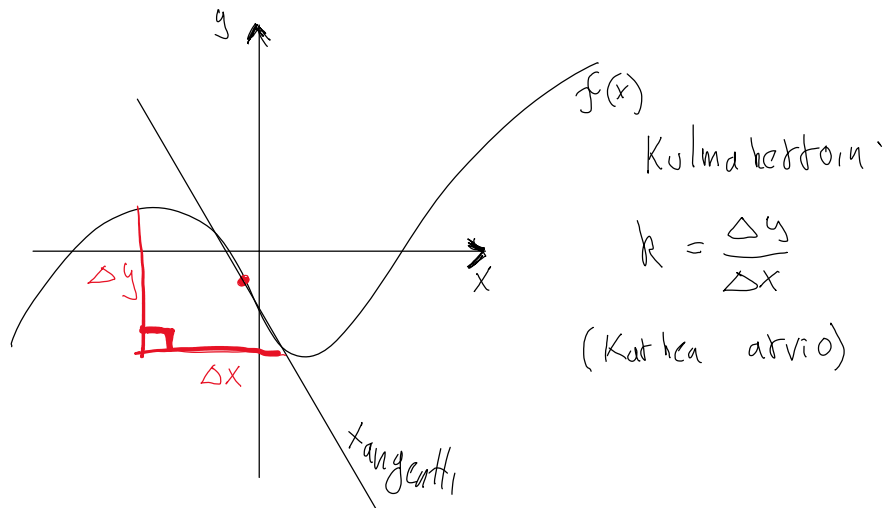


Differentiaali- ja integraalilaskennan kertaus

tiistai 29. elokuuta 2023 16.20

Derivaatalla tarkoitetaan funktion muutosnopeutta.

Derivaatan arvo pisteessä x on tangentin kulmakerroin



$$\Rightarrow k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Kun $x_1 \rightarrow x_0$

$$k = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Usein muodossa

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Käytännössä derivaatat lasketaan jo ammoisina aikoina johdettuja kaavoja käyttäen

Merkintöjä

Sama asia, funktion $f(x)$ derivaatta

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} f(x) \\ f'(x) \\ D(f(x)) \end{cases}$$

Isäksi aika derivaatta merkitään usein pisteellä $\dot{x}$

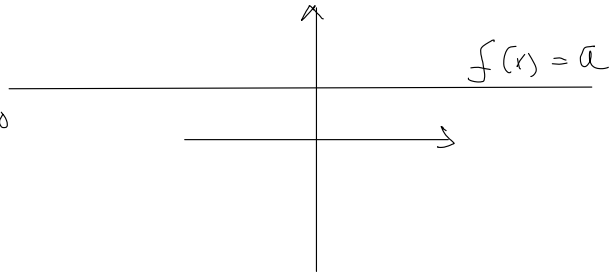
Derivoimissääntöjä

tiistai 29. elokuuta 2023 19.50

Vakiofunktion derivaatta

$$f(x) = a, \quad a = \text{vakio}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(a) = 0$$



Potenssifunktion derivaatta

$$f(x) = x^a$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^a) = a x^{a-1}$$

ESim

$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = \underline{\underline{5x^4}}$$

Potenssifunktion kerrottuna vakiolla

$$\frac{d}{dx}(a \cdot f(x)) = a \cdot \frac{d}{dx}(f(x))$$
$$= a f'(x)$$

ESim

$$f(x) = 3 \cdot x^4$$
$$f'(x) = \frac{d}{dx}(3 \cdot x^4)$$
$$= 3 \frac{d}{dx}(x^4)$$
$$= 3 \cdot 4 \cdot x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$$

Funktioiden
summa

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$$
$$= f'(x) + g'(x)$$

ESim

$$\frac{d}{dx}(x^5 + 3x^4) = \frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(3x^4)$$
$$= 5x^4 + 12x^3$$

Funktioiden tulo

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

ESim

$$k(x) = \underbrace{3x^3}_{f(x)} \cdot \underbrace{2x^5}_{g(x)}$$
$$k'(x) = \frac{d}{dx}(3x^3) \cdot 2x^5 + 3x^3 \frac{d}{dx}(2x^5)$$
$$= \underline{\underline{48x^7}}$$

Osamäärän derivaatta

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Trigonometristen funktioiden derivaatat

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x) \\ \frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x) \\ \frac{d}{dx}(\tan(x)) = 1 + \tan^2(x) \end{cases}$$

Eksponenttifunktion
derivaatta

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$

Logaritmifunktion
derivaatta

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

Ketjusääntö

$$\frac{d}{dx} [f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Sisäfunktion
derivaatta

Esim

$$f(x) = (2 + x^2)^5$$

$$f(g(x)) = g(x)^5$$

$$\text{jossa } g(x) = 2 + x^2$$

$$f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= 5 g(x)^4 \cdot 2x$$

$$= 5 (2 + x^2)^4 \cdot 2x$$

$$= 10x (2 + x^2)^4$$

$$\underline{\underline{\quad\quad\quad}}$$

Integroinnin kertaus

tiistai 29. elokuuta 2023 20.27

Integraalifunktio

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Jos

$$F'(x) = f(x)$$

Jos

$$F(x) = \int f(x) dx$$

$$F(x) + C = \int f(x) dx, \text{ jossa } C = \text{vakio}$$

Integraali on derivaatan käänteinen laskutoimitus

Integrointisääntöjä ei ole samalla tavalla kuin derivoimisääntöjä olemassa kaikille funktioille

Integrointisääntöjä

Vakiolla
kertominen

$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$$

Potenssifunktio

$$\int x^n dx = \frac{1}{1+n} x^{1+n} + C \quad \begin{cases} C = \text{vakio} \\ n \neq -1 \end{cases}$$

Funktioden tulo

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Trigonometriset funktiot

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$f(x) = x^n$$
$$F(x) = \frac{1}{1+n} x^{n+1} + C$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

① a) $y' + y = 4y^2 \Rightarrow$ kertaluku 1

c) $y''' + y''y' = 3x^2 \Rightarrow$ kertaluku 3

f) $\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{d^2x} = 3x^4$
 $y' + y'' = 3x^4 \Rightarrow$ kertaluku 2

② a) osoita, että $y = \frac{x^3}{3}$ tathaisee $y' = x^2$
 Lasketaan derivaatta $y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} \right) = \frac{1}{3} \frac{d}{dx} (x^3) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2$
 $= x^2$ $\square$ M O T

e) osoita, että $y = e^{\frac{x^2}{2}}$ tathaisee $y' = xy$
 Lasketaan derivaatta $y' = \frac{d}{dx} \left(e^{\frac{x^2}{2}} \right) = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{2} \right)$
 $= e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x$
 $= y \cdot x = xy$ $\square$ M O T

Harjoitus 1

tiistai 5. syyskuuta 2023 19.00

1) Määritä keсталuku:

a) $y' + y = 4y^2 \Rightarrow 1$ keсталuku

b) $(y')^2 = y' + 2y \Rightarrow 1$ keсталuku

c) $y''' + y'' y' = 3x^2 \Rightarrow 3$ keсталuku

d) $y' = y'' + 3t^2 \Rightarrow 2$ keсталuku

e) $\frac{dy}{dt} = t$ $y(t) = \frac{dy}{dt} = y' \Rightarrow 1$ keсталuku

f) $\frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 3x^4$
 $y' + y'' = 3x^4 \Rightarrow 2$ keсталuku

g) $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 8 \frac{dy}{dt} + 3y = 4t$
 $(y')^2 + 8y' + 3y = 4t \Rightarrow 1$ keсталuku

2)

a) osoita, että $y = \frac{x^3}{3}$ ratkaisee yhtälön $y' = x^2$

Lasketaan $y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{d}{dx}(x^3) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 = x^2$
 $y' = x^2$ $\square$

b) $y = 2e^{-x} + x - 1 \Rightarrow y' = \frac{d}{dx}(2e^{-x} + x - 1)$
 $= 2e^{-x} \cdot (-1) + 1$
 $= -2e^{-x} + 1$
 $x - y = x - (2e^{-x} + x - 1)$
 $= -2e^{-x} + 1$
 $y' = x - y$, kun $y = 2e^{-x} + x - 1$ $\square$

c) $y = e^{3x} - \frac{e^x}{2}$
 $\Rightarrow y' = e^{3x} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot e^x$
 $= 3e^{3x} - \frac{1}{2}e^x$
 $3y + e^x = 3(e^{3x} - \frac{1}{2}e^x) + e^x$
 $= 3e^{3x} - \frac{3}{2}e^x + e^x$
 $= 3e^{3x} - \frac{1}{2}e^x$
 $y' = 3y + e^x$, kun $y = e^{3x} - \frac{1}{2}e^x$ $\square$

$$y' = 3y + e^x, \text{ kun } y = e^{3x} - \frac{1}{2}e^x \quad \square$$

d)

$$y = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$\Rightarrow y' = -1 \cdot (1-x)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y^2 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}$$



$$y' = y^2 \text{ kun } y = \frac{1}{1-x} \quad \square$$

e)

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Rightarrow y' = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot x$$



$$x \cdot y = y \cdot x = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot x$$

$$y' = xy \text{ kun } y = e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \square$$

f)

$$y = 4 + \ln x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$x y' = x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$x y' = 1 \quad \square$$

g)

$$y = 3 - x + x \ln x$$

$$\Rightarrow y' = -1 + 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = \ln x$$

$$y = 3 - x + x \ln x \quad \text{tathatsee}$$

$$y' = \ln x \quad \square$$

h)

$$y = e^x + \frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{2}$$

$$\Rightarrow y' = e^x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$



$$y' = \cos x + y$$

$$\cos x + y$$

$$= \cos x + e^x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$$

$$= e^x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$

$$\text{kun } y = e^x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \quad \square$$

①

$$y = \pi \cdot e^{-\cos x}$$

$$y' = \underbrace{\pi \cdot e^{-\cos x}}_y \cdot \sin x = y \sin x \quad \square$$

③

$$y' = 4x^2 \quad \text{yleinen ratkaisu} \quad y = \frac{4}{3} x^3 + C, \quad C = \text{vakio}$$

Etsi yksittäisratkaisu, joka kulkee pisteen $(-3, -30)$

haukka

Toisin sanoen, kun $x = -3$, $y = -30$

sijoitetaan

$$\Rightarrow -30 = \frac{4}{3} \cdot (-3) + C$$

$$-30 = \frac{4}{3} \cdot (-27) + C$$

$$-30 = -36 + C$$

$$C = 36 - 30$$

$$C = 6$$

$\Rightarrow$

Huom! yksittäisratkaisu on

$$\underline{\underline{y = \frac{4}{3} x^3 + 6}}$$

Integroituvaa yhtälö

Muotoa

$$y' = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \quad | \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int dy = \int f(x) dx$$

$$y = \int f(x) dx$$

Esim

$$y' = 4x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3$$

$$\int dy = \int 4x^3 dx$$

$$y = x^4 + C \quad \text{yleinen ratkaisu}$$

yksittäis ratkaisu (C on tunnettu)

Esim. Ehto kun $x=1, y=3$

$$3 = 1^4 + C$$

$$C = 2$$

$$\Rightarrow y = x^4 + 2$$

Esim

$$y'' = x^3 + x \quad (2. \text{ kertaluku})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = x^3 + x$$

$$\Rightarrow y = \iint x^3 + x dx dx$$

$$= \int \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 + C_1 dx$$

$$= \frac{1}{20} x^5 + \frac{1}{6} x^3 + C_1 x + C_2$$

$$y' = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 + C_1$$

yleinen ratkaisu

yksittäis ratkaisu

$$y(1) = 3$$

$$y'(0) = 4$$

$\Rightarrow$

$$y'(0) = C_1 = 4$$

$$y(1) = \frac{1}{20} + \frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 3$$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{73}{60}$$

$$y = \frac{1}{20} x^5 + \frac{1}{6} x^3 + 4x - \frac{73}{60}$$

Separoitua yhtälö

Voidaan esittää muodossa

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad \text{tai}$$

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(y)}$$

Integroituaalle yhtälölle $g(y) = 1$

$$\Rightarrow y' = f(x)$$

Ratkaisu: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(x) \quad | :g(y) \quad | \cdot dx$

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

Integroidaan

$\Rightarrow$ Ratkaisu y :lle

Esim

(5a)

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y \quad | \cdot dx \quad | :y$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 1 \cdot dx$$

$$\ln y = x + C$$

$$e^{\ln y} = e^{x+C}$$

$$\underline{y = e^{x+C} = e^x e^C = C_2 e^x}$$

(5b)

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln y = \ln x + C_1$$

$$e^{\ln y} = e^{\ln x + C_1} = e^{\ln x} \cdot \underbrace{e^{C_1}}_{=C_2}$$

$$\underline{y = C_2 x}$$

(5c)

$$y' = \ln x + \tan x$$

Integroitua

$$y = \int \ln x + \tan x \, dx$$

$$\underline{y = -x + x \ln x - \ln(\cos x) + C}$$

Harjoitus 2

tiistai 12. syyskuuta 2023 19.01

$$\textcircled{a} \quad y' = 3x + e^x \Leftrightarrow y = \int 3x + e^x dx$$

$$y = \frac{3}{2}x^2 + e^x + C$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3x + e^x \quad | \cdot dx$$

$$\int dy = \int (3x + e^x) dx$$

$$y = \int 3x + e^x dx$$

$$\textcircled{b} \quad y' = \ln x + \tan x \Leftrightarrow y = \int \ln x + \tan x dx$$

$$y = -x + x \ln(x) - \ln(\cos x) + C$$

$$\frac{d}{dx}(e^{\cos x})$$

$$= e^{\cos x} \cdot (-\sin x)$$

$$\textcircled{c} \quad y' = \sin x e^{\cos x} \Leftrightarrow y = \int \sin x e^{\cos x} dx$$

$$= -e^{\cos x} + C$$

$$\textcircled{d} \quad y' = 4^x \Leftrightarrow y = \int 4^x dx$$

$$y = \frac{4^x}{\ln 4} + C$$

$$\textcircled{e} \quad y' = 2t \sqrt{t^2 + 16} \Leftrightarrow y = \int 2t \sqrt{t^2 + 16} dt$$

$$= \int 2t (t^2 + 16)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{2}{3} (t^2 + 16)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{2}{3} (t^2 + 16)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (t^2 + 16)^{\frac{1}{2}} \cdot 2t$$

$$= 2t \sqrt{t^2 + 16}$$

$$\textcircled{f} \quad y' = y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y \quad | \cdot dx | : y$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int dx$$

$$\ln y + C_1 = x + C_2$$

$$\ln y = x + C_3 \quad | e$$

$$e^{\ln y} = e^{x+C_3}$$

$$y = e^{x+C_3} = e^x \cdot e^{C_3} = \underline{C \cdot e^x}$$

$$C_3 = C_2 - C_1$$

$$\textcircled{g} \quad y' = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad | \cdot dx | : y$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad y' &= \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \quad \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \\
 \Rightarrow \frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \\
 \Rightarrow \ln y &= \ln x + C_1 \Leftrightarrow e^{\ln y} = e^{\ln x + C_1} = e^{\ln x} \cdot e^{C_1} \quad \leftarrow C \\
 &\Leftrightarrow \underline{y = C \cdot x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad (a) \quad \frac{dy}{dt} &= 2t \quad \int dt \\
 \Rightarrow \int dy &= \int 2t \, dt \\
 \Rightarrow y &= t^2 + C \\
 \text{Ny} + y(0) &= 1 \Rightarrow 1 = 0^2 + C \\
 &\Rightarrow C = 1 \\
 \Rightarrow \underline{y = t^2 + 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \frac{dy}{dt} &= -t \Leftrightarrow \int dy = \int -t \, dt \\
 \Rightarrow y &= -\frac{1}{2}t^2 + C \\
 \text{Ny} + y(0) &= 1 \Leftrightarrow 1 = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + C \\
 &\Rightarrow C = 1 \\
 \Rightarrow \underline{y = -\frac{1}{2}t^2 + 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad \frac{dy}{dt} &= 2y \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int 2 \, dt \\
 \Rightarrow \ln y &= 2t + C_1 \Leftrightarrow e^{\ln y} = e^{2t + C_1} \\
 \Rightarrow y &= e^{2t + C_1} = C \cdot e^{2t} \\
 \text{Ny} + y(0) &= 1 \Leftrightarrow 1 = C \cdot e^0 \\
 \Rightarrow C &= 1 \\
 \Rightarrow \underline{y = e^{2t}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \quad \frac{dy}{dt} &= -y \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -1 \, dt \\
 \Rightarrow \ln y &= -t + C_1 \\
 \Rightarrow y &= e^{-t + C_1} = C e^{-t} \\
 y(0) &= 1 \Leftrightarrow 1 = C \cdot e^{-0} \\
 \Rightarrow C &= 1 \\
 \Rightarrow \underline{y = e^{-t}}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{e} \quad \frac{dy}{dt} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \int dy = \int 2 dt$$

$$\Rightarrow y = 2t + C$$

$$\text{Nyht} \quad y(0) = 1 \Rightarrow 1 = 2 \cdot 0 + C$$

$$C = 1$$

$$\Rightarrow \underline{y = 2t}$$

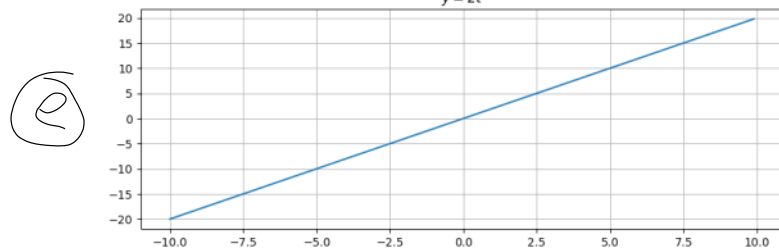
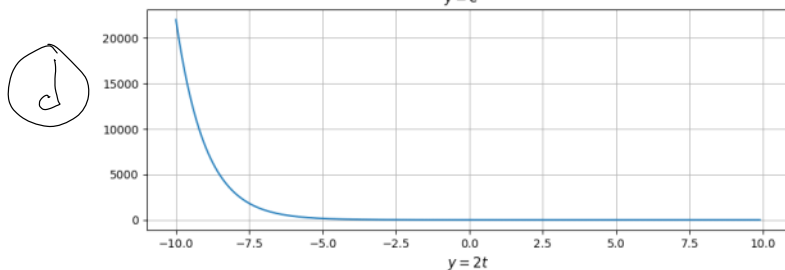
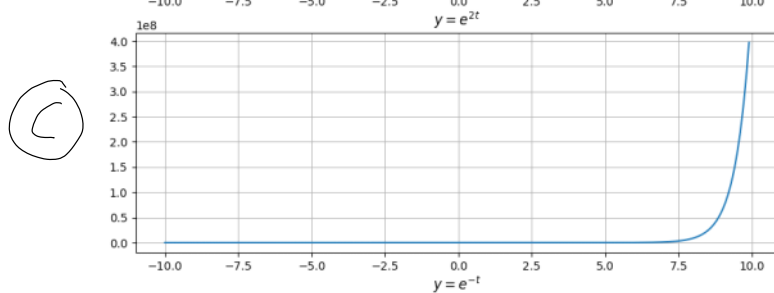
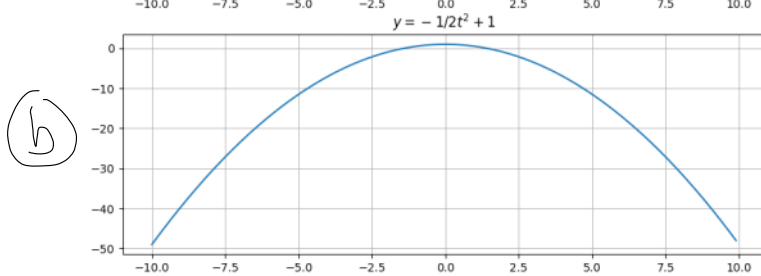
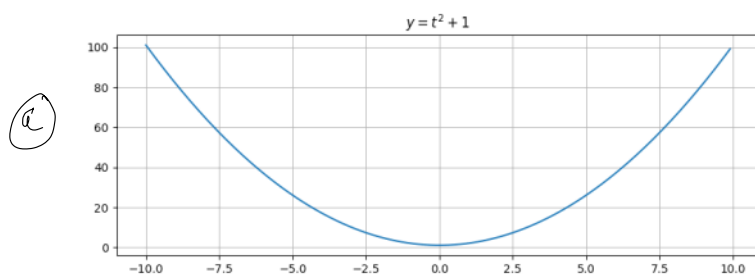
$$\textcircled{a} \quad y = t^2 + 1$$

$$\textcircled{b} \quad y = -\frac{1}{2}t^2 + 1$$

$$\textcircled{c} \quad y = e^{2t}$$

$$\textcircled{d} \quad y = e^{-t}$$

$$\textcircled{e} \quad y = 2t$$



Muoto:

$$y' = y \cdot f(x) + g(x)$$

Differentiaaliyhtälö on lineaarinen, jos se voidaan kirjoittaa tällä muodolla.

Yhtälö on myös homogeeninen jos $g(x) = 0$

 $\Rightarrow$

$$y' = y f(x)$$

joka on separoituva!

Yhtälö on vakioheterogeeninen jos $f(x)$

 $\Rightarrow$

$$y' = C y + g(x)$$

Yleinen ratkaisu

$$y(x) = e^{\pm F(x)} \left(\int e^{-F(x)} g(x) dx + C \right)$$

missä

$$F(x) = \int f(x) dx$$

⑨
a

Homogeeninen yhtälö.

$$y' + 7y = 0$$

$$\Leftrightarrow y' = -7y$$

jossa

$$\begin{cases} f(x) = -7 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Ratkaisusta kaavalla. $F(x) = \int f(x) dx = \int -7 dx = -7x + C_1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(x) &= e^{F(x)} \left(\int e^{-F(x)} g(x) dx + C_2 \right) \\ &= e^{-7x+C_1} (0 + C_2) = C_2 e^{-7x+C_1} = \underbrace{C_2 \cdot e^{C_1}}_{=C} \cdot e^{-7x} \\ &= \underline{C e^{-7x}} \end{aligned}$$

Ratkaisusta separoitamalla: $y' = -7y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -7y \quad | \cdot dx \quad | : y$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -7 dx$$

$$\Rightarrow \ln y = -7x + C_1$$

$$y = e^{-7x+C_1} = \underbrace{e^{C_1}}_{=C} \cdot e^{-7x}$$

$$\underline{y = C e^{-7x}}$$

$$\underline{y = C e^{-x^2}}$$

Esimerkki

Ratkaise

$$y' = 2xy + 3x$$

Myt

$$\begin{cases} f(x) = 2x \\ g(x) = 3x \end{cases}$$

Ratkaistaan ensin $F(x)$

$$F(x) = \int f(x) dx = \int 2x dx = x^2 + C_1$$

Ei homogeeninen
Ei vaihtokostamien

Kaavasta
saadaan:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{x^2+C_1} \left(\int e^{-x^2-C_1} \cdot 3x dx + C_2 \right) \\ &= e^{x^2+C_1} \left(e^{-x^2-C_1} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + C_2 \right) \\ &= \underbrace{e^{x^2+C_1} \cdot e^{-x^2-C_1}}_{=1} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + \underbrace{e^{x^2+C_1} \cdot C_2}_{=C_2 e^{C_1} e^{x^2}} \\ &= \underline{\underline{-\frac{3}{2} + C e^{x^2}}} \end{aligned}$$

Lineaarinen differentiaaliyhtälö

Muoto

$$y' = y f(x) + g(x)$$

Erikoistapaukset: 1) Homogeeninen yhtälö: $g(x) = 0$

$$\Rightarrow y' = y \cdot f(x) \text{ joka on myös separoituva!}$$

2) Vakiokestoiminen yhtälö $f(x) = \text{vakio} = c$

$$\Rightarrow y' = c \cdot y + g(x)$$

Lineaarinen voi olla homogeeninen, vakiokestoiminen, molempia, tai ei kumpaakaan

8 a

$$y' + 3y = \sin x$$

$$y' = -3y + \sin x$$

$$y' = f(x)y + g(x) \text{ , jossa}$$

on lineaarinen ja vakiokestoiminen

$$\begin{cases} f(x) = -3 \\ g(x) = \sin x \end{cases}$$

b

$$y' + x^2 y = 0$$

$$y' = -x^2 y$$

$$y' = f(x) \cdot y + g(x) \text{ , jossa}$$

on lineaarinen ja homogeeninen

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

c

$$y' + x y^2 = 0$$

$$y' = -x y^2$$

Ei ole lineaarinen

d

$$\sin(y') + 3y = 3x$$

$$y' = \arcsin(-3y + 3x) \text{ Ei ole lineaarinen}$$

9 a

$$y' + 7y = 0$$

$$\Rightarrow y' = -7y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = -7 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

(y) (a) $y' + 7y = 0 \Rightarrow y' = -7y \Rightarrow \tilde{g}(x) = 0$

Lineaarisen yhtälön
jatkaisuksella

$$y = e^{F(x)} \left(\int e^{-F(x)} g(x) dx + C \right)$$

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Nyt $F(x) = \int -7 dx = -7x + C_1$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-7x+C_1} \cdot \left(\int e^{7x-C_1} \cdot 0 dx + C \right)$$

$$= C \cdot e^{-7x+C_1} = C \cdot e^{C_1} \cdot e^{-7x}$$

$$= C_2 e^{-7x}$$

Voidaan jatkaista
myös separaotilla.

$$y' = -7y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -7y \quad | \cdot dx \quad | : y$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -7 dx$$

$$\ln y = -7x + C_1$$

$$e^{\ln y} = e^{-7x+C_1}$$

$$y = e^{-7x+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{-7x}$$

$$y = C_2 e^{-7x}$$

(b)

$$y' + \cos(x) y = 0$$

$$y' = -\cos(x) y$$

$$f(x) = -\cos(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = 0$$

Kaavalla

$$y(x) = C e^{F(x)}$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \int -\cos(x) dx$$

$$= -\sin(x) + C_1$$

$$\Rightarrow y(x) = C \cdot e^{-\sin x + C_1} = C \cdot e^{C_1} \cdot e^{-\sin x}$$

$$y(x) = C_2 e^{-\sin x}$$

separaotilla:

$$y' = -\cos(x) y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\cos(x) y \quad | \cdot dx \quad | : y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\cos(x) y \quad | \cdot dx \quad | : y$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -\cos(x) dx$$

$$\Rightarrow \ln y = -\sin(x) + C_1$$

$$y = e^{-\sin(x) + C_1} \\ = e^{-\sin(x)} \cdot e^{C_1} \\ = C_2 \cdot e^{-\sin(x)}$$

(C)

$$x y' + 3x^2 y = 0$$

$$y(0) = 2$$

$$x(y' + 3xy) = 0$$

$$x=0 \quad \text{tai} \quad y' + 3xy = 0$$

$$y' = -3xy = f(x) \cdot y + g(x) \quad \text{jossa} \begin{cases} f(x) = -3x \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Kaaralla

$$\begin{cases} y(x) = C \cdot e^{F(x)} \\ F(x) = \int f(x) dx \end{cases} \quad (\text{kun } g(x) = 0)$$

$$F(x) = \int -3x dx = -\frac{3}{2}x^2 + C_1$$

$$\Rightarrow y(x) = C \cdot e^{-\frac{3}{2}x^2 + C_1} = \underbrace{C \cdot e^{C_1}}_{= C_2} \cdot e^{-\frac{3}{2}x^2}$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = C_2 e^{-\frac{3}{2}x^2}}$$

$$\text{Alkuehto} \quad y(0) = 2$$

$$y(0) = C_2 \cdot e^{-\frac{3}{2} \cdot 0} = C_2 = 2$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = 2 \cdot e^{-\frac{3}{2}x^2}}$$

voidaan ratkaista myös separaamalla

$$y' = -3xy$$

:

10

a)

$$y' - 5y = 2$$

$$y' - 5y + 0 = f(x) \cdot y + g(x) \quad \text{jossa} \begin{cases} f(x) = 5 \\ g(x) = 2 \end{cases}$$

$$y' - 5y = 2$$

$$y' = 5y + 2 = f(x) \cdot y + g(x) \text{ j\u00f6ss\u00e4}$$

$$\begin{cases} f(x) = 5 \\ g(x) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(x) = e^{F(x)} \left[\int e^{-F(x)} \cdot g(x) dx + C \right] \\ F(x) = \int f(x) dx \end{cases}$$

$$F(x) = \int 5 dx = 5x + C_1$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{5x+C_1} \left[\int e^{-5x-C_1} \cdot 2 dx + C \right]$$

$$= e^{5x+C_1} \left[e^{-5x-C_1} \cdot \left(-\frac{2}{5} \right) + C \right]$$

$$= -\frac{2}{5} + e^{5x+C_1} \cdot C = \underbrace{C \cdot e^{C_1}}_{=C_2} \cdot e^{5x} - \frac{2}{5}$$

$$\underline{y(x) = C_2 e^{5x} - \frac{2}{5}}$$

⑥

$$y' + 2y = 5e^{-x}$$

$$y(0) = 1$$

$$y' = -2y + 5e^{-x} = f(x) \cdot y + g(x)$$

$$\text{j\u00f6ss\u00e4} \begin{cases} f(x) = -2 \\ g(x) = 5e^{-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int -2 dx = -2x + C_1$$

$$y(x) = e^{-2x+C_1} \left[\int e^{2x-C_1} \cdot 5e^{-x} dx + C \right]$$

$$= e^{-2x+C_1} \left[5 \cdot e^{-C_1} \int e^x dx + C \right]$$

$$= e^{-2x+C_1} \left[5e^{-C_1} (e^x + C_2) + C \right]$$

$$= e^{-2x+C_1} \left[5e^{-C_1} e^x + \underbrace{5e^{-C_1} \cdot C_1 + C}_{=C_3} \right]$$

$$= e^{-2x+C_1} \cdot 5 \cdot e^{-C_1} e^x + e^{-2x+C_1} \cdot C_3$$

$$= 5e^{-x} + \underbrace{C_3 \cdot e^{C_1}}_{=C} e^{-2x}$$

$$\underline{y(x) = 5e^{-x} + C e^{-2x}}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = 5 + C = 1 \Rightarrow C = -4$$

$$u(n) = 1$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = 5 + C = 1 \Rightarrow C = -4$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = 5e^{-x} - 4e^{-2x}} \quad \text{kun} \quad \underline{y(0) = 1}$$

Tarkistetaan, että ratkaisu on oikein

$$y' = -2y + 5e^{-x}$$

Ratkaisusta saadaan:

$$y' = \frac{d}{dx} (5e^{-x} - 4e^{-2x})$$

$$= -5e^{-x} + 8e^{-2x}$$

Torstaalla
oikea puoli

$$-2y + 5e^{-x} = -2(5e^{-x} - 4e^{-2x}) + 5e^{-x}$$

$$= -10e^{-x} + 8e^{-2x} + 5e^{-x}$$

$$= -5e^{-x} + 8e^{-2x}$$

$\Rightarrow$

$$y' = -2y + 5e^{-x}$$

$$\text{kun } y = 5e^{-x} - 4e^{-2x}$$

Eli ratkaisu on oikein $\square$

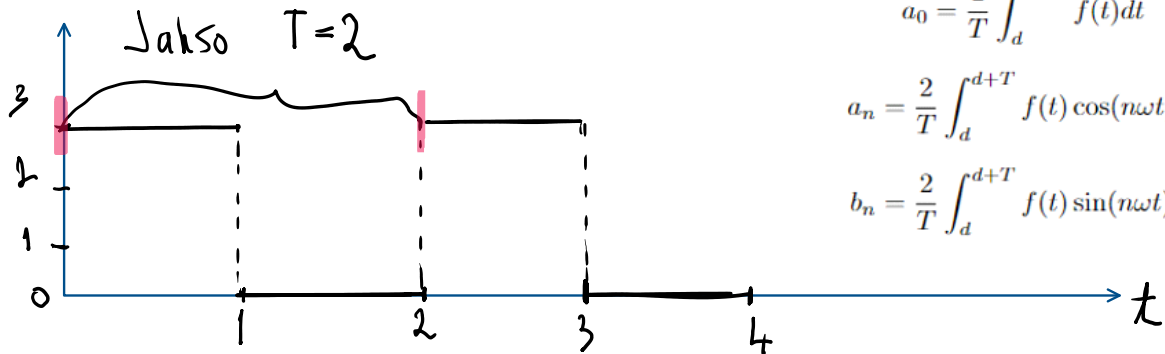
Fourier-sarja

perjantai 29. syyskuuta 2023 9.01

Tarkastellaan kanttiaaltoa $g(t)$, jonka amplitudi on 3 ja jaksonaika $T=2$. Kun siis $0 \leq t \leq 2$ on funktio on määritelty paloittain kuten

$$g(t) = \begin{cases} 3, & \text{jos } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{jos } 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \text{ ja tämän aikavälin ulkopuolella funktio toistaa itseään jaksollisesti.}$$

Laske tämän funktion Fourier-kertoimet a_0, a_n ja b_n



$$a_0 = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) dt$$

$$\text{Nyht} \begin{cases} f(t) = g(t) \\ T = 2 \\ d = 0 \\ d+T = 2 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^1 g(t) dt + \frac{2}{T} \int_1^2 g(t) dt = \frac{1}{1} \int_0^1 3 dt + \frac{1}{1} \int_1^2 0 dt$$

$$= \int_0^1 3 dt = \left[3t \right]_0^1 = 3(1-0)$$

$$\underline{a_0 = 3}$$

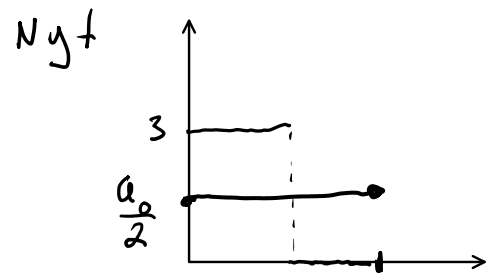
$$a_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$a_n = \int_0^2 g(t) \cdot \cos(n\pi t) dt$$

Jaketaan integraali osiin:

$$a_n = \int_0^1 g(t) \cdot \cos(n\pi t) dt + \int_1^2 g(t) \cdot \cos(n\pi t) dt$$

$$= \int_0^1 3 \cdot \cos(n\pi t) dt + \int_1^2 0 \cdot \cos(n\pi t) dt$$



$$\begin{aligned} T &= 2 \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ f(t) &= g(t) \\ \omega &= \pi \\ d+T &= 2 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

rikkas

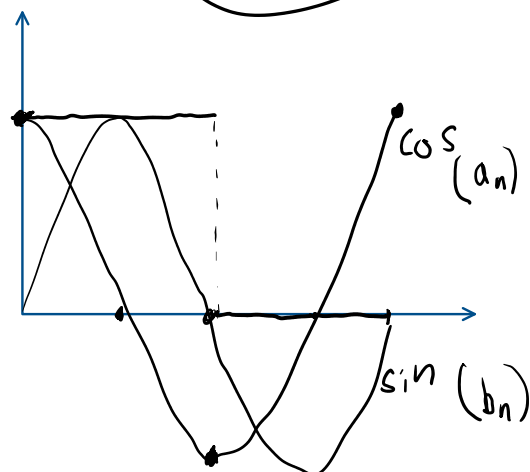
$$= \int_0^1 3 \cdot \cos(n\pi t) dt + \underbrace{\int_1^2 0 \cdot \cos(n\pi t) dt}_{=0}$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{n\pi} \sin(n\pi t)$$

$$= \frac{3}{n\pi} \left[\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(0)}_{=0} \right]$$

$$\underline{a_n = 0}$$

Ekstta



$$b_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$\vdots$$

$$b_n = \int_0^2 g(t) \cdot \sin(n\pi t) dt$$

$$= \int_0^1 3 \cdot \sin(n\pi t) dt + \underbrace{\int_1^2 0 \cdot \sin(n\pi t) dt}_{=0}$$

$$= \int_0^1 -\frac{3}{n\pi} \cos(n\pi t) = -\frac{3}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1]$$

$$= \frac{3}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{n\pi} (1 - (-1)^n)}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n=0 \rightarrow \cos(n\pi) = 1 \\ n=1 \rightarrow \cos(n\pi) = -1 \\ n=2 \rightarrow \cos(n\pi) = 1 \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

12. Mikä on siniaallon $\frac{3}{2} \sin(7t - 1)$

- a) amplitudi $= \frac{3}{2} = A$
 b) kulmataajuus $= \omega = 7$
 c) vaihe $= \phi = -1$
 d) jaksonaika $= T = \frac{2\pi}{7}$

$$y = \frac{3}{2} \sin(7t - 1)$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

ylsersesti

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

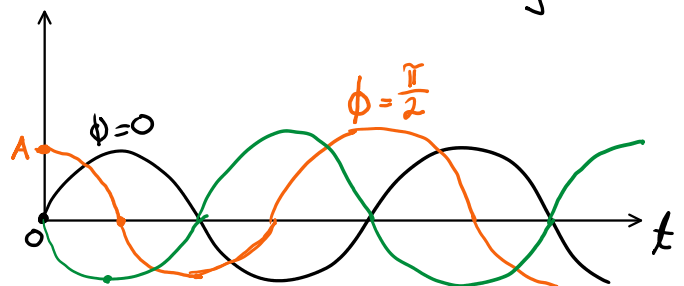
A = Amplitudi, $-A \leq y \leq A$

$$\omega = \text{kulmataajuus} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

 ϕ = vaihekulma

T = Jaksonaika

$$y = A \sin(\omega t + \phi)$$



Kertausta:

Yksikköympytö

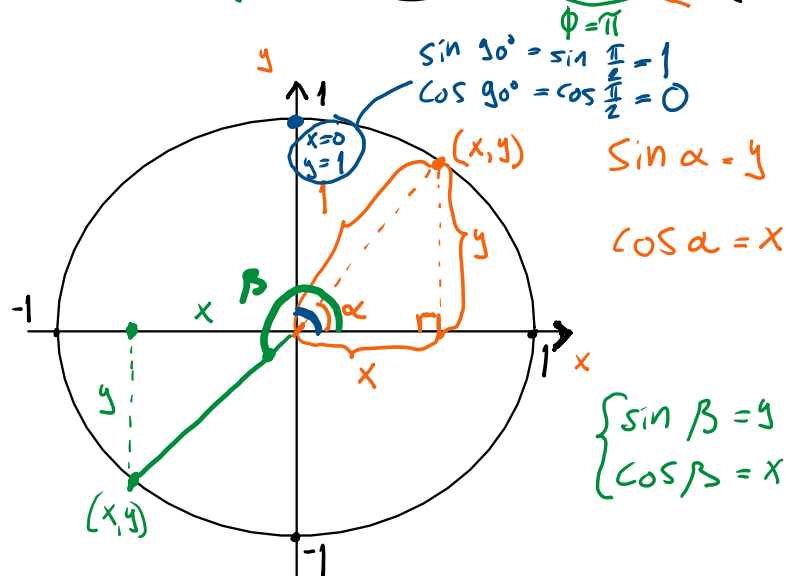
Pythagoraksen lause:

$$\text{Nyt: } x^2 + y^2 = 1^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

13. Ilmaise funktio $5 \sin(2t) + 2 \cos(2t)$ yhden siniaallon avulla, siis muodossa $A \sin(\omega t + \phi)$

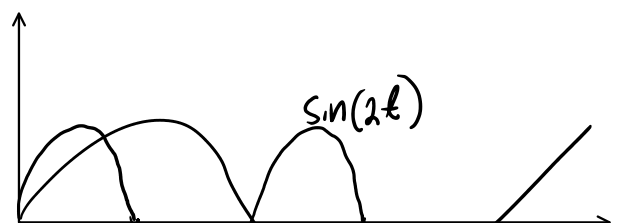
$$f(t) = 5 \sin(2t) + 2 \cos(2t)$$

Tulisi olla muotoa

$$g(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

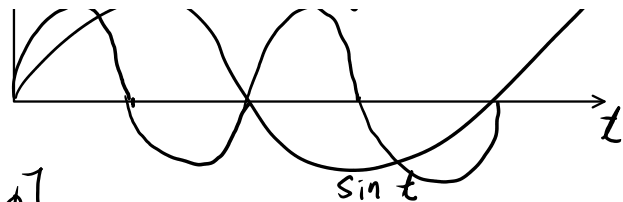
Täytyy olla

$$A \sin(\omega t + \phi)$$



Täyttyä ollen

$$g(t) = A \cdot \sin(2t + \phi)$$



$$\Rightarrow g(t) = A [\sin(2t) \cdot \cos \phi + \cos(2t) \sin \phi]$$

$$g(t) = A \cdot \sin(2t) \cdot \cos \phi + A \cdot \cos(2t) \cdot \sin \phi$$

$$\text{Jos } f(t) = g(t)$$

yleisesti:

$$\sin(a+b)$$

$$= \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \cdot \sin(2t) \cdot \cos \phi = 5 \sin(2t) \\ A \cos(2t) \cdot \sin \phi = 2 \cos(2t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cdot \cos \phi = 5 \\ A \cdot \sin \phi = 2 \end{cases} \quad \text{Jaetaan alempi yhtälö ylemmällä.}$$

$$\Rightarrow \frac{A \cdot \sin \phi}{A \cdot \cos \phi} = \frac{2}{5}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Vajaon merkitä:} \\ A \cdot \sin \phi = 2 \quad | : A \cdot \cos \phi \\ \Rightarrow \frac{A \cdot \sin \phi}{A \cdot \cos \phi} = \frac{2}{A \cdot \cos \phi} \Rightarrow 5 \end{array} \right]$$

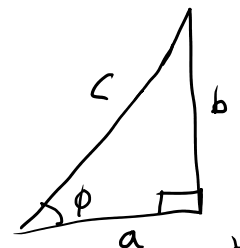
$$\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{2}{5}$$

$$\tan \phi = \frac{2}{5}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\left[\text{vai olla} \arctan\left(\frac{2}{5}\right) \right]$$

$$\text{tai} \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$



$$\begin{cases} \sin \phi = \frac{b}{c} \\ \cos \phi = \frac{a}{c} \\ \tan \phi = \frac{b}{a} \end{cases}$$

$$\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{b}{a} = \tan \phi$$

$$\begin{cases} A \cdot \cos \phi = 5 \\ A \cdot \sin \phi = 2 \end{cases}$$

Korotetaan toiseen:

$$\Rightarrow \begin{cases} A^2 \cdot \cos^2 \phi = 5^2 \\ A^2 \cdot \sin^2 \phi = 2^2 \end{cases}$$

Lasketaan yhteen

$$\Rightarrow A^2 \cos^2 \phi + A^2 \sin^2 \phi = 5^2 + 2^2$$

$$A^2 (\underbrace{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}_{=1}) = 29$$

$$\Rightarrow A^2 = 29$$

$$A = \sqrt{29}$$

$$c(t) = a(t) + b(t) \cdot \sin(2t + \phi)$$

$$f(t) = g(t) = A \cdot \sin(2t + \phi)$$

$$A = \sqrt{2g}$$

$$g(t) = \sqrt{2g} \cdot \sin(2t + \arctan(\frac{2}{5}))$$

16. Määrittele funktion $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } 0 \leq x \leq \pi \\ -1, & \text{jos } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$ Fourier'n sarja.

Jakson pituus

$$T = 2\pi$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{d+T} f(x) dx$$

$$= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Palokkeen integrointi:

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -1 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -x + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x = -\frac{1}{\pi} [0 - (-\pi)] + \frac{1}{\pi} [\pi - 0]$$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{d+T} f(x) \cdot \cos(n\omega x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx$$

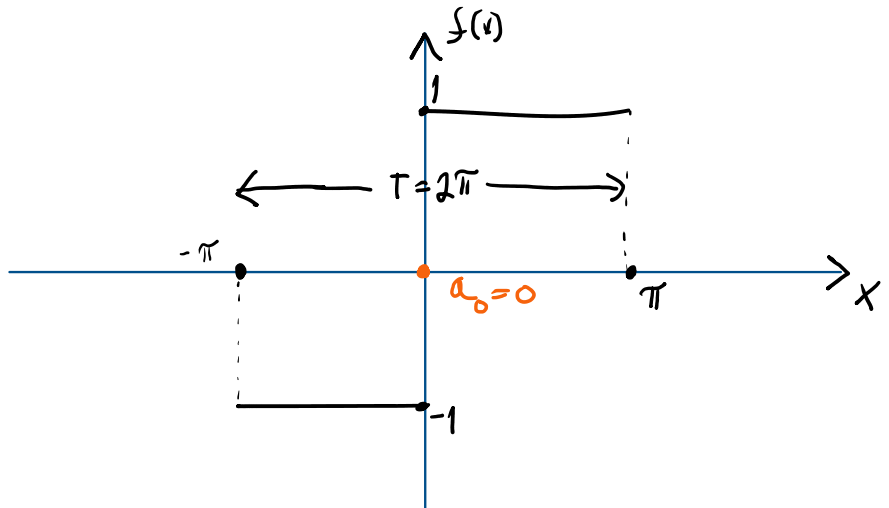
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -1 \cdot \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\sin(nx) \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{\pi \cdot n} [0 - 0] + \frac{1}{\pi \cdot n} [0 - 0]$$

$$a_n = 0$$

$$2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(nx) dx$$



$$\left| \begin{array}{l} T = 2\pi \\ \omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \end{array} \right.$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(n\omega x) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx$$

Integroidaan palokkain

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos(nx) \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -\cos(nx) \cdot \frac{1}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi n} [1 - \cos(-n\pi)] + \frac{1}{\pi n} [-\cos(n\pi) + 1]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi n} [1 - \cos(n\pi)] + \frac{1}{\pi n} [1 - \cos(n\pi)]$$

$$= \frac{2}{\pi n} [1 - \cos(n\pi)] = \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n] = \frac{2}{\pi n} [1 + (-1)^1 \cdot (-1)^n]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n} [1 + (-1)^{n+1}]$$

Yleisesti

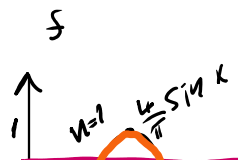
$$\cos(-a) = \cos(a)$$

Fourier-sarja:

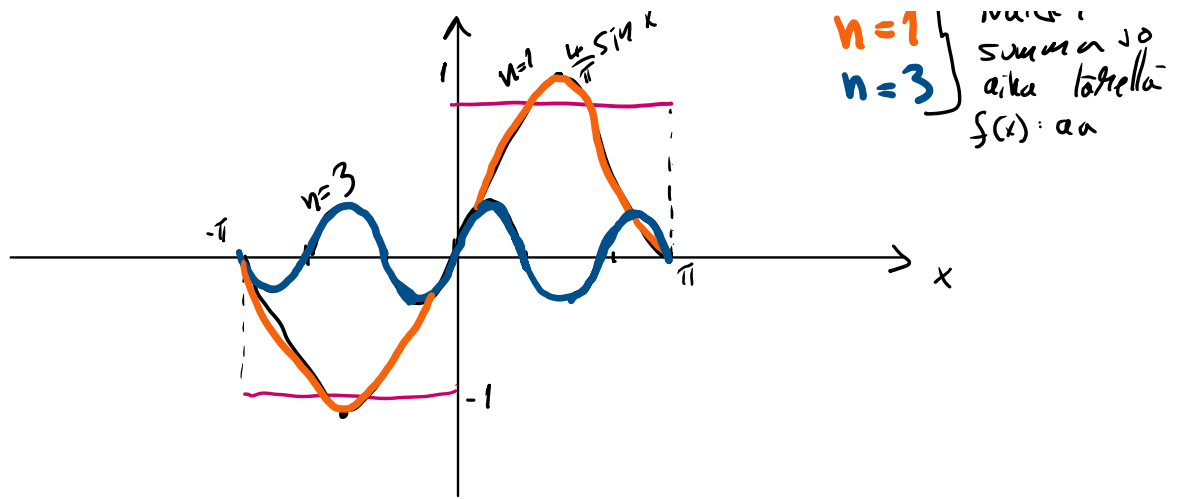
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x)}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 + (-1)^{n+1}) \cdot \sin(nx)$$

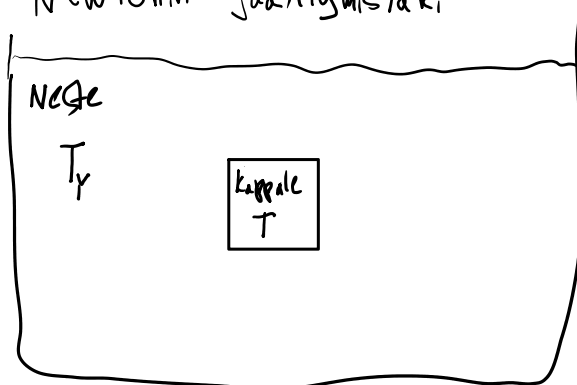
$$f(x) = \underbrace{\frac{4}{\pi} \sin(x)}_{n=1} + \underbrace{0}_{n=2} + \underbrace{\frac{4}{3\pi} \sin(3x)}_{n=3} + \underbrace{0}_{n=4} + \underbrace{\frac{4}{5\pi} \sin(5x)}_{n=5} \dots$$



$n=1$
 $n=3$ } Näiden summan jo aika tällä



Newtonin jäähtymislaki



Alkutilanteessa nesteellä ja kappaleella on eri lämpötila.
 * Oletetaan, että nesteen lämpötila T_y on tasainen ja muuttumaton.
 * Oletetaan, että kappaleen lämpötila on sen jokaisessa pisteessä T

Havainto

Kappaleen lämpötilan ajallinen muutos $\frac{dT}{dt}$ (eli lämpötilan aikaderivaatta) on suoraan verrannollinen kappaleen ja nesteen väliseen lämpötila-eroon:

$$\frac{dT}{dt} \sim T - T_y$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = k(T - T_y) \quad , k = \text{vakio}$$

$\Rightarrow T' = kT - kT_y$
 Lineaarinen ja vakiokerroininen differentiaaliyhtälö.
 Ratkaistaan harjoituksissa.

Esim. kaffila jäähtyminen nopeammin ulkona kuin sisällä

1. Kinematiikassa nopeus on määritelty paikan derivaattana (muutoksena). Yksiuotteisessa tapauksessa, jossa etäisyys on x , kirjoitetaan nopeus siis $v(t) = \frac{dx}{dt}$. Vastaavasti kiihtyvyys on määritelmän mukaan nopeuden derivaatta $a(t) = \frac{dv}{dt}$.

a) Johda nopeuden määritelmästä lähtien kaava sijainnille ajan funktiona olettaen, että nopeus pysyy vakiona.

b) Johda kiihtyvyyden määritelmästä lähtien kaava nopeudelle olettaen, että kiihtyvyys pysyy vakiona.

c) Johda kiihtyvyyden määritelmästä lähtien kaava sijainnille olettaen, että kiihtyvyys pysyy vakiona.

a) $v = \frac{ds}{dt} = \text{vakio} = v \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = v$

$$\Rightarrow \int ds = \int v dt \quad \Rightarrow \quad s(t) = vt + c$$

$$s(t=0) = c = s_0 \quad \text{"lähtöpaikka"}$$

$$\Rightarrow \boxed{s(t) = s_0 + vt}$$

Jos $v = \text{vakio}$

b) $a = \frac{dv}{dt} = \text{vakio} \quad [Nyt \quad v \neq \text{vakio}]$

$$\Rightarrow \int dv = \int a dt \quad \Rightarrow \quad v = at + c$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + at}$$

$$\Rightarrow \int dv = \int a dt \quad \Rightarrow \quad v = at + C$$

$$\Rightarrow v(t=0) = C = v_0, \text{ alkunopeus} \quad \Rightarrow$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$a = \text{vakio}$$

③

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \left[a = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2} \right]$$

$$\Rightarrow v(t) = v_0 + at$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = v_0 + at$$

$$\int ds = \int (v_0 + at) dt$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 + C$$

$$\text{Nyt } s(t=0) = C = s_0, \text{ alkupaikka}$$

$$\Rightarrow s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

2. Pallo (massa 1 kg) heitetään suoraan ylöspäin maanpinnalta.

a) Määrittele yleinen ratkaisu nopeudelle $v(t)$, kun alkunopeus $v(0) = v_0$.

b) Määrittele ratkaisu nopeudelle $v(t)$, kun alkunopeus $v(0) = 25 \text{ m/s}$.

c) Määrittele ratkaisu nopeudelle $v(t)$, kun alkunopeus $v(0) = 25 \text{ m/s}$, mutta heitto tapahtuukin Marsin pinnalla, jossa gravitaatiokiihtyvyys on $g = 3.722 \text{ m/s}^2$

Oletus: Palloon kohdistuu gravitaatio, mahdollisia muita voimia ei huomioida.

Huomio: Pallon tähtäys pysyy maanpinnan yläpuolella

Kiihtyvyyks: $a = \frac{dv}{dt} = g = \text{vakio} (\approx 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g \Rightarrow \int dv = \int g dt$$

$$v = gt + C$$

$$\text{Kun } t=0, v(t=0) = v_0 = C$$

$$\Rightarrow v = v_0 + gt$$

Huom!

$$\begin{array}{ccc} +\uparrow & \uparrow v_0 & \downarrow g \\ \hline & & v_0 > 0 \\ & & g < 0 \end{array}$$

$$\textcircled{a} \quad v(0_s) = v_0$$

$$v = v_0 + gt$$

$$\text{Korkeus: } s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\text{nyt: } s_0 = 0 \\ a = g$$

$$\Rightarrow s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$\text{Entö: } s \geq 0 \Rightarrow v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow v_0 + \frac{1}{2} g t \geq 0 \Rightarrow g t \geq -2v_0$$

$$t \leq \frac{2v_0}{|g|}$$

$$\textcircled{b} \quad v = v_0 + gt$$

$$\mid \text{ kun } t = \frac{2v_0}{|g|}$$

$$(b) \quad V = V_0 + g t$$

$$= 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t$$

$$(c) \quad v = V_0 + g_m t$$

$$= 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 3.722 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t$$

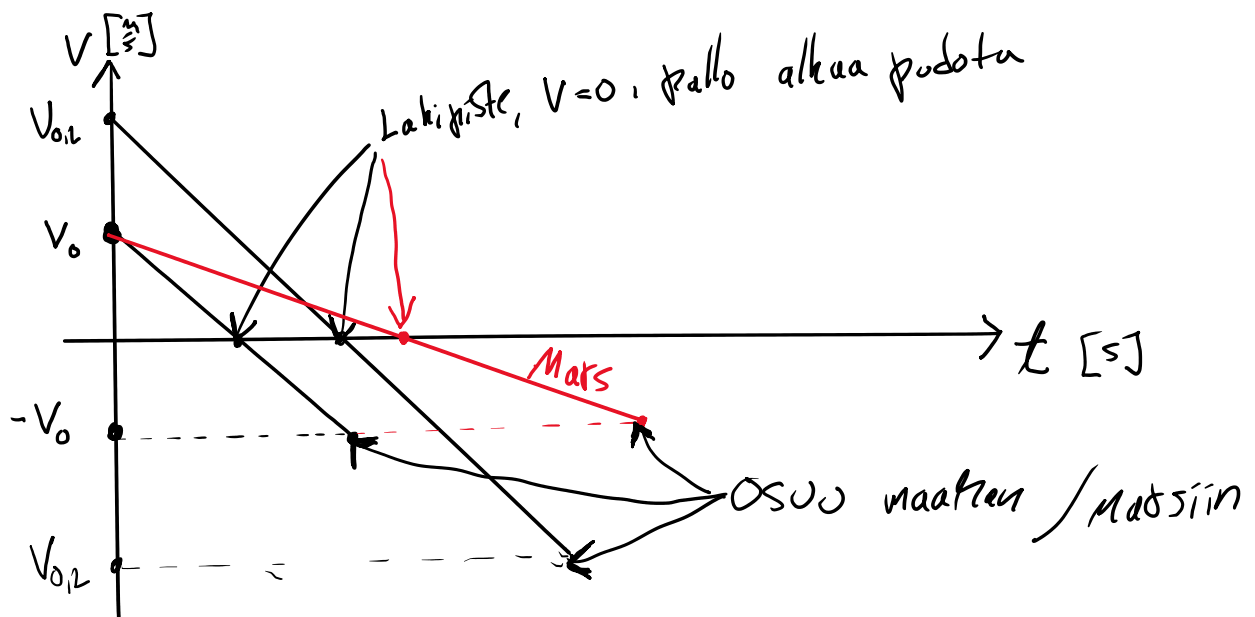
$$\text{Kun } t = \frac{2V_0}{|g|}$$

$$V = V_0 + g \cdot \frac{2V_0}{|g|}$$

$$V = V_0 - 2V_0$$

$$V = -V_0$$

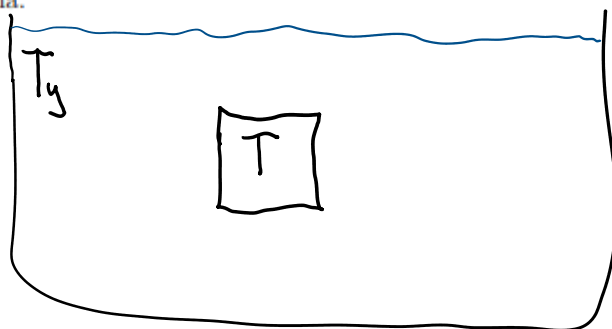
Nopeus, jolla pallo
palea maahan.



3. Newtonin jäähtymislaki on Sir Isaac Newtonin muotoilema laki kappaleen jäähtymisessä vakioämpötilassa. Laki on matemaattinen malli havainnolle, että jäähtyminen sitä nopeampaa, mitä suurempi on kappaleen ja ympäristön välinen lämpötilaero.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_y),$$

jossa T on lämpötila, k (kokeellinen) lämmönjohtavuus (vakio), t on aika ja T_y ympäristön lämpötila (vakio). Jäähtymislaki ei ota huomioon kappaleen epätasaista jäähtymistä tai ympäristön lämpenemistä. Johda tästä kaava kappaleen lämpötilalle ajan funktiona.



T_y on muuttumaton vakio
 k on aineiden ominaisuuksista
riippova vakio

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_y)$$

$$\Rightarrow T' = -kT + kT_y$$

$$[\text{vrt. } y' = -ky + kT_y]$$

$$\Rightarrow T' = -kT + kT_y \quad [\text{vrt. } y' = -ky + kT_y]$$

Lucautnen gHalo $T' = f \cdot T + g$, jossa $\begin{cases} f = -k \\ g = kT_y \end{cases}$

Ratkaisukaava: $T = e^{F(t)} \cdot \left(\int e^{-F(t)} \cdot g \, dt + C_1 \right)$

Jossa $F(t) = \int f \, dt$

$$\Rightarrow F(t) = \int -k \, dt = -kt + C$$

$$\Rightarrow T(t) = e^{-kt+C} \cdot \left(\int e^{kt-C} \cdot kT_y \, dt + C_1 \right)$$

$$= e^{-kt+C} (e^{kt-C} T_y + C_1)$$

$$= T_y + C_1 e^{-kt+C} = T_y + C_1 e^C \cdot e^{-kt}$$

$$= T_y + C_2 \cdot e^{-kt}$$

Alkuehto

$$T(0) = T_y + C_2 = T_0, \quad \text{Kappaleen alkulämpötila.}$$

$$\Rightarrow C_2 = T_0 - T_y$$

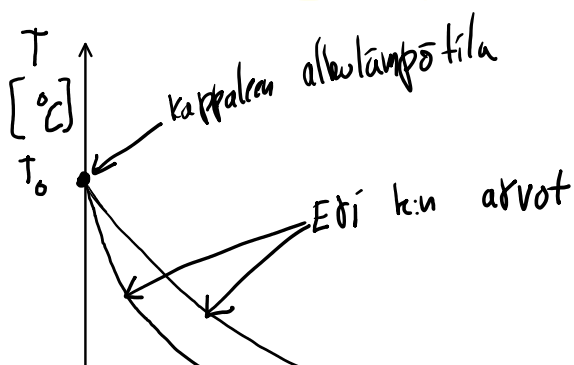
$$\Rightarrow \underline{T(t) = (T_0 - T_y) e^{-kt} + T_y}$$

Kun $t=0 \Rightarrow T(0) = (T_0 - T_y) \cdot 1 + T_y$

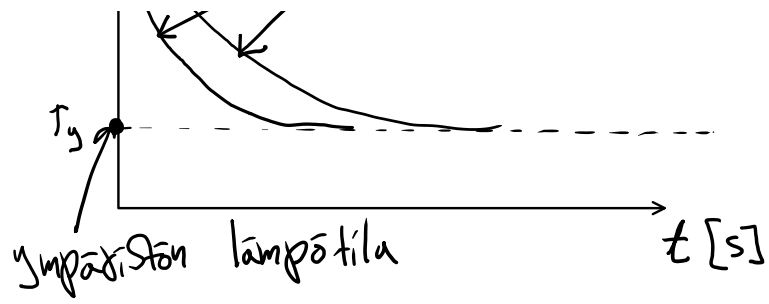
$$\boxed{T(0) = T_0}$$

Kun $t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-kt} \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \boxed{T(\infty) = T_y}$$



$$\boxed{T = (T_0 - T_y) e^{-kt} + T_y}$$



5. Mittalaite havaitsee mitattavan suureen arvon 0.1s välein ja koko mittaussarjan pituus on 20min.

a) Mitkä ovat suurin ja pienin taajuus, jotka tästä aineistosta voidaan havaita?

b) Millaisella suodattimella signaali tulisi suodattaa ennen näytteistystä?

suurin taajuus: "Havaitun jakson sisällä tulee olla vähintään kaksi mittausta"

Mittaus on 0.1s välein $\Rightarrow$ Lyhin havaittu jaksollisuus 0.2s

$\Rightarrow$ suurin taajuus on $f = \frac{1}{0.2s} = \underline{5 \text{ Hz}}$ (Nyquistin taajuus)

Pienin taajuus: Havaitun jakson tulee mahtua mitattuun aikaan

$$\Rightarrow T_{\max} = 20 \text{ min} = 1200 \text{ s}$$

$$\Rightarrow f_{\min} = \frac{1}{T_{\max}} = \frac{1}{1200 \text{ s}} = \underline{833 \mu\text{Hz}} \quad (=0.00083 \text{ Hz})$$

⑥ Nyquistin taajuutta suuremmat taajuuudet tulee suodattaa pois. Eli cut-off taajuus $f_c = 5 \text{ Hz}$
[alipäästösuodatin]