

VEKTORIT JA KOMPLEKSILUVUT

PROJEKTI JAKSO → KOETETAAN PITÄÄ
MATIKKA
KEUVENÄ / VÄHÄN STRESSIÄ

• VEKTOREITA AIEMMIN
KÄYTTÄNYT 50%

• KOMPLEKSILUKUJA
KÄYTTÄNYT AIEMMIN VAIN HARVAT

UUSI ASIA,
RAUHALLISESTI

AJANKOHTA

~~14.00 - 16.00~~
14.15 - 15.45

[LAITETAAN TEORIAA/LUENTOJA
& LASKUHARJOITUKSIA LOMITTAIN]

SKALAARISUURE ESIM, MASSA

$m = 98 \text{ kg}$

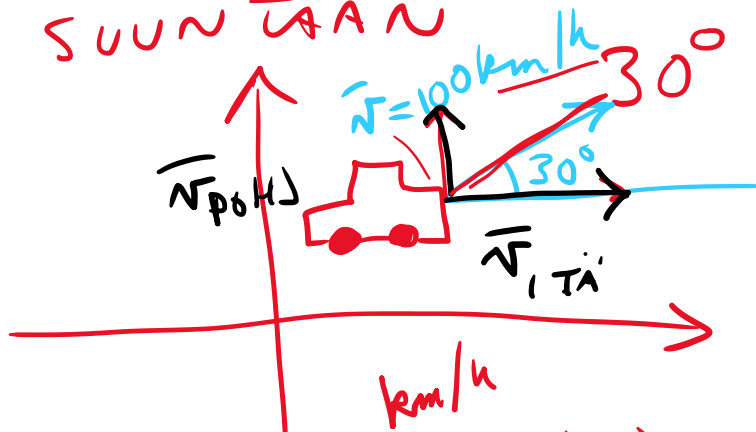
ILMAISTU YHDEN
LUVUN
AVULLA

VEKTORISUURE SUURUUS JA
SUUNTA

ESIM. AUTON NOPEUS 100 km/h

SUUNTAAN 20° IDÄSTÄ POHJOISEEN

SUUNTAAN

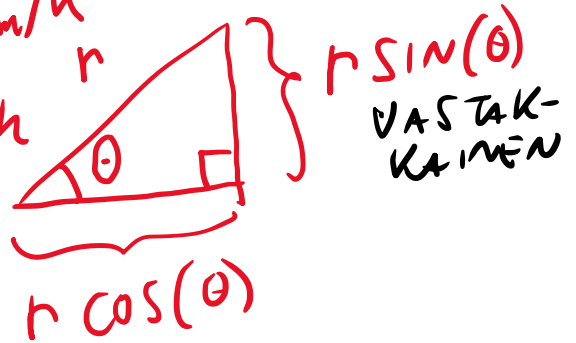


NOPEUS
VOIDAAN
JAKAA

KOMPONENTTEIKSI

$$|\vec{v}_{\text{pohj}}| = 100 \cdot \sin(30^\circ) = 50 \text{ km/h}$$

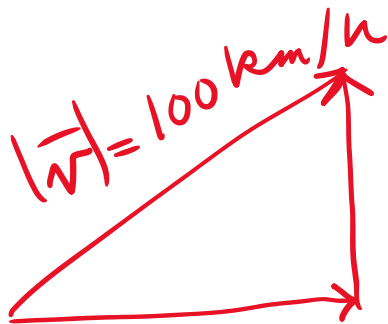
$$|\vec{v}_{\text{ita}}| = 100 \cdot \cos(30^\circ) = 87 \text{ km/h}$$



$$r \sin(\theta)$$

$$r \cos(\theta)$$

$$\sin(0) = 0$$



$$|\vec{v}_{\text{pohj}}| = 50 \text{ km/h}$$

$$|\vec{v}_{\text{ita}}| = 87 \text{ km/h}$$

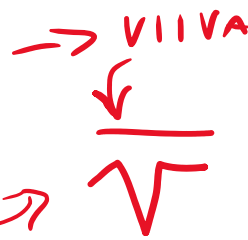


MERKINTÄ SKALARISUURE (PELKKI LUVU)
→ EI VIIVAA

$$m = 98 \text{ km}$$

• VEKTORISUURE

(SUURUUS JA SUUNTA)



NOPEUS VEKTORI



$$\text{• VEKTORIN } \vec{v} \text{ PITUUS} = |\vec{v}|$$

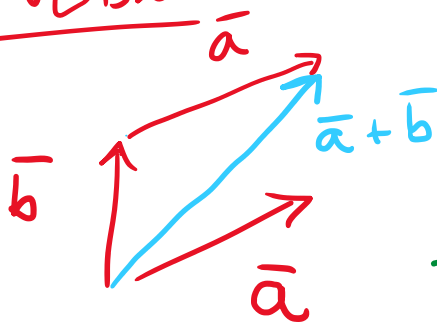
VEKTORIN $\vec{r}$ PITUUS $= |\vec{r}|$

PIIRROKSISSA VEKTORIT OVAT
NUOLIA, JOILLA ON JOKIN PITUUS
JA SUUNTA. MUTTA VEKTOREITA
SAA SIIRRELLÄ PAIKASTA
TOISEEN.

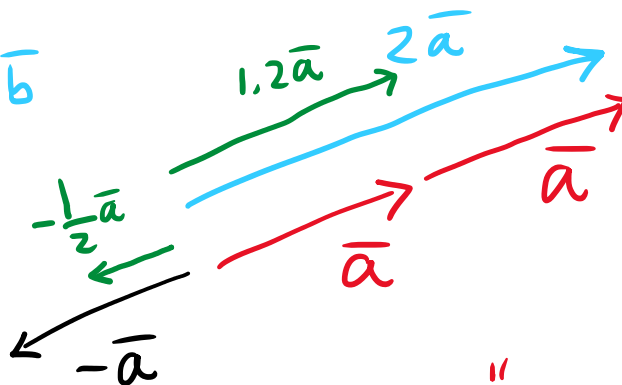
YHTEEN LASKU
VÄHENNYS LASKU
SKAALAUUS

PIIRTAIMÄLLÄ

YHTEENLASKU

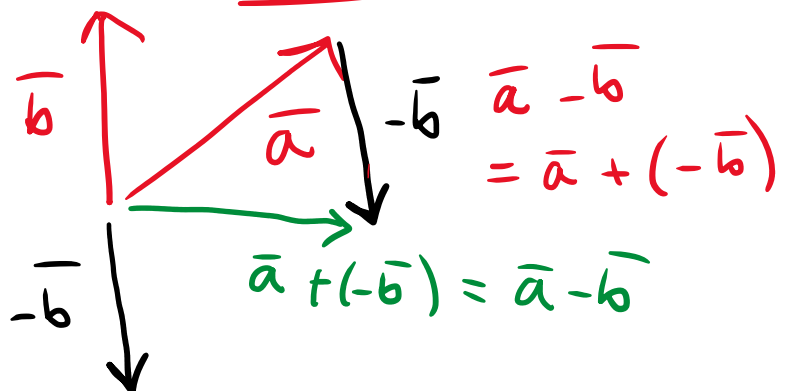


SKAALAMINEN

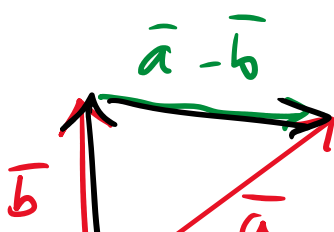


VÄHENNYSLASKU

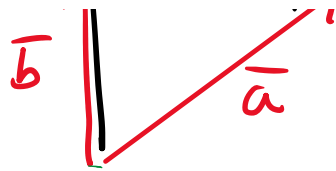
TAPA 1 "ALUKSI $-\vec{b}$ "



TAPA 2



$$\vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}$$

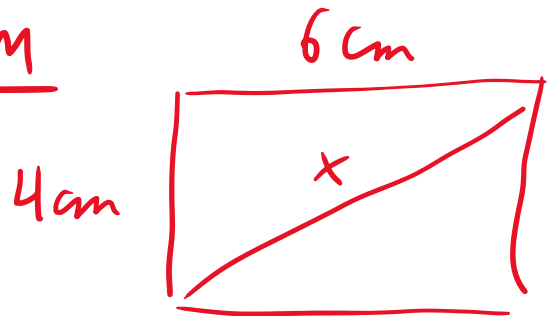


$$b + (a - b) = a$$

$\bar{a} = \bar{a}$ ok

JOSKUS MELOIN
RATKAISU
ON PIIRTTÄÄ

ESIM



RATK. PIIRRETTÄÄN
PAPERILLE
JA MITATAAN X.

(TAI PYTHAGORAAN LAUSELLA)

ESIM.

LASKE PINTA-ALA

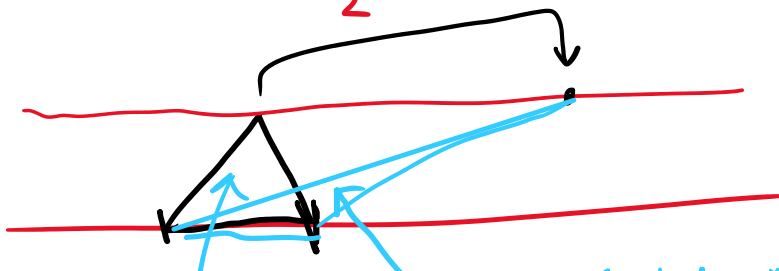
NIKSI!
VIISIKULMIOLLA
JA

△ KOLMIOLLA
SAMA ALA

RATK.

KOLMION

$$ALA = \frac{1}{2} \text{KANTA} \cdot \text{KORKEUS}$$

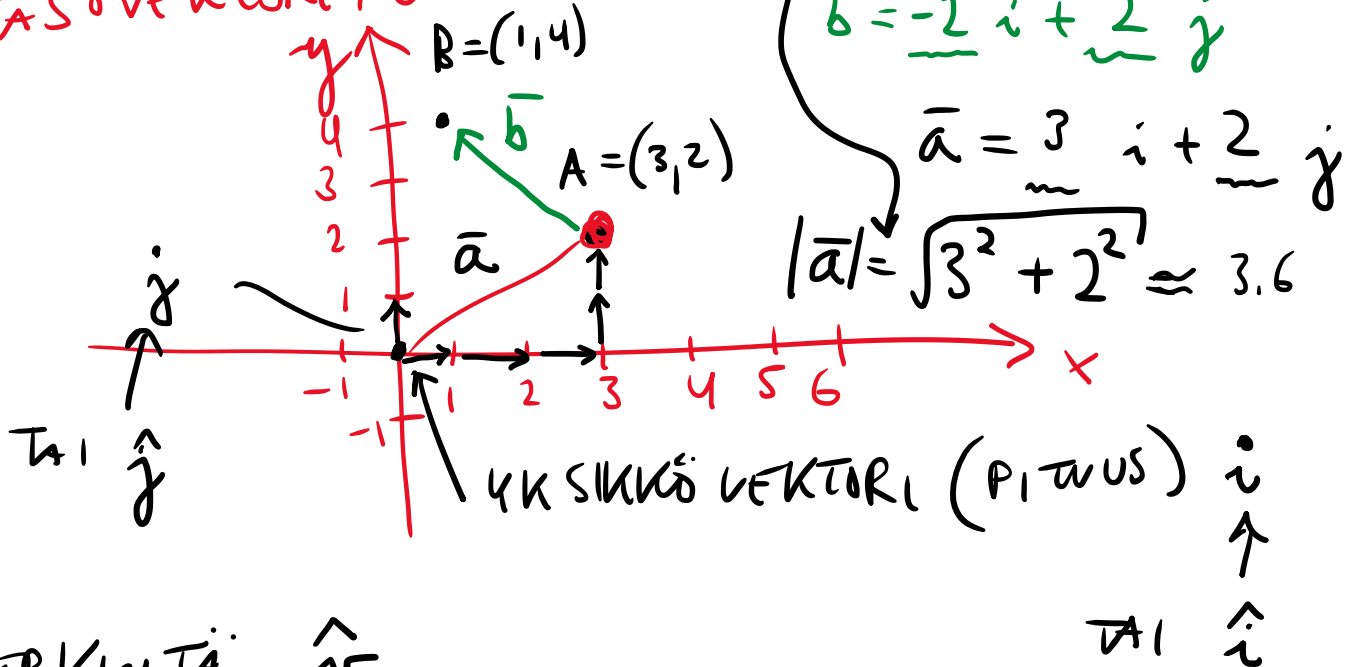


KAHDELLA KOLMIOLLA
SAMA PINTA-ALA

KARTOITUS ON SAMANPINTAALA

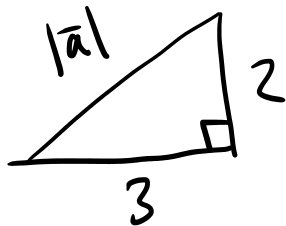
VEKTORIDEN MERKINTÄJÄ PYTHAGORAS

TASOVEKTORI, TA



MERKINTÄ $\hat{n}$

VIHJAA, ETÄ $\hat{n}$ ON VEKTORI
PITUUS $|\hat{n}| = 1$



PYTHAGORAS

$$3^2 + 2^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3.6$$

VEKTORI $\vec{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

VOIDAAN

KIRJOITTAA ERI TAVOILLA

$$\vec{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} = (3, 2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
octave:1> a=[3,2]
a =
     3     2
octave:2> norm(a)
ans = 3.6056
```

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} = (3, 2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

~~5 merkkiä~~ ~~5 merkkiä~~

octave:2> norm(a)
ans = 3.6056

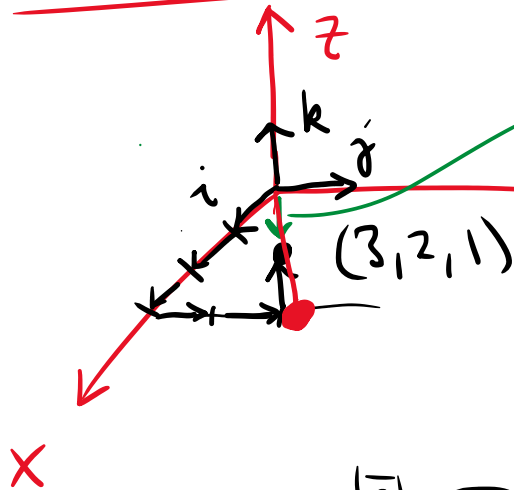


octave:3> a'
ans =

3
2

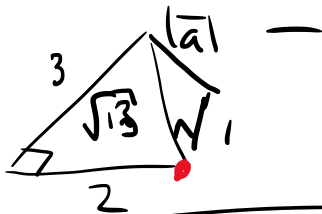
octave:4> norm(a')
ans = 3.6056

3D-AVARUUS



$$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 1\hat{k}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{13 + 1} \\ &= \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} \end{aligned}$$



ESIM. $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$
 $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$

VIKKO 1, KOTIN POHDITTAVAKSI

Viikko 1 (vektorin esitystavat, pituus ja yksikkövektori)

1. Esitä muodossa (a, b, c) vektori

- (a) $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$
- (b) $5(2\hat{j} + 3\hat{i} + 4\hat{k})$
- (c) $2\hat{j} + 4\hat{k}$
- (d) $\hat{i} - \hat{j}$

2. Esitä muodossa $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ vektori

- (a) $(1, 2, 3)$
- (b) $-2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (c) $(-1, 0, 3)$

3. Olkoon $\vec{u} = (2, 1)$ ja $\vec{v} = (1, -1)$. Laske

- (a) $|\vec{u}|$
- (b) $|\vec{v}|$

KUFTA
LASKE A

3. Olkoon $\bar{u} = (2, 1)$ ja $\bar{v} = (1, -1)$. Laske

(a) $|\bar{u}|$

(b) $|\bar{v}|$

(c) $|\bar{u} + \bar{v}|$

(d) $|\bar{u} - \bar{v}|$

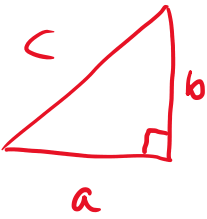
(e) $|\bar{u} + \bar{v}|^2 + |\bar{u} - \bar{v}|^2 - 2|\bar{u}|^2 - 2|\bar{v}|^2$



KERTAUSTA JA VEKTOREISTA LYHYESTI

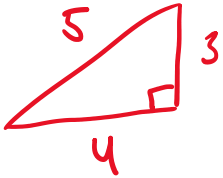
NELIÖ

KUUTIO



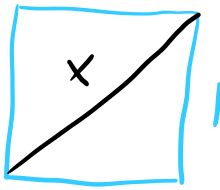
PYTHAGORAS?

$$c^2 = b^2 + a^2$$



$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$25 = 9 + 16 \text{ TOSI}$$



$$x = ?$$

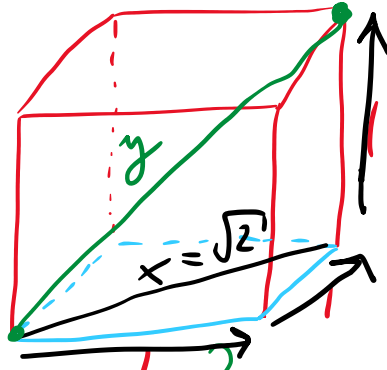
$$x = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \approx 1.4$$



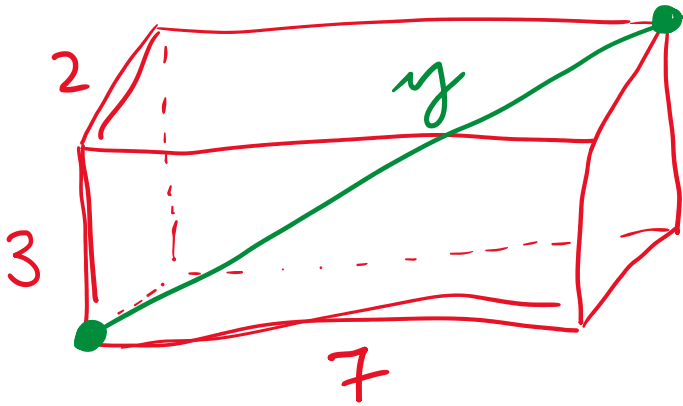
$$y = ?$$

$$\sqrt{2}^2 + 1^2 = y^2$$

$$1^2 + 1^2 + 1^2 = y^2$$

$$y = \sqrt{3} \approx 1.7$$

$$y = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$



$$y = \sqrt{2^2 + 3^2 + 7^2}$$

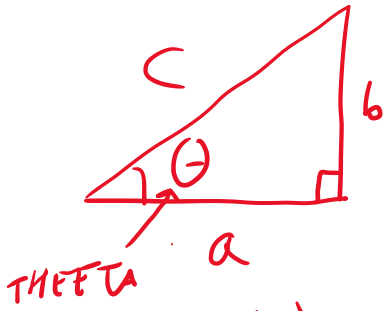
KIRJAIN JA VIIVA PÄÄTTELE
→ VEKTORI

$$\vec{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

(KOHTA LASKE TAAN VASTAAVASTI

VEKTORIN

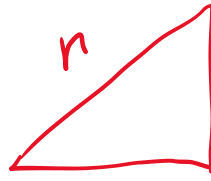
$$\text{PITUUS } |\vec{r}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 7^2}$$



$$\sin(\theta) = \frac{b}{c}$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{c}$$

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$

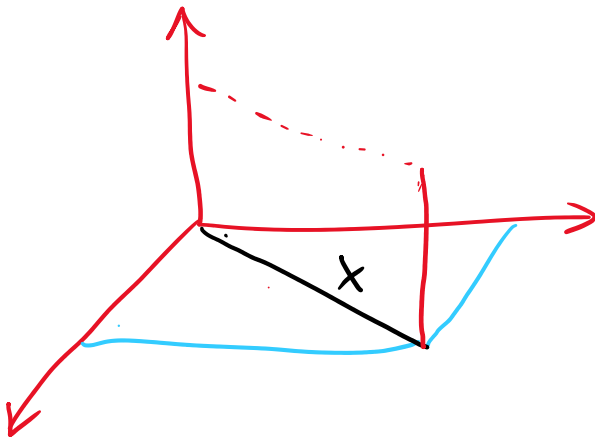
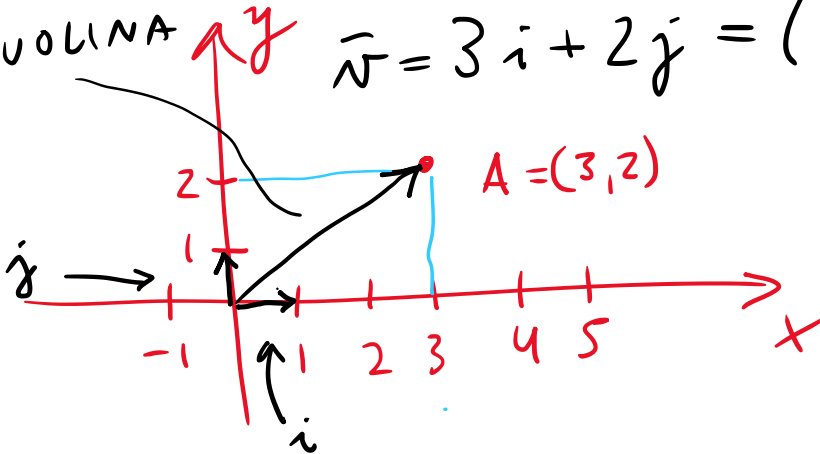


$$r \sin(\theta)$$

$$r \cos(\theta)$$

VEKTORIT
PIIRRETTÄÄN
NUOLINA

$$\vec{r} = 3\vec{i} + 2\vec{j} = (3, 2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Viikko 1 (vektorin esitystavat, pituus ja yksikkövektori)

TAUKO 15 min
JATKUU 9,401. Esitä muodossa (a, b, c) vektori

(a) $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} = (2, 3, 4)$

(b) $5(2\hat{j} + 3\hat{i} + 4\hat{k})$

(c) $2\hat{j} + 4\hat{k}$

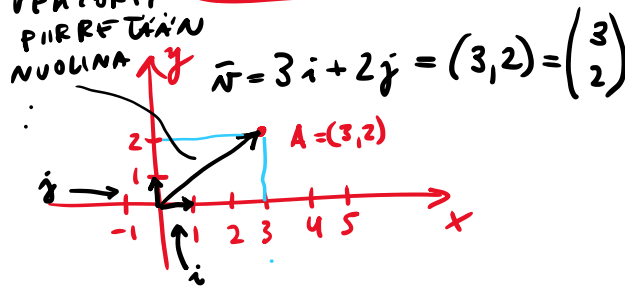
(d) $\hat{i} - \hat{j}$

2. Esitä muodossa $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ vektori

(a) $(1, 2, 3)$

(b) $-2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $(-1, 0, 3)$

VEKTORIT
PIIRRETTÄIN
NUOLINA3. Olkoon $\vec{u} = (2, 1)$ ja $\vec{v} = (1, -1)$. Laske

(a) $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

(b) $|\vec{v}|$

(c) $|\vec{u} + \vec{v}|$

(d) $|\vec{u} - \vec{v}| = |(1, 2)| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

(e) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$

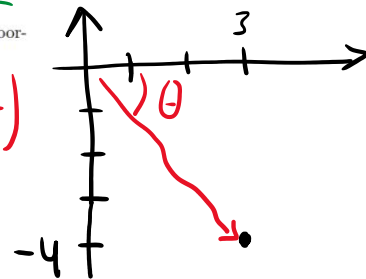
$$\vec{u} + \vec{v} = (2, 1) + (1, -1) = (3, 0)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (2, 1) - (1, -1) = (1, 2)$$

4. Määritä vektorin $3\hat{i} - 4\hat{j}$ suuntainen yksikkövektori.5. Esitä vektori $3\hat{i} - 4\hat{j}$ muodossa $r\hat{u}$, missä $r \geq 0$ ja $\hat{u}$ on yksikkövektori.6. Esitä vektori $3\hat{i} - 4\hat{j}$ muodossa $r \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$, missä $r \geq 0$ ja θ on jokin sopiva kulma. Tämä on ns. napakoordinaattiesitys.Vihje. Tässä $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\theta = \arctan(x/y)$.7. Määritä vektorin $2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$ suuntainen yksikkövektori.

$$= \frac{1}{|3\hat{i} - 4\hat{j}|} (3\hat{i} - 4\hat{j}) = \hat{u}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right)$$
$$= \dots$$

9. Olkoon $A = (1, 5)$ ja $B = (3, 3)$. Määritä vektori $\vec{AB}$. Määritä piste C , kun $\vec{AC} = 2\vec{AB}$. Olkoon $D = (2, 1)$. Määritä piste E , kun $\vec{DE} = -\vec{AB}$. Piirrä kuvaan kaikki mainitut pisteet ja vektorit.

Viikko 1 (vektorin esitystavat, pituus ja yksikkövektori)

1. Esitä muodossa (a, b, c) vektori

$$(a) \ 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} = (2, 3, 4)$$

$$(b) \ 5(2\hat{j} + 3\hat{i} + 4\hat{k})$$

$$(c) \ 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$(d) \ \hat{i} - \hat{j}$$

2. Esitä muodossa $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ vektori

$$(a) \ (1, 2, 3)$$

$$(b) \ -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(c) \ (-1, 0, 3)$$

$$= 1\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$= \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$= -1\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$= -\hat{i} + 3\hat{k}$$

$$= 0\hat{i} - 4\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$= -4\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$= (10\hat{j} + 15\hat{i} + 20\hat{k})$$

$$= (15, 10, 20)$$

$$= (0, 2, 4)$$

$$= 1\hat{i} - 1\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$= (1, -1)$$

$$= (1, -1, 0)$$

3. Olkoon $\bar{u} = (2, 1)$ ja $\bar{v} = (1, -1)$. Laske

(a) $|\bar{u}| = |(2, 1)| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

(b) $|\bar{v}| = |(1, -1)| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

(c) $|\bar{u} + \bar{v}|$

(d) $|\bar{u} - \bar{v}|$

(e) $|\bar{u} + \bar{v}|^2 + |\bar{u} - \bar{v}|^2 - 2|\bar{u}|^2 - 2|\bar{v}|^2$

$|(2, 1) + (1, -1)|$
 $= |(3, 0)| = \sqrt{3^2 + 0^2}$

$= \sqrt{3^2} = 3$

$|(2, 1) - (1, -1)|$

$= |(2, 1) + (-1, 1)| = |(1, 2)| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\rightarrow = 3^2 + \sqrt{5}^2 - 2\sqrt{5}^2 - 2\sqrt{2}^2$

$= 9 + 5 - 2 \cdot 5 - 2 \cdot 2$

$= 9 + 5 - 10 - 4 = 0$

4. Määritä vektorin $3\hat{i} - 4\hat{j}$ suuntainen yksikkövektori.

5. Esitä vektori $3\hat{i} - 4\hat{j}$ muodossa $r\hat{u}$, missä $r \geq 0$ ja $\hat{u}$ on yksikkövektori.

6. Esitä vektori $3\hat{i} - 4\hat{j}$ muodossa $r \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$, missä $r \geq 0$ ja θ on jokin sopiva kulma. Tämä on ns. napakoordinaattiesitys.

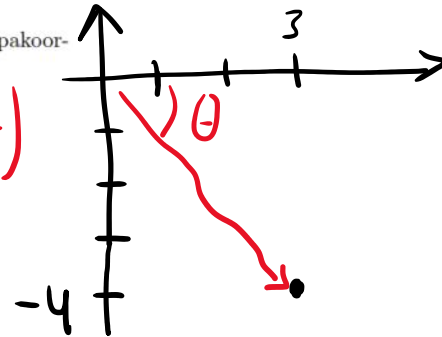
Vihje. Tässä $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$.

7. Määritä vektorin $2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$ suuntainen yksikkövektori.

$$\frac{1}{|3\hat{i} - 4\hat{j}|} (3\hat{i} - 4\hat{j}) = \hat{u}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right)$$

$$= \dots$$



$$3\hat{i} - 4\hat{j}$$

$$= \underbrace{|3\hat{i} - 4\hat{j}|}_r$$

$$\underbrace{\frac{1}{|3\hat{i} - 4\hat{j}|} (3\hat{i} - 4\hat{j})}_{\hat{u}}$$

VEKTORIN YHTÄN LASKU

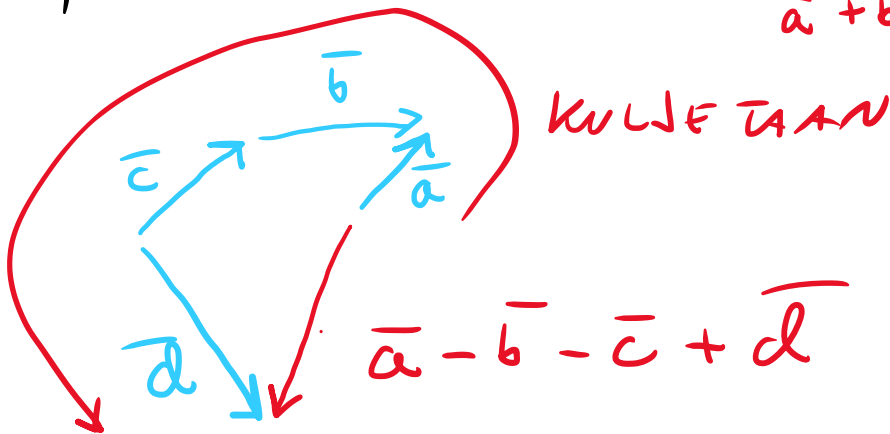
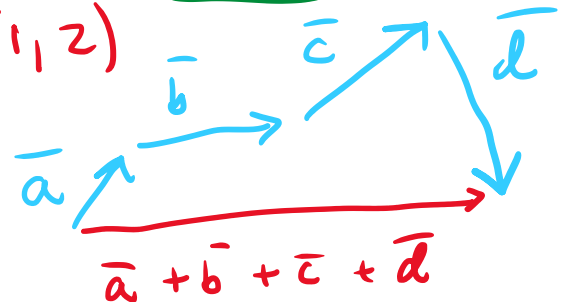
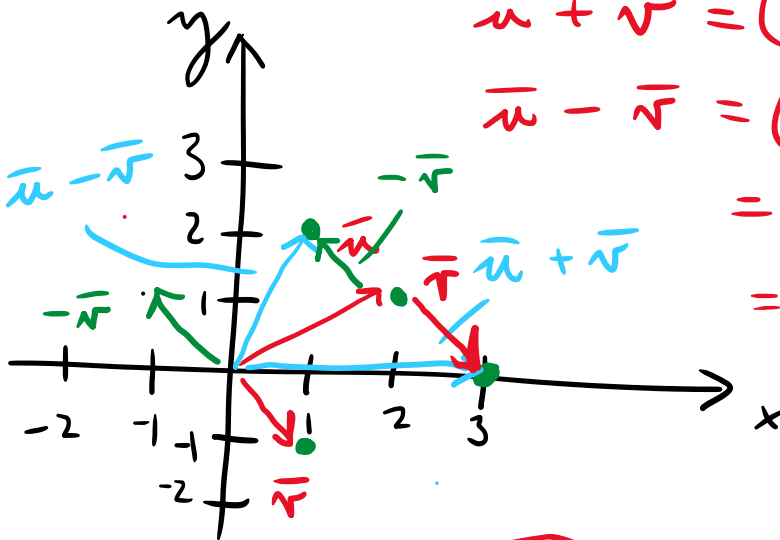
$$\vec{u} = (2, 1)$$

$$\vec{v} = (1, -1)$$

$\vec{u}$ $\vec{v}$

$$\vec{u} + \vec{v} = (3, 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{u} - \vec{v} &= (2, 1) - (1, -1) \\ &= (2, 1) + (-1, 1) \\ &= (1, 2) \end{aligned}$$



YKSIKKÖVEKTORI JA NAPA - KOORDINAATTIMUOTO

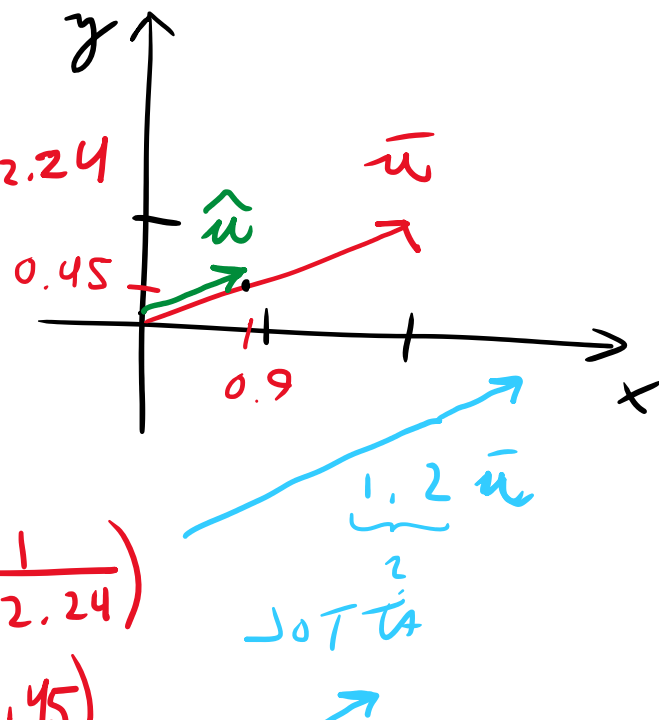
$$\vec{u} = (2, 1) \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{5} \approx 2.24$$

HATU
PITVSI

$$\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u}$$

$$\text{VEKTORIN} = \frac{1}{2.24} (2, 1)$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ SUUNTAINEEN V E K T O R I,} \\ \text{L I I N I K A} \end{aligned} = \left(\frac{2}{2.24}, \frac{1}{2.24} \right) \approx (0.9, 0.45)$$



VEKTORI,

JONKA
PITUUS ON 1. $\approx (0.9, 0.45)$

$$|\hat{u}| = \sqrt{0.9^2 + 0.45^2}$$

$$(\approx 1.0062) = \underline{\underline{1}}$$

2015



$$= (\cos(26^\circ), \sin(26^\circ))$$

TÄSÖN

YKSIKKÖVEKTOREILLA ON SE

HYVÄ OMINAISUUS, ETTÄ NE VOI

KIRJOITTAA MUODOSSA

$$a\hat{i} + b\hat{j} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

$$\text{MISSÄ } \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \\ = 26^\circ$$

$$|3\hat{i} - 4\hat{j}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\frac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{j}) = (0.6\hat{i} - 0.8\hat{j})$$

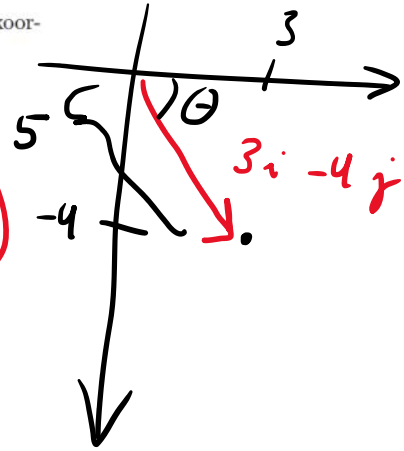
4. Määritä vektorin $3\hat{i} - 4\hat{j}$ suuntainen yksikkövektori.

5. Esitä vektori $3\hat{i} - 4\hat{j}$ muodossa $r\hat{u}$, missä $r \geq 0$ ja $\hat{u}$ on yksikkövektori.

6. Esitä vektori $3\hat{i} - 4\hat{j}$ muodossa $r \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$, missä $r \geq 0$ ja θ on jokin sopiva kulma. Tämä on ns. napakoordinaattiesitys.

Vihje. Tässä $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\theta = \arctan(x/y)$.

7. Määritä vektorin $2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$ suuntainen yksikkövektori.



$$\rightarrow 3\hat{i} - 4\hat{j} = 5(0.6\hat{i} - 0.8\hat{j})$$

$$6. \quad r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right) = -53^\circ$$

$$3\hat{i} - 4\hat{j} = 5 \begin{pmatrix} \cos(-53^\circ) \\ \sin(-53^\circ) \end{pmatrix}$$

$$7. \quad \vec{u} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

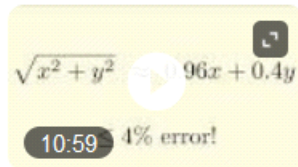
$$\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u} = \frac{1}{6} (2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}) = \frac{1}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$$



YouTube

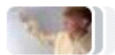
[https://www.youtube.com > watch](https://www.youtube.com/watch) ⋮

A Ridiculous Approximation - YouTube



We prove that $\sqrt{x^2 + y^2}$ can be approximated by $0.96x + 0.4y$, with a surprisingly small percentage error of 4%, where $x \geq y \geq 0$.

YouTube · Dr Barker · 21.10.2022



4 avainkohdat tässä videossa ▼

TUTKITTAVAN VEKTORIA

KERTAUSTA

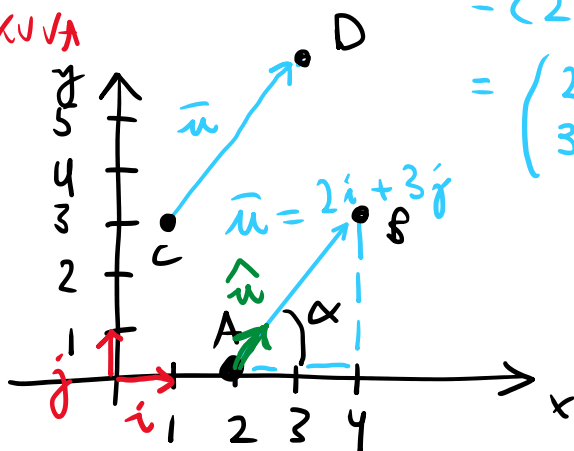
$$\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$= (2, 3)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ERI ESITYSTÄPOJA

KUVA



VEKTORILLA ON

- PITUUS
- SUUNTA

MUTTA! SAA SIIRRELLI
ERI PAIKKAA

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3) - (2, 0) = (4 - 2, 3 - 0) = (2, 3)$$

$$\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$|\vec{u}| = \text{PITUUS} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\hat{u} = \text{YKSIKKÖVEKTORI} = \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{13}} (2\vec{i} + 3\vec{j})$$

$$= \underbrace{\frac{2}{\sqrt{13}}}_{\approx 0,55} \vec{i} + \underbrace{\frac{3}{\sqrt{13}}}_{\approx 0,83} \vec{j}$$

$$\hat{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right)$$

$$\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

 $\vec{u} : \alpha$ VA IHEKULMA α

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) = 0,9827... \cdot \frac{180^\circ}{3,14} \approx 56^\circ$$

$$\vec{u} = |\vec{u}| \hat{u} = \sqrt{13} \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right)$$

$$u = |u|u = \sqrt{13} \left(\frac{4}{\sqrt{13}} + \frac{j}{\sqrt{13}} \right)$$

$$= \sqrt{13} \left(\cos(56^\circ), \sin(56^\circ) \right)$$

$\bar{u} : v$

NAPA-
KORDINAATTI-
ESITYS

VEKTORIT $\vec{u}$ JA $\vec{v}$ PISTETULO
 $\vec{u} = (2, 3)$ $\vec{v} = (5, -7)$

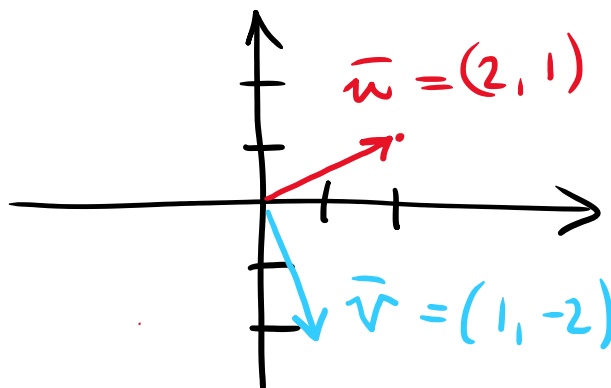
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (2, 3) \cdot (5, -7) \\ &= 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-7) \\ &= 10 - 21 = -11\end{aligned}$$

VEKTORIEN KOHTISUORUUS

$\vec{u}$ JA $\vec{v}$ OVAT KOHTISUORASSA
 ELI NIIDEN VÄLINEN KULMA
 ON 90°

KUN $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

ESIM



$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (2, 1) \cdot (1, -2) \\ &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \\ &= 2 - 2 = 0\end{aligned}$$

VEKTORIEN $\vec{u}$ JA $\vec{v}$ VÄLINEN
 KULMA α TOTEUTTAA



$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

$$\Delta^\alpha \rightarrow \vec{u}$$

$$|\vec{u}| |\vec{v}|$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

Esimerkki

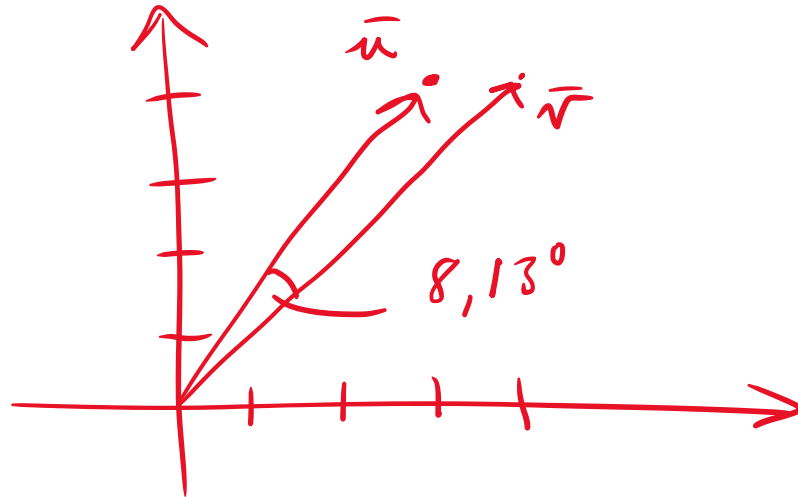
torstai 9. marraskuuta 2023 14.02

Esimerkki. Vektorien $\bar{u} = (3, 4)$ ja $\bar{v} = (4, 4)$ pistetulo on $(3, 4) \cdot (4, 4) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 12 + 16 = 28$.
(Siis vektorien pistetulossa lasketut “alkioittaiset tulot” lasketaan lopuksi yhteen.)

Vektorien $\bar{u} = (3, 4)$ ja $\bar{v} = (4, 4)$ välinen kulma on

$$\alpha = \arccos \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} = \frac{28}{5 \cdot 4\sqrt{2}} = \arccos 0,98994\dots = 0,1418\dots \frac{180^\circ}{\pi} \approx 8,13^\circ.$$

arccos



$$|\bar{u} + \bar{v}|^2 + |\bar{u} - \bar{v}|^2 = 2|\bar{u}|^2 + 2|\bar{v}|^2$$

Viikko 2 (uusi menetelmä: vektorien pistetulo ja vektorien välinen kulma)

Esimerkki. Vektorien $\bar{u} = (3, 4)$ ja $\bar{v} = (4, 4)$ pistetulo on $(3, 4) \cdot (4, 4) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 12 + 16 = 28$.
(Siis vektorien pistetulossa lasketut "alkioittaiset tulot" lasketaan lopuksi yhteen.)

Vektorien $\bar{u} = (3, 4)$ ja $\bar{v} = (4, 4)$ välinen kulma on

$$\alpha = \arccos \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| |\bar{v}|} = \arccos \frac{28}{5 \cdot 4\sqrt{2}} = \arccos 0,98994 \dots = 0,1418 \dots \frac{180^\circ}{\pi} \approx 8,13^\circ.$$

8. Laske vektorien $(1, -2, -3)$ ja $(2, 4, -2)$ pistetulo. Ovatko vektorit toisiaan vastaan kohtisuorassa?
9. Laske vektorien $(1, 2, -3)$ ja $(4, 1, 1)$ pistetulo. Ovatko vektorit toisiaan vastaan kohtisuorassa?
10. Laske vektorien $(1, 2, 2)$ ja $(1, 2, -2)$ välinen kulma. (**Koetehtävä?**)
11. Laske vektorien $(1, 5, 0)$ ja $(3, 3, 0)$ välinen kulma. (**)

$$8. \quad (1, -2, -3) \cdot (2, 4, -2)$$

$$= 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 + (-3) \cdot (-2)$$

$$= 2 - 8 + 6 = 0 \longrightarrow \text{VEKTORIT OVAT KOHTISUORASSA}$$

$$9. \quad \text{PISTETULO} = 3$$

$\rightarrow$ EIVÄT KOHTISUORASSA

$$10. \quad \bar{u} = (1, 2, 2) \quad \text{JA} \quad \bar{v} = (1, 2, -2)$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = 1 + 4 - 4 = 1 \approx 0 \quad \text{NELKÄIN } 90^\circ$$

$$|\bar{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\bar{v} \nearrow \alpha \quad \cos \alpha = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| |\bar{v}|} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$$



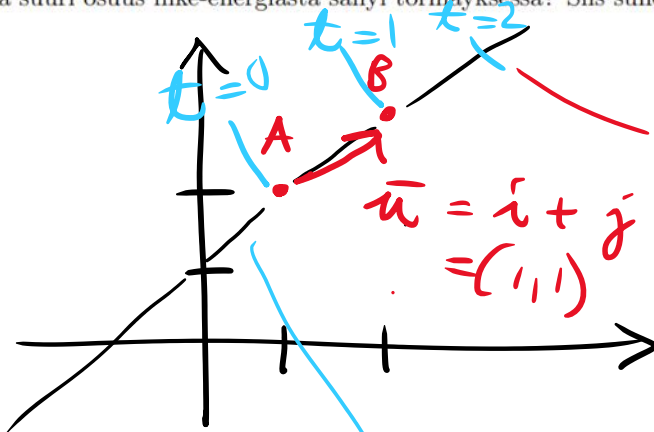
$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{|\vec{u}| |\vec{r}|} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{9} = \underline{\underline{83.6^\circ}}$$

Viikko 2 (vektoreita geometrisesti ja sovelluksissa)

12. Olkoon $A = (1, 5)$ ja $B = (3, 3)$. Määritä vektori AB . Määritä piste C , kun $AC = 2AB$ Olkoon $D = (2, 1)$. Määritä piste E , kun $DE = -AB$. Piirrä kuvaan kaikki mainitut pisteet ja vektorit.
13. Olkoon $A = (1, 5)$ ja $B = (3, 3)$. Esitä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora muodossa $q(t) = p + t\bar{u}$. (Tässä $\bar{u}$ on suoran suuntavektori.)
14. Olkoon $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 4, 3)$ ja $C = (4, 2, 1)$. Esitä pisteiden A , B ja C kautta kulkeva taso muodossa $q(t) = p + tu + sv$.
15. Soutuveneen ($m_1 = 100\text{kg}$) nopeusvektori on $\bar{v}_1 = (2, 5)\text{m/s}$. Vesijetin ($m_2 = 500\text{kg}$) nopeusvektori on $\bar{v}_2 = (10, 0)\text{m/s}$. Alukset törmäävät pisteessä $(0, 0)$ tarttuen toisiinsa kiinni.
- laske kummallekin aluksien liikemäärävektorit $\bar{p}_1 = m_1\bar{v}_1$ ja $\bar{p}_2 = m_2\bar{v}_2$ ennen törmäystä
 - laske yhteen tarttuneiden alusten liikemäärävektori $\bar{p}_3 = m_3\bar{v}_3$. Tässä $m_3 = m_1 + m_2$. (Fysiikasta tiedetään, että liikemäärä säilyy törmäyksissä, eli $\bar{p}_3 = \bar{p}_1 + \bar{p}_2$)
 - laske kyseisen liikemäärävektorin pituus $|\bar{p}_3|$
 - laske yhteen tarttuneiden alusten nopeusvektorin pituus $|\bar{v}_3|$
 - kuinka suuri osuus liike-energiasta säilyi törmäyksessä? Siis suhde $\frac{m_3|\bar{v}_3|^2}{m_1|\bar{v}_1|^2 + m_2|\bar{v}_2|^2}$.

ESIM.



SUORA PISTEIDEN
 $A = (1, 2)$ JA $B = (3, 2)$
 KAUTTA

SUORA VOIDAAN ESITTÄÄ MUODOSSA

$p + t\bar{u}$
 JO KIN SUORAN PISTE
 JO KIN SUUNTAVEKTORI
 $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} t = 0 &\rightarrow (1, 2) \\ t = 1 &\rightarrow (2, 3) \\ t = 2 &\rightarrow (3, 4) \end{aligned}$$

VEKTORIT JA KOMPLEKSILUVUT

TUT 23 SPO, TOINEN TAPAAMINEN

TÄNÄÄN: LASKEAAN TEHTÄVIÄ 8,15-11,15

1. Esitä muodossa (a, b, c) vektori

- (a) $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$
- (b) $5(2\hat{j} + 3\hat{i} + 4\hat{k})$
- (c) $2\hat{j} + 4\hat{k}$
- (d) $\hat{i} - \hat{j}$

2. Esitä muodossa $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ vektori

- (a) $(1, 2, 3)$
- (b) $-2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (c) $(-1, 0, 3)$

3. Olkoon $\vec{u} = (2, 1)$ ja $\vec{v} = (1, -1)$. Laske

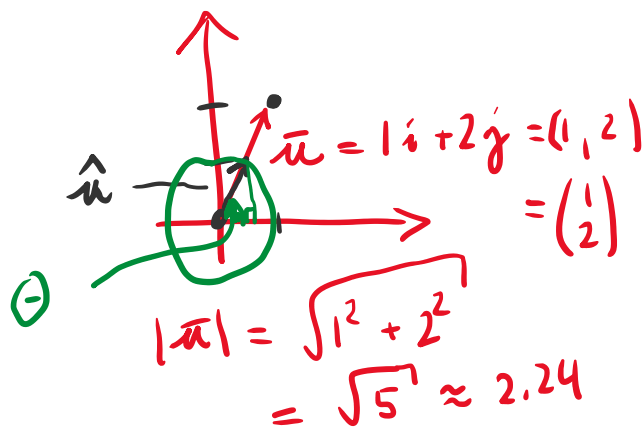
- (a) $|\vec{u}|$
- (b) $|\vec{v}|$
- (c) $|\vec{u} + \vec{v}|$
- (d) $|\vec{u} - \vec{v}|$
- (e) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 - 2|\vec{u}|^2 - 2|\vec{v}|^2$

$$\underbrace{3^2}_{\text{...}} + \underbrace{2}_{\text{...}}$$

$$a(b, c) = (ab, ac)$$

$$\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 2)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = (\cos \theta, \sin \theta)$$



Ratkaisuja.

- 1. (a) $(2, 3, 4)$
- (b) $(15, 10, 20)$
- (c) $(0, 2, 4)$
- (d) $(1, -1)$ tai $(-1, 1)$

- 2. (a) $i + 2j + 3k$
- (b) $-4j - 6k$
- (c) $-i + 3k$

- 3. (a) $\sqrt{5}$
- (b) $\sqrt{2}$
- (c) 3
- (d) $\sqrt{5}$
- (e) 0

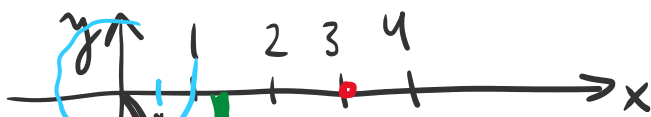
4. Määritä vektorin $\vec{u} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ suuntainen yksikkövektori $\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u}$.

5. Esitä vektori $\vec{u} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ muodossa $\vec{u} = |\vec{u}| \hat{u}$.

6. Esitä vektori $\vec{u} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ muodossa $\vec{u} = |\vec{u}| \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$, missä θ on jokin sopiva kulma. Muoto $r(\cos(\theta), \sin(\theta))$ on ns. napakoordinaattiesitys.

Vihje. Tässä $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\theta = \arctan(y/x)$.

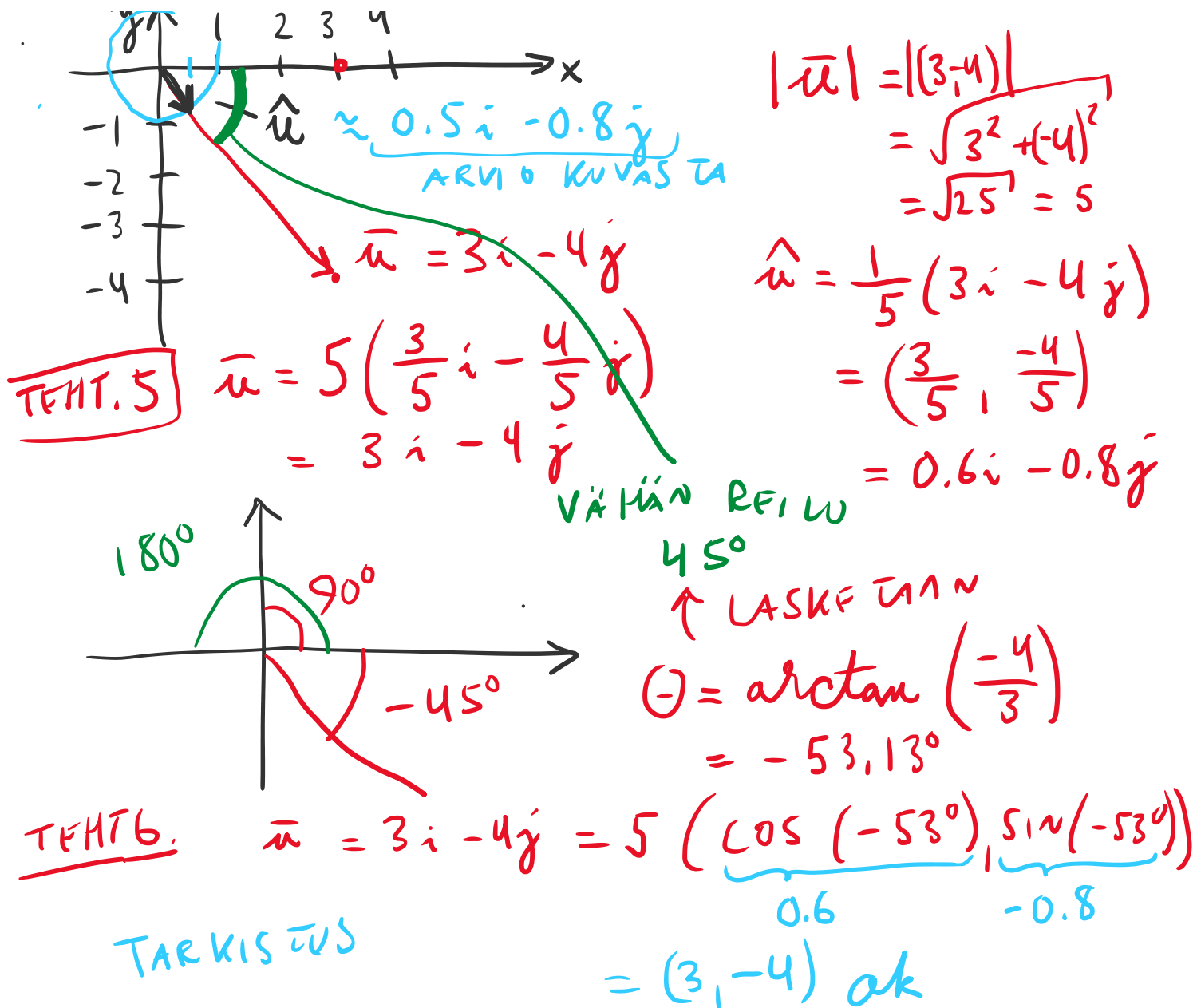
7. Määritä vektorin $\vec{u} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$ suuntainen yksikkövektori. (Koetehtävä?)



Ratkaisuja.

- 4. $\hat{u} = 0.6i - 0.8j$
- 5. $\vec{u} = 5(0.6i - 0.8j)$
- 6. $\vec{u} = 5(\cos(-53^\circ), \sin(-53^\circ))$
- 7. $\hat{u} = 0.33i - 0.66j + 0.66k$

$$|\vec{u}| = |(3, -4)|$$



Esimerkki. Vektorien $\vec{u} = (3, 4)$ ja $\vec{v} = (4, 4)$ pistetulo on $(3, 4) \cdot (4, 4) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 12 + 16 = 28$.

(Siis vektorien pistetulossa lasketut "alkioittaiset tulot" lasketaan lopuksi yhteen.)

Vektorien $\vec{u} = (3, 4)$ ja $\vec{v} = (4, 4)$ välinen kulma on

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \arccos \frac{28}{5 \cdot 4\sqrt{2}} = \arccos 0,98994 \dots = 0,1418 \dots \frac{180^\circ}{\pi} \approx 8,13^\circ.$$

8. Laske vektorien $(1, -2, -3)$ ja $(2, 4, -2)$ pistetulo. Ovatko vektorit toisiaan vastaan kohtisuorassa?

Ratkaisu: ovat

9. Laske vektorien $(1, 2, -3)$ ja $(4, 1, 1)$ pistetulo. Ovatko vektorit toisiaan vastaan kohtisuorassa?

Ratkaisu: eivät ole

12. Olkoon $A = (1, 5)$ ja $B = (3, 3)$. Määritä vektori $\vec{u} = \vec{AB} = B - A$. Määritä piste C , kun $\vec{AC} = 2\vec{AB}$. Olkoon $D = (2, 1)$. Määritä piste E , kun $E - D = \vec{DE} = -\vec{AB} = -(B - A)$. Piirrä kuvaan kaikki mainitut pisteet ja vektorit.

13. Olkoon $A = (1, 2)$ ja $B = (2, 3)$. Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora on muotoa

$$Q(t) = P + t\vec{u} = A + t(B - A) = (1, 2) + t(1, 1).$$

Määritä suoralla olevat pisteet $Q(2)$, $Q(3)$, $Q(\frac{1}{2})$, $Q(-1)$.

Vihje. Sijoita luvun t eri arvoja kaavaan $(1, 2) + t(1, 1)$.

14. Olkoon $A = (1, 5)$ ja $B = (3, 3)$. Esitä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora muodossa $Q(t) = P + t\vec{u}$. (Tässä $\vec{u}$ on suoran suuntavektori.)

15. Olkoon $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ ja $C = (0, 0, 3)$. Pisteiden A , B ja C kautta kulkeva taso voidaan esittää muodossa

$$O(t, s) = P + tu + sv = A + t(B - A) + s(C - A) = (1, 0, 0) + t(-1, 2, 0) + s(-1, 0, 3).$$

12. Olkoon $A = (1, 5)$ ja $B = (3, 3)$. Määritä vektori $\vec{u} = \vec{AB} = B - A$. Määritä piste C , kun $\vec{AC} = 2\vec{AB}$. Olkoon $D = (2, 1)$. Määritä piste E , kun $E - D = \vec{DE} = -\vec{AB} = -(B - A)$. Piirrä kuvaan kaikki mainitut pisteet ja vektorit.

13. Olkoon $A = (1, 2)$ ja $B = (2, 3)$. Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora on muotoa

$$Q(t) = P + t\vec{u} = A + t(B - A) = (1, 2) + t(1, 1).$$

Määritä suoralla olevat pisteet $Q(2)$, $Q(3)$, $Q(\frac{1}{2})$, $Q(-1)$.

Vihje. Sijoita luvun t eri arvoja kaavaan $(1, 2) + t(1, 1)$.

14. Olkoon $A = (1, 5)$ ja $B = (3, 3)$. Esitä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora muodossa $Q(t) = P + t\vec{u}$. (Tässä $\vec{u}$ on suoran suuntavektori.)

15. Olkoon $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ ja $C = (0, 0, 3)$. Pisteiden A , B ja C kautta kulkeva taso voidaan esittää muodossa

$$Q(t, s) = P + tu + sv = A + t(B - A) + s(C - A) = (1, 0, 0) + t(-1, 2, 0) + s(-1, 0, 3).$$

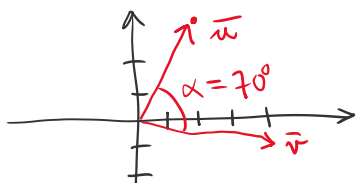
Määritä suoralla olevat pisteet $Q(2, 2)$, $Q(2, -1)$, ja $Q(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Vihje. Sijoita lukujen t ja s eri arvoja pisteen $Q(t, s)$ kaavaan.

16. Olkoon $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 4, 3)$ ja $C = (4, 2, 1)$. Esitä pisteiden A , B ja C kautta kulkeva taso muodossa $Q(t) = P + tu + sv$.

VEKTORIEN PISTETULO

ESIM. $\vec{u} = (2, 3) \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$
 $\vec{v} = (4, -1) \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$



VEKTORIEN VÄLINEN
KULMA

ERIKOISTAPAUSET

NÄIN OLEN PISTETULO ON

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (2, 3) \cdot (4, -1) \\ &= 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \\ &= 8 - 3 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} (= \hat{u} \cdot \hat{v})$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} \approx 0,336$$

$$\alpha = \arccos(0,336) \approx 70^\circ$$

$$\cos(90^\circ) = 0 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \rightarrow \begin{array}{l} \text{VEKTORIT } \vec{u} \text{ JA } \vec{v} \\ \text{KOHTISUORASSA (kulma } 90^\circ) \\ \text{JOS } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \end{array}$$

8. Laske vektorien $(1, -2, -3)$ ja $(2, 4, -2)$ pistetulo. Ovatko vektorit toisiaan vastaan kohtisuorassa?

Ratkaisu: ovat

9. Laske vektorien $(1, 2, -3)$ ja $(4, 1, 1)$ pistetulo. Ovatko vektorit toisiaan vastaan kohtisuorassa?

Ratkaisu: eivät ole

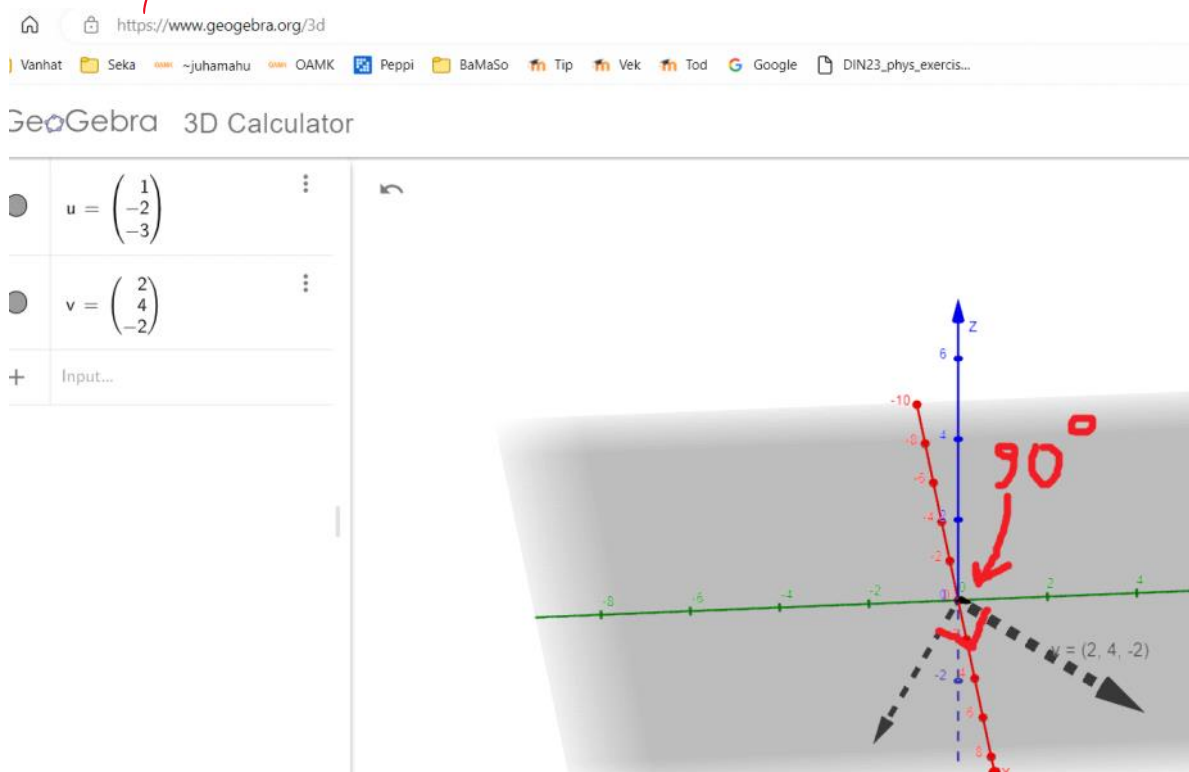
10. Laske vektorien $(1, 2, 2)$ ja $(1, 2, -2)$ välinen kulma. (Koetehtävä?)

Ratkaisu: noin $83,6^\circ$

11. Laske vektorien $(1, 5, 0)$ ja $(3, 3, 0)$ välinen kulma. (**)

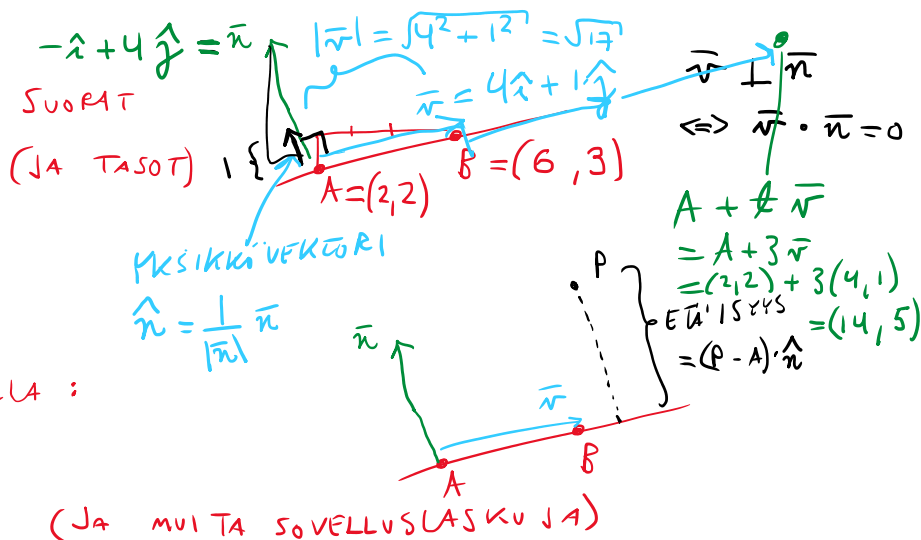
Ratkaisu: noin 33°

TEHT 8, KUVA





TÄNÄÄN: SUORAT



ENSI VIIKOLLÄ:

KURSSIN LOPPU: KOMPLEKSI LUKU JA

VASTAANO TETTU
PYYNTÖ: ENEMMÄN TEORIAA
YHDESSÄ
OK, OTAN HUOMIION JATKOSSA!
t. Julia-Matti

Viikko 3 (suorat)

16. Olkoon $A = (1,1)$ ja $B = (3,2)$. Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora on muotoa

$$Q(t) = A + t\bar{u} = A + t(B - A) = (1,1) + t(2,1). \quad (1)$$

Tässä $\bar{u} = (2,1)$ on suoran suuntavektori. Esimerkiksi piste $Q(10) = (1,1) + 10(2,1) = (21,11)$ on suoralla.

Määritä suoralla olevat pisteet $Q(2)$, $Q(3)$, $Q(\frac{1}{2})$, $Q(-1)$. Piirrä kuva.

Ratkaisu: $Q(2) = (5,3)$, $Q(3) = (7,4)$, $Q(\frac{1}{2}) = (2,1.5)$, $Q(-1) = (-1,0)$

17. Suoran (1) pisteen A kautta kulkeva normaalisuora on muotoa

$$N(t) = A + t\bar{n} = (1,1) + t(1,-2).$$

Tarkista pistetulon avulla, että suoran ja sen normaalisuoran suuntavektorit $\bar{u} = (2,1)$ ja $\bar{n} = (1,-2)$ ovat kohtisuorassa.

Piirrä edellisen tehtävän kuvaan normaalisuoran pisteet $N(1)$ ja $N(2)$.

18. Suoran (1) yhtälö on muotoa $(x,y) \cdot \bar{n} = A \cdot \bar{n}$ eli

$$(x,y) \cdot (1,-2) = (1,1) \cdot (1,-2)$$

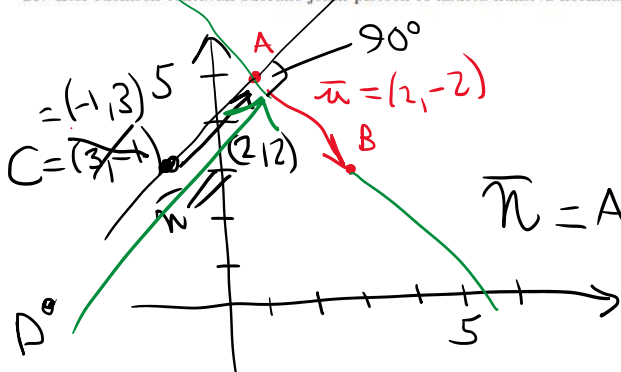
eli $x - 2y = -1$. Tarkista, että pisteet $(x,y) = (5,3)$ ja $(x,y) = (7,4)$ toteuttavat suoran yhtälön.

19. Olkoon $A = (1,5)$ ja $B = (3,3)$. Esitä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora muodossa $Q(t) = A + t\bar{u}$.

$$\text{Ratkaisu: } Q(t) = (1,5) + t(2,-2)$$

$$\text{Ratkaisu: } N(t) = (1,5) + t(2,2)$$

20. Etsi edellisen tehtävän suoralle jokin pisteen A kautta kulkeva normaalisuora.



TOISIN PÄIN
JÄLLE KÄYTTÖ
YKSI MIINUS

$$\begin{aligned} x \cdot 1 + y \cdot (-2) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \\ \Rightarrow x - 2y &= 1 - 2 = -1 \\ \Rightarrow x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

$$\bar{u} = (2,1)$$

$$\bar{n} = (1,-2)$$

$$\bar{n} = (a,b)$$

$$\bar{n} = (-b,a)$$

$$\bar{n} \cdot \bar{n} = a(-b) + b \cdot a = 0$$

$$\bar{u} = (2,-2)$$

$$\begin{aligned} &(-(-2), 2) \\ &= (2,2) \end{aligned}$$

VOIDAAN VALITA
ERI TAVALLAKIN

$$\bar{n} = A - C = (1,5) - (1,3)$$

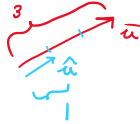
$$= (-2,2)$$

KERTAUSTA

ESIMERKKI. (VEKTORIN PITUUS)

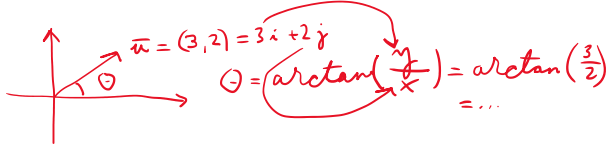
$$\vec{u} = (1, 2, -2)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$



ESIMERKKI. (YKSIKKÖVEKTORI)

$$\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u} = \frac{1}{3} (1, 2, -2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \approx (0.33, 0.67, -0.67)$$

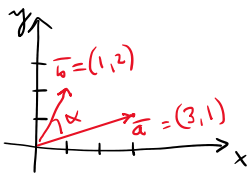


VEKTORIN VÄLINEN KULMA

ESIMERKKI.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{10} \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ$$

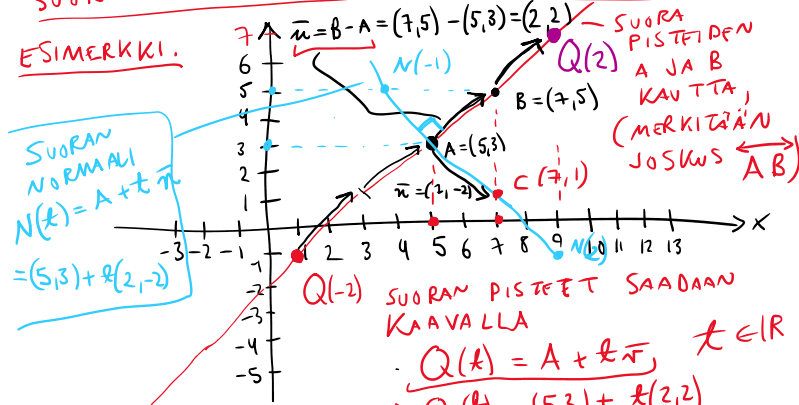


$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (3, 1) \cdot (1, 2) = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3 + 2 = 5 \\ |\vec{a}| &= \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} = \sqrt{2} \sqrt{5} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

UUSI ASIA TÄNÄÄN

SUORAN ESITTÄMISEN VEKTORIN AVULLA.

ESIMERKKI.

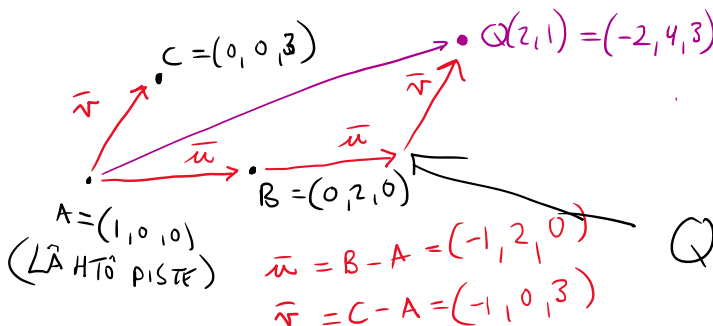


$$Q(-2) = (5, 3) + (-2)(2, 2) = (1, -1)$$

$$Q(2) = (5, 3) + 2(2, 2) = (9, 7)$$

YLEISTYS. TASO PISTEIDEN A, B JA C KAUTTA

TASO PISTEET OVAT MUOTOA



16. Olkoon $A = (1, 1)$ ja $B = (3, 2)$. Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora on muotoa

$$Q(t) = A + t\vec{u} = A + t(B - A) = (1, 1) + t(2, 1).$$

Tässä $\vec{u} = (2, 1)$ on suoran suuntavektori. Esimerkiksi piste $Q(10) = (1, 1) + 10(2, 1) = (21, 11)$ on suoralla. Määritä suoralla olevat pisteet $Q(2)$, $Q(3)$, $Q(\frac{1}{2})$, $Q(-1)$. Piirrä kuva.

Ratkaisu: $Q(2) = (5, 3)$, $Q(3) = (7, 4)$, $Q(\frac{1}{2}) = (2, 1.5)$, $Q(-1) = (-1, 0)$

17. Suoran (1) pisteen A kautta kulkeva normaalisuora on muotoa

$$N(t) = A + t\vec{n} = (1, 1) + t(1, -2).$$

Tarkista pistetulon avulla, että suoran ja sen normaalisuoran suuntavektorit $\vec{u} = (2, 1)$ ja $\vec{n} = (1, -2)$ ovat kohtisuorassa. Piirrä edellisen tehtävän kuvaan normaalisuoran pisteet $N(1)$ ja $N(2)$.

18. Suoran (1) yhtälö on muotoa $(x, y) \cdot \vec{n} = A \cdot \vec{n}$ eli

$$(x, y) \cdot (1, -2) = (1, 1) \cdot (1, -2)$$

eli $x - 2y = -1$. Tarkista, että pisteet $(x, y) = (5, 3)$ ja $(x, y) = (7, 4)$ toteuttavat suoran yhtälön.

19. Olkoon $A = (1, 5)$ ja $B = (3, 3)$. Esitä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora muodossa $Q(t) = A + t\vec{u}$.

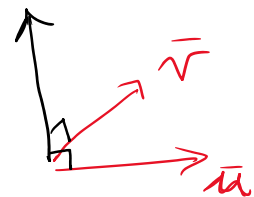
Ratkaisu: $Q(t) = (1, 5) + t(2, -2)$

20. Etsi edellisen tehtävän suoralle jokin pisteen A kautta kulkeva normaalisuora.

Ratkaisu: $Q(t) = (1, 5) + t(2, 2)$

MISTÄ TULI?

$$\vec{n} = (6, 3, 2)$$



$$Q(2, 0) = (1, 0, 0) + 2(-1, 2, 0)$$

$$Q(t, s) = A + t\bar{u} + s\bar{v}$$

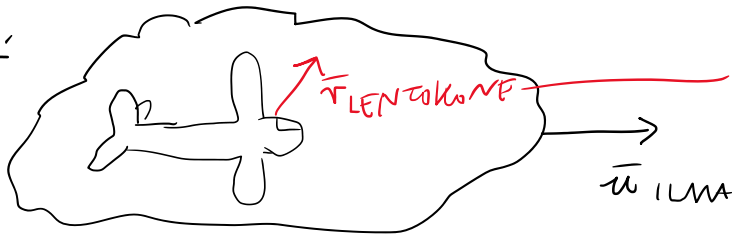
$$Q(t, s) = (1, 0, 0) + t(-1, 2, 0) + s(-1, 0, 3)$$

$$Q(2, 1) = (1, 0, 0) + 2(-1, 2, 0) + 1(-1, 0, 3) = (-2, 4, 3)$$

$$= (-1, 2, 0)$$

(EI GAS)

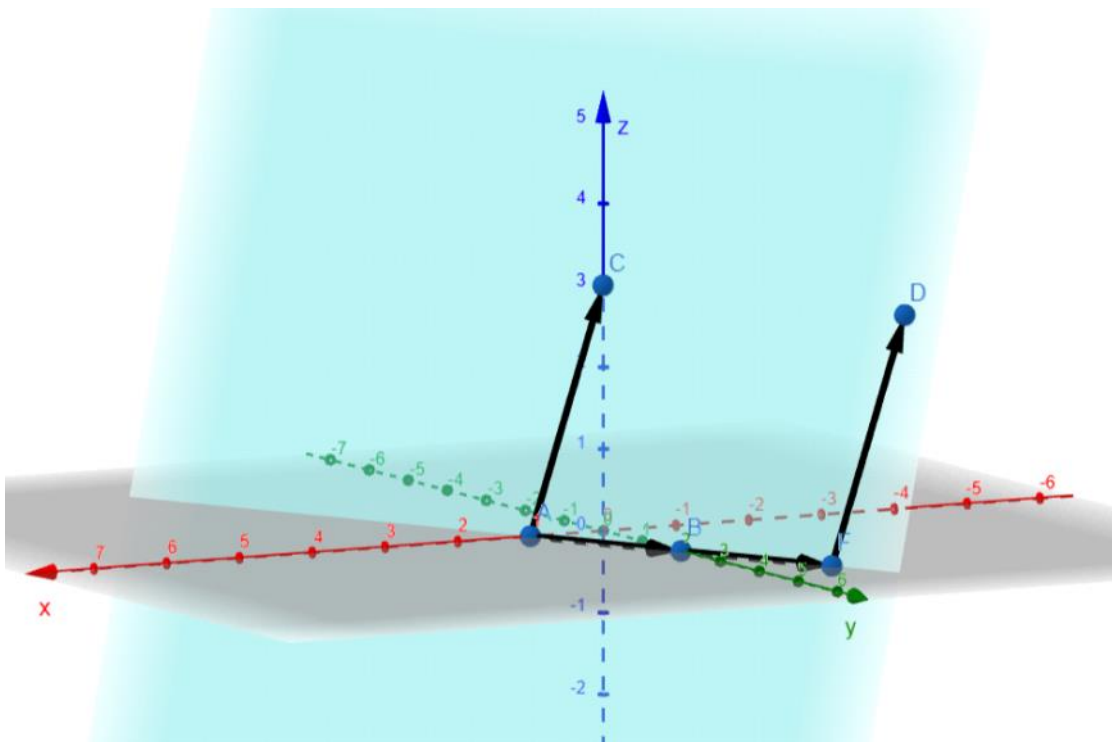
SOVELLUS.



NOPEUS
ILMA MASSAN
SUMITTEN

LENTOKONEEN PAIKKA $t=10$ S KUUTTA

$$A + t\bar{u}_{ILMA} + s\bar{r}_{LENTOKONE}$$



16. Olkoon $A = (1, 1)$ ja $B = (3, 2)$. Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora on muotoa

$$Q(t) = A + t\vec{u} = A + t(B - A) = (1, 1) + t(2, 1). \quad (1)$$

Tässä $\vec{u} = (2, 1)$ on suoran suuntavektori. Esimerkiksi piste $Q(10) = (1, 1) + 10(2, 1) = (21, 11)$ on suoralla.

Määritä suoralla olevat pisteet $Q(2)$, $Q(3)$, $Q(\frac{1}{2})$, $Q(-1)$. Piirrä kuva.

Ratkaisu: $Q(2) = (5, 3)$, $Q(3) = (7, 4)$, $Q(\frac{1}{2}) = (2, 1.5)$, $Q(-1) = (-1, 0)$

17. Suoran (1) pisteen A kautta kulkeva normaalisuora on muotoa

$$N(t) = A + t\vec{n} = (1, 1) + t(1, -2).$$

Tarkista pistetulon avulla, että suoran ja sen normaalisuoran suuntavektorit $\vec{u} = (2, 1)$ ja $\vec{n} = (1, -2)$ ovat kohtisuorassa. Piirrä edellisen tehtävän kuvaan normaalisuoran pisteet $N(1)$ ja $N(2)$.

18. Suoran (1) yhtälö on muotoa $(x, y) \cdot \vec{n} = A \cdot \vec{n}$ eli

$$(x, y) \cdot (1, -2) = (1, 1) \cdot (1, -2)$$

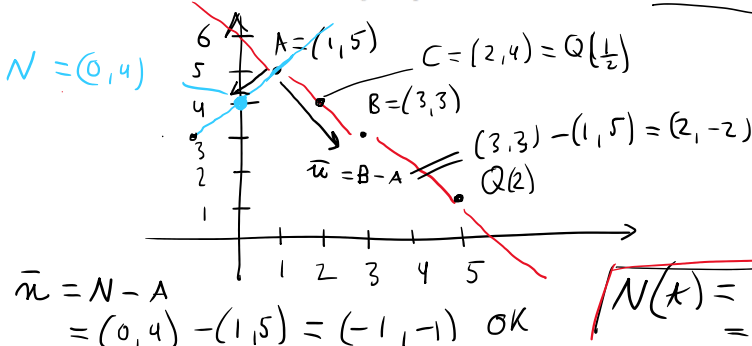
eli $x - 2y = -1$. Tarkista, että pisteet $(x, y) = (5, 3)$ ja $(x, y) = (7, 4)$ toteuttavat suoran yhtälön.

19. Olkoon $A = (1, 5)$ ja $B = (3, 3)$. Esitä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora muodossa $Q(t) = A + t\vec{u}$.

Ratkaisu: $Q(t) = (1, 5) + t(2, -2)$

20. Etsi edellisen tehtävän suoralle jokin pisteen A kautta kulkeva normaalisuora.

Ratkaisu: $Q(t) = (1, 5) + t(2, 2)$



$$\begin{aligned} Q(2) &= (1, 5) + 2(2, -2) \\ &= (1, 5) + (4, -4) \\ &= (5, 1) \end{aligned}$$

$$N(t) = A + t\vec{n} = (1, 5) + t(-1, -1)$$

21. Olkoon $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ ja $C = (0, 0, 3)$. Pisteiden A , B ja C kautta kulkeva taso on muotoa

$$Q(t, s) = A + t\vec{u} + s\vec{v} = A + t(B - A) + s(C - A) = (1, 0, 0) + t(-1, 2, 0) + s(-1, 0, 3). \quad (2)$$

Tässä $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ ovat tason suuntavektorit. Esimerkiksi piste

$$Q(10, 10) = (1, 0, 0) + 10(-1, 2, 0) + 10(-1, 0, 3) = (-19, 20, 30)$$

on tasolla.

Määritä tasolla olevat pisteet $Q(2, 2)$, $Q(2, -1)$, ja $Q(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

22. Tason (2) pisteen A kautta kulkeva normaalisuora on

$$N(t) = A + t\vec{n} = (1, 0, 0) + t(6, 3, 2).$$

Tässä $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (6, 3, 2)$ on eräs tason normaalivektori. Tarkista, että $\vec{n} \perp \vec{u}$ ja $\vec{n} \perp \vec{v}$. (***) Vihje. Käytä pistetuloa.

23. Tason (2) yhtälö on muotoa $(x, y, z) \cdot \vec{n} = A \cdot \vec{n}$ eli

$$(x, y, z) \cdot (6, 3, 2) = (1, 0, 0) \cdot (6, 3, 2)$$

eli $6x + 3y + 2z = 6$. Tarkista, yhtälöön sijoittamalla, että pisteet A , B ja C sekä piste $Q(2, 2)$ ovat tasolla.

VOIDAAAN VALITA MYÖS ERI TAVALLA ESIM. $\vec{n} = (2, -4)$ TAI $\vec{n} = (-100, 200)$

RATKAISU.

$$4x = 6$$

$$x = \frac{6}{4}$$

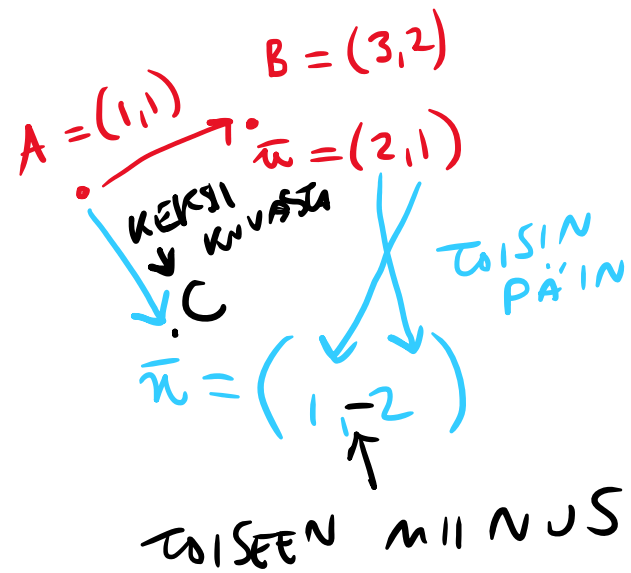
$$x = \frac{3}{2}$$

ESIM ERKKIKSI

NYT SAMAT

MITEN NORMAALIVEKTORIN
SAA?

$$\text{tai } \vec{n} = C - A$$



$$\vec{n} = (a, b)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (b, -a)$$

↑ ESIM.

22. Tason (2) pisteen A kautta kulkeva normaalisuora on

$$N(t) = A + t\bar{n} = (1, 0, 0) + t(6, 3, 2).$$

Tässä $\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v} = (6, 3, 2)$ on eräs tason normaalivektori. Tarkista, että $\bar{n} \perp \bar{u}$ ja $\bar{n} \perp \bar{v}$.

MITEN SAADAAN $\bar{n} = (6, 3, 2)$?

1. RIVI
2. RIVI
3. RIVI

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) - (-1) \cdot 3 \\ (-1) \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the cross product calculation for the normal vector $\bar{n}$ of a plane. The plane is shown as a red parallelogram. Vectors $\bar{u} = (-1, 2, 0)$ and $\bar{v} = (-1, 0, 3)$ are shown originating from point A . The normal vector $\bar{n}$ is shown perpendicular to the plane. The components u_1, u_2, u_3 and v_1, v_2, v_3 are labeled. The calculation for $\bar{n}$ is shown as a determinant of a 3x3 matrix, with the first row being $u_2 v_3 - u_3 v_2$, the second row being $u_3 v_1 - u_1 v_3$, and the third row being $u_1 v_2 - u_2 v_1$. The final result is $\bar{n} = (6, 3, 2)$.

Handwritten calculation for $\bar{n}$:

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) - (-1) \cdot 3 \\ (-1) \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Verification of $\bar{n} \perp \bar{u}$ and $\bar{n} \perp \bar{v}$:

$$\bar{u} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3$$

$$= (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = -6 + 6 + 0 = 0$$

$$\bar{v} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3$$

$$= (-1) \cdot 6 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = -6 + 0 + 6 = 0$$

Since both dot products are zero, $\bar{n}$ is perpendicular to both $\bar{u}$ and $\bar{v}$.

TAPA ESITTÄÄ RISTITULU

DETERMINANTTI

PALLO, $V=1$

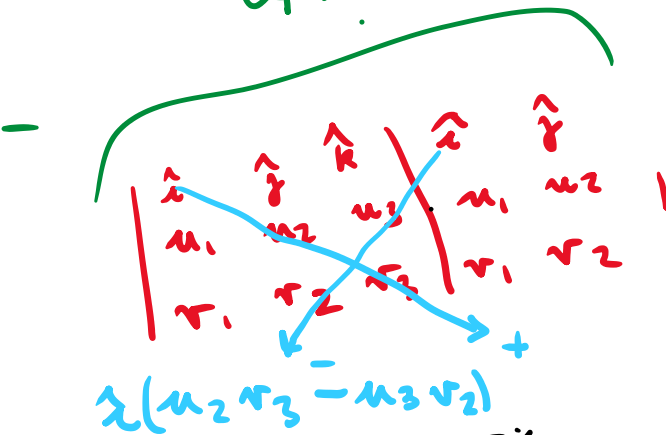


$$\bar{x} \mapsto A\bar{x}$$

SARRUSIN SÄÄNTÖ
DETERMINANTTIEN
LASKEMISEEN



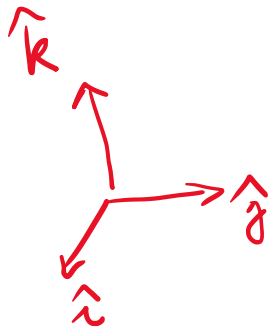
ELLIPSOIDI, $V=|A|$



-

HALUTAAAN $\times$ -OPERAATIO, JOLLE

$$w = u \times v$$



SEURAA

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

$$\Rightarrow \bullet \quad v \times u = -w$$

$$\bullet \quad (a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

$$\bullet \quad \begin{cases} w \perp u \\ w \perp v \end{cases}$$

$$\bullet \quad |w| = \text{ALA}$$

$$\bullet \quad \begin{cases} u = \text{ETUSORMI} \\ v = \text{KESKISORMI} \\ w = \text{PEUKALO} \end{cases}$$

OIKEAN
KÄDEN
SYSTEMI

Määritelmä 1.5.1

Vektori $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ ja $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ ristitulo on vektori

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1).$$

SELKÄÄMMIN

$$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1. \text{Rivi} \\ 2. \text{Rivi} \\ 3. \text{Rivi} \end{matrix}$$

ESIM. $(4, 1, 0) \times (1, 5, -1)$

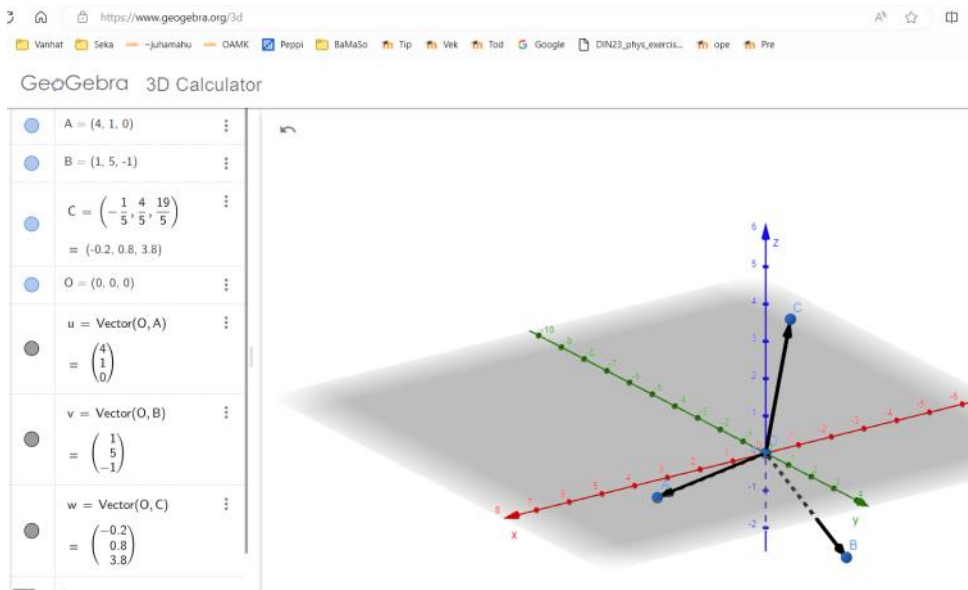
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}$$

TARKISTETAAN KÄHTISUORUUT.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\begin{aligned} (4, 1, 0) \cdot (-1, 4, 19) \\ = 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 19 \\ = -4 + 4 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1, 5, -1) \cdot (-1, 4, 19) \\ = 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 + (-1) \cdot 19 \\ = -1 + 20 - 19 = 0 \end{aligned}$$



$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1).$$

$$5. \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$6. \mathbf{0} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ ja } \mathbf{v} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$7. \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}.$$

TARKISTUS $\vec{v} \times \vec{v}$

$$= \begin{pmatrix} v_2 v_3 - v_3 v_2 \\ v_3 v_1 - v_1 v_3 \\ v_1 v_2 - v_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

TARKISTUS $\vec{r} \times (0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -0 \\ 0 & -0 \\ 0 & -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(a, b, c) KAIKKI REAALILUKUJA

Lause 1.5.7

Oletetaan, että $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Jos $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ja $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, niin

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \sin \alpha,$$

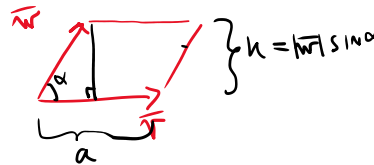
missä α on vektorien $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ välinen kulma.

TÄMÄ LUKU ON

VERTA $\vec{u} \cdot \vec{r} = |\vec{u}| |\vec{r}| \cos \alpha$

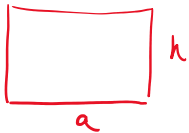
$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{|\vec{u}| |\vec{r}|}$$

SUUNNIKKAN
PINTA-ALA



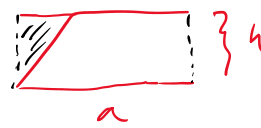
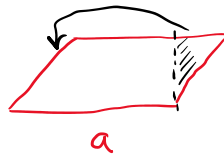
$$ALA = a_h = |\vec{r}| |\vec{u}| \sin(\alpha)$$

SUORAKULMI

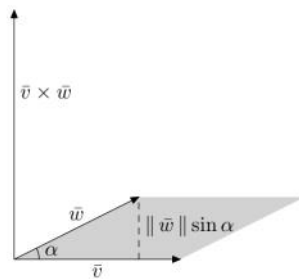


$$ALA = ah$$

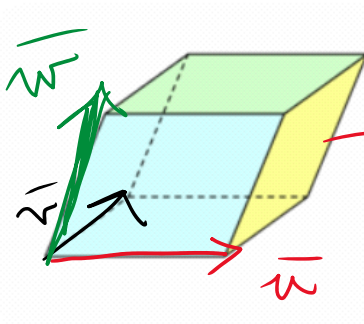
SUUNNIKAS



$$ALA = ah$$



Kuva 1.5.4. Ristitulovektorin $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ pituus on yhtä suuri kuin vektorien $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ määrämän suunnikkaan ala.



TILAVUUS V

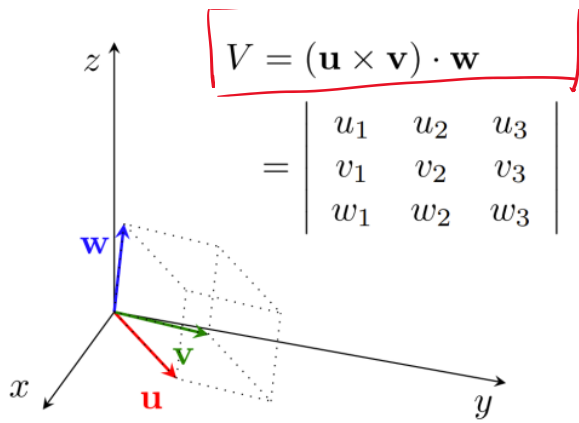
Wikisanakirja:Etusivu
suuntaissärmiö - Wikisanakirja

ESIM, $\vec{u} = (4, 1, 0)$
 $\vec{v} = (1, 5, -1)$
 $\vec{w} = (1, 1, 0)$



$$V = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$



$$\vec{w} = (1, 1, 0)$$

$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

$$= (-1, 4, 19) \cdot (1, 1, 0)$$

$$= -1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 19 \cdot 0$$

$$= -1 + 4 = 3$$

Ristitulo

24. Vektorien ristitulo määritellään kaavalla

$$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Laske $(-1, 2, 0) \times (-1, 0, 3)$.

Ratkaisu: $(6, 3, 2)$

25. Tarkista, että $(-1, 2, 0) \cdot (6, 3, 2) = 0$ ja $(-1, 0, 3) \cdot (6, 3, 2) = 0$.

26. Laske

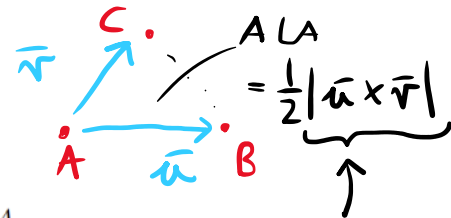
(a) $(2, -1, 1) \times (-1, 2, 1)$

Ratkaisu: $(-3, -3, 3)$

(b) $(1, 2, 0) \times (2, 1, 1)$

Ratkaisu: $(2, -1, -3)$

27. KUVA



27. Pisteet $A = (3, 1, 4)$, $B = (2, 3, 5)$ ja $C = (-1, 1, 0)$ muodostavat kolmion.

(a) Laske kolmion kahdelle sivulle suuntavektorit. Esimerkiksi $\vec{u} = B - A$ ja $\vec{v} = C - A$.

Ratkaisu: $B - A = (-1, 2, 1)$, $C - A = (-4, 0, -4)$, $C - B = (-3, -2, -5)$

(b) Laske kolmion pinta-ala.

Vihje. Pinta-alalle on useita kaavoja, esimerkiksi $\text{Ala} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|$ ja $\text{Ala} = \frac{1}{2} |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \alpha$, missä α on vektorien $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ välinen kulma. Voit käyttää jompaa kumpaa näistä kaavoista.

Ratkaisu: $\text{Ala} = 8\sqrt{5}$
 $4\sqrt{5}$

28. Eräällä suunnikkaalla on kärkipisteet $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 4, 3)$ ja $C = (4, 2, 1)$. Laske suunnikkaan pinta-ala.

Vihje. Voit laskea kolmion ABC pinta-alan ja kertoa sen kahdella.

Ratkaisu: $\text{Ala} = 10\sqrt{2}$

29. Kuinka suuri on suunnikkaan $ABCD$ pinta-ala, kun sen kolme kärkeä ovat pisteissä $A = (2, 1)$, $B = (0, 0)$ ja $C = (2, -3)$?

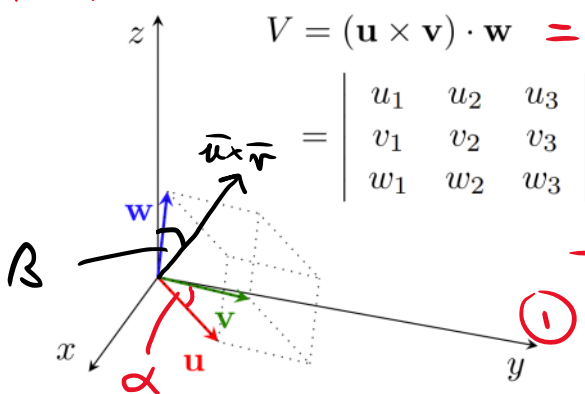
Ratkaisu: $\text{Ala} = 8$

D.K. LASKETTIIN YHDESSÄ TUNNILLA.

RISTI TULO OCTAVELLA

```
https://octave-online.net
octave:1> cross([-1,2,0],[-1,0,3])
ans =
    6    3    2
```

TILAVUUSLASKUT



$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\alpha) |\vec{w}| \cos(\beta)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

TILAVUUS MAKSIMOITUU, KUN

① $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \sin(\alpha) = 1$

$\Rightarrow$ POHJA SUORAKULMI

② $\beta = 0^\circ \Rightarrow \cos(\beta) = 1$

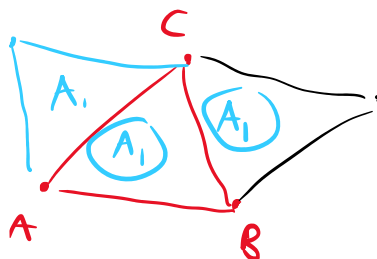
$\Rightarrow$ KORKEUS $\perp$ POHJA

28. Eräällä suunnikkaalla on kärkipisteet $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 4, 3)$ ja $C = (4, 2, 1)$. Laske suunnikkaan pinta-ala.

$4\sqrt{5}$

Vihje. Voit laskea kolmion ABC pinta-alan ja kertoa sen kahdella.

Ratkaisu: $\text{Ala} = 10\sqrt{2}$



$$\vec{u} = B - A$$

$$\vec{w} = D - A \quad \text{ok}$$

$$\vec{v} = C - A$$

30. Laske tetraedrin tilavuus, kun sen kärjet ovat pisteissä $A = (2, 1, -1)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (-1, -2, 2)$ ja $D = (-1, 2, -1)$.

Vihje. Tilavuuden voi laskea kaavalla $V = \pm \frac{1}{6} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$, missä vektorit $\vec{u}$, $\vec{v}$ ja $\vec{w}$ ovat tetraedrin kolmen särmää.

Ratkaisu: $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = -24$, joten $V = 4$ (**Koetehtävä?**)

31. Laittamalla kolme edellisen tehtävän tetraedria (tai niiden peilikuvaa) vierekkäin saadaan prisma. (Prismalla on tahkoina kaksi kolmiota ja kolme suunnikasta.) Laske prisman tilavuus.

Ratkaisu: $V = 12$

32. Laittamalla kaksi edellisen tehtävän prismaa vierekkäin saadaan suuntaissärmiö. (Suuntaissärmiöllä on tahkoina kuusi suunnikasta.) Laske suuntaissärmiön tilavuus.

Ratkaisu: $V = 24$

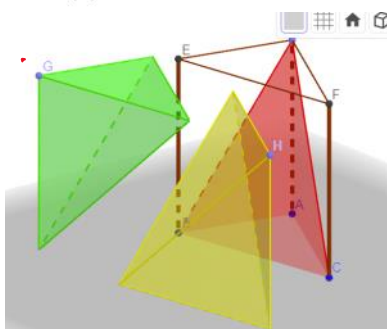
33. Suuntaissärmiön särmät ovat $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ja $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$.

(a) Määritä suuntaissärmiön tilavuus.

Ratkaisu: $\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b} = -2\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $V = 4$

(b) ~~Määritä suuntaissärmiön vaipan pinta-ala.~~

~~**Ratkaisu:** $\text{Ala} = |\vec{w}| = \sqrt{30}$~~

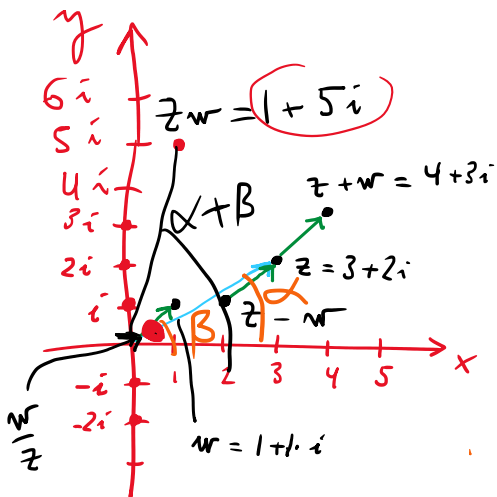


TURHAN
VAIKEA
TEHTÄVÄ!

VÄÄRIN
LUULTAVASTI

$$A = 4 (A_{\text{suunnikas}_1} + A_{\text{suunnikas}_2} + A_{\text{suunnikas}_3})$$

KOMPLEKSI TASO $\mathbb{C}$



i = IMAGINAARIYKSIKKÖ

LASKUSÄÄNTÖ $i \cdot i = i^2 = -1$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (3+2i)(1+i) = 3+3i+2i+2i^2 \\ &= 3+3i+2i-2 \\ &= 1+5i \end{aligned}$$

JAKOLASKU

$$\frac{w}{z} = \frac{1+i}{3+2i} = \frac{(1+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$

↑ ↑
VAIHDETAU VAIHDETAU

$$= \frac{3-2i+3i-2i^2}{9-6i+6i-2^2 i^2} = \frac{5+i}{9+4} = \frac{5+i}{13} = \frac{5}{13} + i \frac{1}{13}$$

4 -1

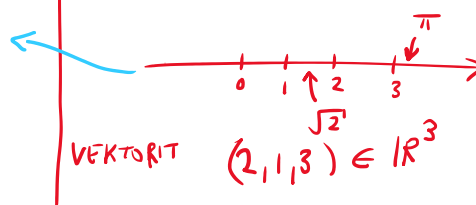
AHAA!

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \text{ MISSÄ } \begin{matrix} p \in \mathbb{Z}, \\ q \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\}$$

$\mathbb{R}$ LUKUSUORAN PISTEET



$$\begin{aligned} z - w &= (3+2i) - (1+i) \\ &= 2+i \end{aligned}$$

LAIVENNETAAN
NIMI TÄJÄN

$$z = 3+2i$$

LIITTOLOVULLA ELI
KONJUGAATILLA

$$z^* = 3-2i$$

$$\approx 0,38 + 0,077i$$

Tehtäviä kompleksiluvuista

keskiviikko 29. marraskuuta 2023 12.23

Kompleksiluvuilla voi laskea kuten reaalityluilla, mutta täytyy ottaa huomioon $i^2 = -1$.

35. Olkoon $z = 3 - 4i$ ja $w = 1 + 2i$. Laske

(a) $z + w$

(b) $z - w$

(c) zw (Koetehtävä)

KANNATTAA
PIIRTÄÄ KUVA

4-2i

Ratkaisu: ~~4-2i~~

Ratkaisu: 2-6i

Ratkaisu: 11 + 2i

Kompleksilukujen jakolaskussa lavennetaan nimittäjän $z = a + ib$ liittoluvulla eli konjugaatilla $z^* = a - ib$ seuraavasti

$$\frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{(c + di)(a - bi)}{a^2 - b^2 i^2} = \frac{(c + di)(a - bi)}{a^2 + b^2}.$$

Hyöty on siinä, että nimittäjästä saatiin pois imaginaariyksiköt i ja voidaan taas laskea kuten reaalityluilla. Nimittäjään tuli

$$zz^* = a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = |z|^2$$

eli luvun z modulin eli itseisarvon $|z|$ neliö.

RATK. $\frac{w}{z}$

$$= -0.2 + 0.4i$$

36. Olkoon $z = 3 - 4i$ ja $w = 1 + 2i$. Laske $\frac{w}{z}$ yllä kuvatulla menetelmällä. Piirrä kuva.

22, 23, 26

VANHOISTA TEHTÄVISTÄ SOPIVIA MM.

22. Laske

(a) i^4

(b) i^5

(c) i^7

(d) i^{99}

(e) i^{97}

(f) $-i^{1017}$

23. Sievennä

(a) $i - (2 + 5i)(-1 + 2i)$

(b) $(1 - 2i)(1 + i)^3 - i(-2 + 3i)^2$

26. Jos $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 - 2i$ ja $z_3 = 1 + 2i$, niin esitä summamuodossa seuraavien laskujen tulokset

(a) $z_1 + z_2$

(b) $z_1 - z_2$

(c) $z_1 z_2$

(d) $z_1 + z_2 - 3z_3$

(e) $2(z_1 + 3z_2) - 5z_3$

(f) $z_1(z_2 + z_3)$

(g) $z_1(z_2 - 3z_3)$

37. Kompleksiluvulle $z = x + iy$ saadaan napakoordinaattiesitys $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = |z|\angle\theta$, missä $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\theta = \arctan(y/x)$. Määritä napakoordinaattiesitys luvuille

(a) $z = 3 - 4i$

Ratkaisu: $z = 5\angle -53,130^\circ$

(b) $w = 1 + 2i$

Ratkaisu: $w = \sqrt{5}\angle 63,435^\circ$

(c) $zw = 11 + 2i$

Ratkaisu: $zw = 5\sqrt{5}\angle 10,305^\circ$

(d) $w/z = -0.2 + 0.4i$

Ratkaisu: $w/z = \frac{1}{\sqrt{5}}\angle 116,57^\circ$.

Tarkista, että kulmat vastaavat piirroksissa esiintyneitä arvoja.

Kompleksiluvuille saadaan napakoordinaattiesitys

$$z = |z|\angle\theta = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = |z|e^{i\theta}.$$

38. Muunna summamuotoon $z = 6e^{i27^\circ}$. **(Koetehtävä)**

39. Muunna eksponenttimuotoon $z = 2 + 2i$.

39. Muunna eksponenttimuotoon $z = 2 + 2i$.

Toisen asteen yhtälöitä ratkaistiin kaavalla

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

aiemmalla kurssilla. Saadaan kompleksiratkaisuja, kun kirjoitetaan esim.

$$\sqrt{-16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = 4i.$$

40. Ratkaise $x^2 - 4x + 13 = 0$. **(Koetehtävä)**

Ratkaisu: $x_1 = 2 + 3i, x_2 = 2 - 3i$

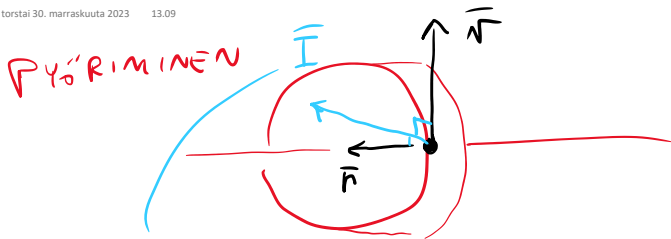
41. Ratkaise $x^2 - 6x + 10 = 0$.

Ratkaisu: $x_1 = 3 + i, x_2 = 3 - i$

42. Ratkaise $x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$.

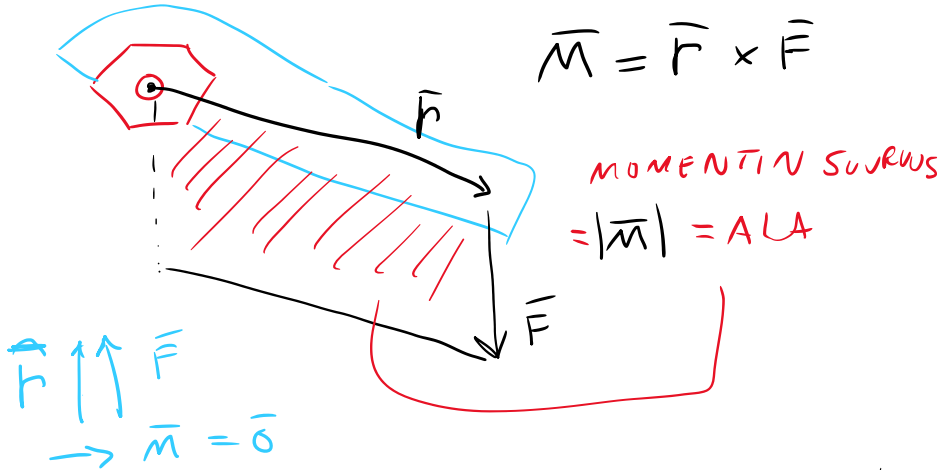
Ratkaisu: $x_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$

Kaipaanko lisää harjoitusta? Katso vanhat tehtävät Moodlesta.

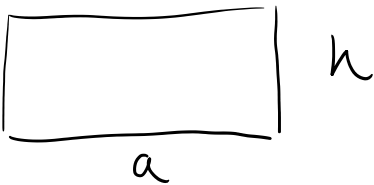


PYÖRIMISMÄÄRÄVEKTÖRI $\vec{I} = \vec{r} \times \vec{t}$

MOMENTTI



SUORAKULMI



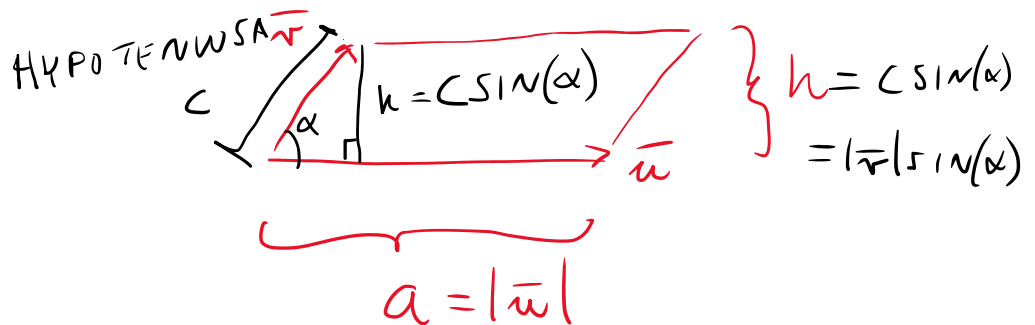
$$A = a h$$

SUUNNIKAS



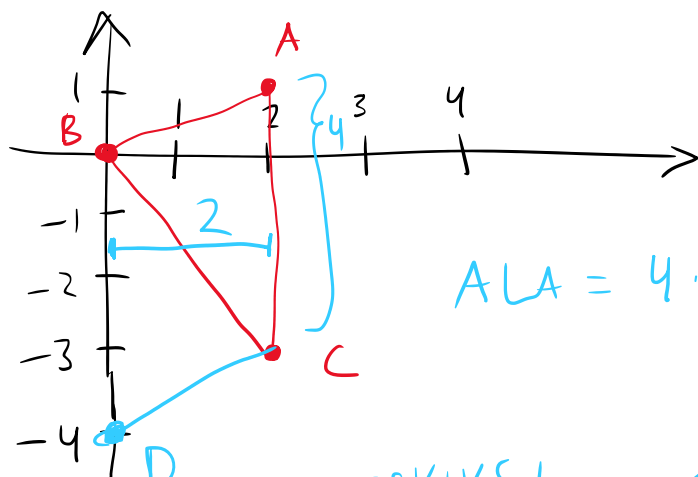
$$A = a h$$

VEKTORIT



$$|\vec{u} \times \vec{r}| = A = a h = |\vec{u}| |\vec{r}| \sin(\alpha)$$

Kuinka suuri on suunnikkaan $ABCD$ pinta-ala, kun sen kolme kärkeä ovat pisteissä $A = (2, 1)$, $B = (0, 0)$ ja $C = (2, -3)$. Voitko määrittää myös suunnikkaan neljännen kärjen D pisteen?



TAPA 2

$$\vec{u} = A - B = (2, 1, 0)$$

$$\vec{v} = C - B = (2, -3, 0)$$

LISÄTÄÄN

$$ALA = 4 \cdot 2 = 8$$

ESIMERKIKSI
TÄSSÄ

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2, 1, 0) \times (2, -3, 0) =$$

$$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 0 \cdot (-3) \\ 0 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

SIIIS $A = |\vec{u} \times \vec{v}| = |(0, 0, -8)| = 8$

VOI TULLA

$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

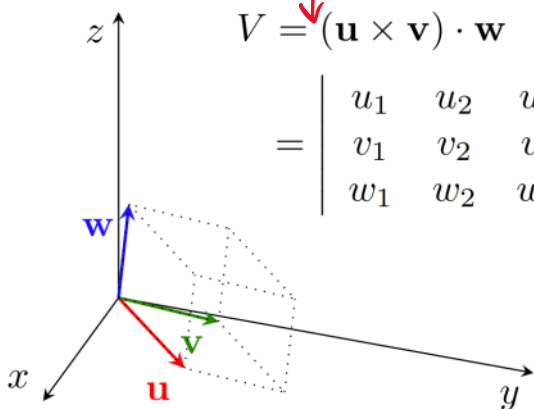
MIINUS MERKKISENÄ

$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

$$= \dots = -810$$

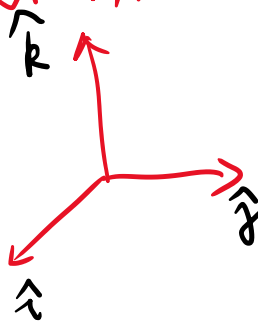
PÄÄTELLÄÄN

$$V = 810$$



$$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \cdot \hat{k}$$

KAAVAN JOHTAMINEN



$$\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k} = -(\hat{j} \times \hat{i}) \\ \hat{j} \times \hat{k} &= \hat{i} = -(\hat{k} \times \hat{j}) \\ \hat{k} \times \hat{i} &= \hat{j} = -(\hat{i} \times \hat{k}) \end{aligned}$$

PEUKU
ETU KESKI

ETU X KESKI = PEUKALO
(0 = i-hat x i-hat = j-hat x j-hat = k-hat x k-hat)

$$(u_1 \hat{i} + u_2 \hat{j} + u_3 \hat{k}) (v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k})$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \hat{i} + \dots$$

KERTAUSTA

6. Laske kompleksilukujen tulo

$$(3+4i)(1+5i)$$

OK, LASKE TAAN
NORMAALISTI
MUISTETAAN $i^2 = -1$
Ratkaisu: $-17 + 19i$ 7. Kirjoita kompleksiluku $z = 5e^{i\pi/3}$ summamuodossa $z = x + iy$. (Luvuille x ja y riittää likiarvo.)Ratkaisu: $z \approx 2.50 + 4.33i$

$$= 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

8. Etsi toisen asteen yhtälön

$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$

kompleksiset ratkaisut.

Ratkaisu: $x = 1 + i$ tai $x = 1 - i$ Yhtälö on $ax^2 + bx + c = 0$, missä $a = 1$, $b = -2$ ja $c = 2$. Ratkaisukaavalla saadaan

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4} \sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

UUSI ASIA: $\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{-1} \sqrt{4} = i \cdot 2 = 2i$
TARKISTUS $x = 1 + i$

$$x^2 - 2x + 2 = (1+i)^2 - 2(1+i) + 2$$

$$= 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot i + i^2 - 2 - 2i + 2 = 1 + 2i - 1 - 2 + 2i + 2 = 0$$

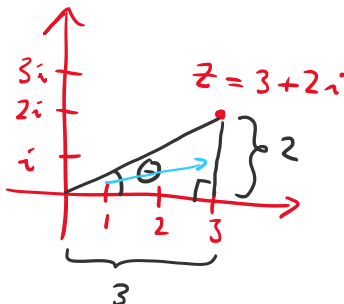
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

NAPAKOORDINAATIT

sin

cos

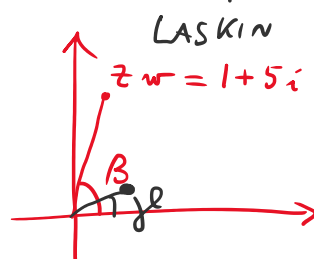
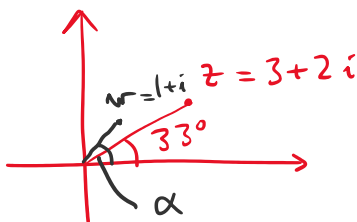
$$\tan(\theta) = \frac{\text{VASTAINEN}}{\text{VIEREINEN}} = \frac{2}{3}$$



arctan()

$$\arctan(\tan(\theta)) = \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33^\circ$$

VAIHEKULMAT

z	$33,690^\circ$
w	45°
zw	$78,690^\circ$
$\frac{w}{z}$	$11,310^\circ$

ITSEISARVO

$$\frac{w}{z} = 0,38 + 0,077i$$

KOMPLEKSILUKUJEN
TUULO

• TUUN VAIHEKULMA

z	ITSEISARVO
$ z $	3,6056
$ w $	1,4142
$ zw $	5,0990
$\frac{w}{z}$	0,3922

$$= 3,6056 \cdot 1,4142$$

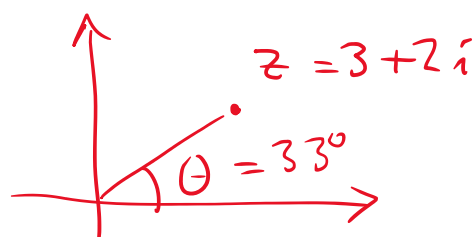
$$= \frac{1,4142}{3,6056}$$

TOULU

- TULON VAIHEKULMA ON VAIHEKULMIEN SUMMA
- TULON ITSEISARVO ON ITSEISARVOJEN TULO

HELPOIN ESITYS ASIALLE
LÖYTYY KOMPLEKSI LUKUJEN
NAPA KOORDINAATTI ESITYKSESTÄ

SAMOIN KUIN VEKTORILLA



$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

NEPERIN
LUKU

EULERIN KAAVA $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

(VOIDAAN TODISTAA ENSI KEVÄÄNÄ
DERIVAATAN AVULLA)

$$e \approx 2,7$$

KERTOLASKU NAPA KOORDINAATTIEN AVULLA

$$z = 3 + 2i = 3,60 e^{i 33^\circ}$$

$$w = 1 + i = 1,41 e^{i 45^\circ}$$

SUMMA -
MUOTO

EKS PONENTTI MUOTO

$$zw = 3,60 e^{i 33^\circ} \cdot 1,41 e^{i 45^\circ}$$

$$= (3,60 \cdot 1,41) e^{i 33^\circ} e^{i 45^\circ}$$

$$\frac{b}{a} \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a}$$

$$= \underbrace{(3,60 \cdot 1,41)}_{5,099} \underbrace{e^{i33^\circ} e^{i45^\circ}}_{= e^{i(33^\circ+45^\circ)} = e^{i78^\circ}} \quad a \cdot a = a^2$$

$$= 5,099 e^{i78^\circ}$$

$$= 5,099 (\cos(78^\circ) + i \sin(78^\circ))$$

$$= 5,099 (0,2 + 0,97 i)$$

$$\approx 1 + 5i \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{SAMA} \\ \text{LASKU KUN} \\ \text{AIEMMIN} \end{array}$$

7. Kirjoita kompleksiluku $z = 5e^{i\pi/3}$ summamuodossa $z = x + iy$. (Luvuille x ja y riittää likiarvo.)

Ratkaisu: $z \approx 2.50 + 4.33i$

RATKAISU. KÄYTTÄÄN EULERIN KAAVAA

$$e^{i \frac{\pi}{3}} = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{= 0,5} + i \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{= 0,866}$$

LASKIN

$$z = 5 e^{i \frac{\pi}{3}} = 5 (0,5 + 0,866 i)$$

$$\text{LASKIN} \quad \approx \underline{\underline{2,5 + 4,33 i}}$$

Tehtäviä

tiistai 5. joulukuuta 2023 12.20

VIIHJE. $2+2i = |z| e^{i \text{VAIHEKULMA}}$

$|z| =$
VAIHEKULMA =
(PIIRRE KUVU)

Ratkaisu:
 $2+2i$
 $= \sqrt{8} e^{i 45^\circ}$

39. Muunna eksponenttimuotoon $z = 2 + 2i$.

Toisen asteen yhtälöitä ratkaistiin kaavalla

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

aiemmalla kurssilla. Saadaan kompleksiratkaisuja, kun kirjoitetaan esim.

$$\sqrt{-16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = 4i.$$

40. Ratkaise $x^2 - 4x + 13 = 0$. (Koetehtävä)

Ratkaisu: $x_1 = 2 + 3i, x_2 = 2 - 3i$

41. Ratkaise $x^2 - 6x + 10 = 0$.

Ratkaisu: $x_1 = 3 + i, x_2 = 3 - i$

42. Ratkaise $x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$.

Ratkaisu: $x_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$

37. Kompleksiluvulle $z = x + iy$ saadaan napakoordinaattiesitys $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = |z|\angle\theta$, missä $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\theta = \arctan(y/x)$. Määritä napakoordinaattiesitys luvuille

(a) $z = 3 - 4i$

Ratkaisu: $z = 5\angle -53,130^\circ$

(b) $w = 1 + 2i$

Ratkaisu: $w = \sqrt{5}\angle 63,435^\circ$

(c) $zw = 11 + 2i$

Ratkaisu: $zw = 5\sqrt{5}\angle 10,305^\circ$

(d) $w/z = -0.2 + 0.4i$

Ratkaisu: $w/z = \frac{1}{\sqrt{5}}\angle 116,57^\circ$

Tarkista, että kulmat vastaavat piirroksissa esiintyneitä arvoja.

Kompleksiluvuille saadaan napakoordinaattiesitys

$$z = |z|\angle\theta = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = |z|e^{i\theta}.$$

38. Muunna summamuotoon $z = 6e^{i27^\circ}$. (Koetehtävä)

LISÄÄ HARJOITUSTA? KATSO VANHAT TEHTÄVÄT
ESIM. 31-35

31. Esitä kulmamuodossa

(a) $z_1 = 3 - 5i$

(b) $z_2 = -2 + 4i$

(c) $z_3 = 2 - 3i$

(d) $z_4 = -1 + 2i$

(e) $z_5 = 4 + 2i$

(f) $z_6 = -3 + 5i$

32. Laske edellisen tehtävän kompleksiluvuilla kulmamuotoa käyttäen

(a) $z_3 z_4$

(b) $\frac{z_3}{z_4}$

(c) $z_5 z_6$ d) $\frac{z_5}{z_6}$

(d) $\frac{z_6}{z_5}$

(e) $(z_5)^2 z_6$

33. Muunna summamuotoon

34. Muunna luvut eksponenttimuotoon

(a) $z = 2 - 2i$

(b) $z = -4i$

(c) $z = 3 + 3\sqrt{3}i$

(d) $z = 7$

(e) $z = -1 - i$

(f) $z = 2i$

(g) $z = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$

35. Esitä luvut summamuodossa

(a) $z = 2e^{\frac{5\pi}{4}i}$

(b) $z = e^{\pi i}$

(c) $z = 3e^{\frac{-\pi}{2}i}$

(d) $z = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$

(e) $(z_5)^2 z_6$

33. Muunna summamuotoon

(a) $3/20^\circ$

(b) $7/ - 35^\circ$

(c) $2/10^\circ + 2/ - 10^\circ$

(a) $z = -5$

(c) $z = 3e^{\frac{-\pi}{2}i}$

(d) $z = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$

(e) $z = 4e^{\frac{5\pi}{6}i}$

TÄNNÄIN

- 2. ASTEEN YHTÄLÖN KOMPLEKSISET RATKAISUT
- LASKUTOIMITUKSET
- KOMPLEKSILUVUN ESITYS KUVANA JA EKSPONENTTIMUODOSSA
- SOVELLUKSIA (10 MIN)
- LASKEAAN

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

ESIM, RATKAISE $1 \cdot x^2 - 2x + 2 = 0$

RATK. KAAVA

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

NYT $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \underline{\underline{1 \pm i}}$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \underbrace{\sqrt{-1}}_i \underbrace{\sqrt{4}}_2 = 2i$$

$$\sqrt{-1} = i \quad \parallel ()^2$$

$$-1 = i^2$$

$$\boxed{\sqrt{-1} = i}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

YHTÄLÖLLE $x^2 - 2x + 2 = 0$

YHTÄ' LÖ' LLE $x^2 - 2x + 2 = 0$

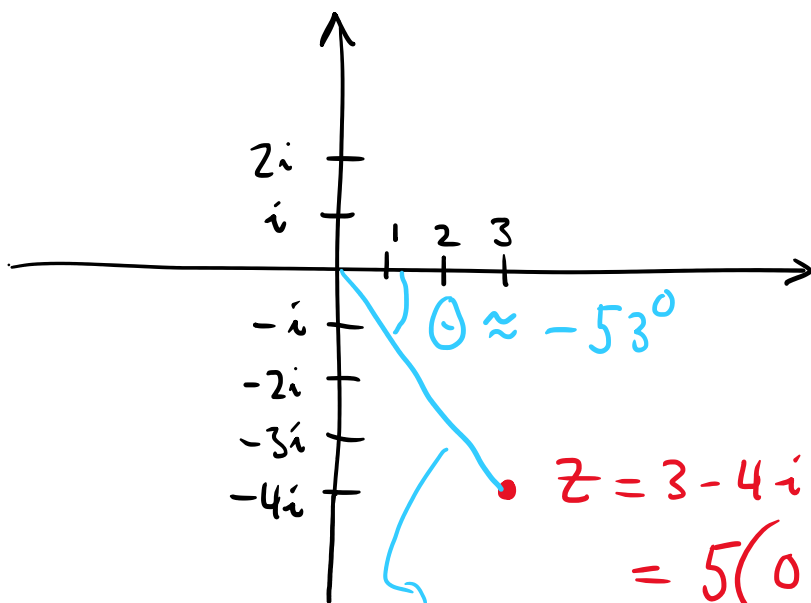
SAATTIN RATKAISUT $x = 1 + i$ JA $x = 1 - i$

TARKISTUS $x = 1 + i$

$x^2 - 2x + 2 = (1 + i)^2 - 2(1 + i) + 2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $= \cancel{1^2} + 2 \cdot 1 \cdot i + \cancel{i^2} - \cancel{2} - \cancel{2i} + \cancel{2}$
 $= 0$

KUVA KOMPLEKSI LUVVISTA



ETÄ' ISYYS
ORIGOSTA =

$\sqrt{3^2 + (-4)^2}$
 $= \sqrt{25} = 5$

(VOIDAAN
TODISTAA
SEURAAVALLA
KURSSILLA)

$z = 3 - 4i$
 $= 5(0.6 - 0.8i)$
 $= 5(\cos(-53^\circ) + i \sin(-53^\circ))$
 $= 5e^{i(-53^\circ)}$

EULERIN KAAVA

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Η γοττ?

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2})$$

$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Kompleksiluvut 2

torstai 7. joulukuuta 2023 13.50

6. Laske kompleksilukujen tulo

$$(3 + 4i)(1 + 5i)$$

Ratkaisu: $-17 + 19i$

7. Kirjoita kompleksiluku $z = 5e^{i\pi/3}$ summamuodossa $z = x + iy$. (Luvuille x ja y riittää likiarvo.)

Ratkaisu: $z \approx 2.50 + 4.33i$

8. Etsi toisen asteen yhtälön

$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$

kompleksiset ratkaisut.

Ratkaisu: $x = 1 + i$ tai $x = 1 - i$

Toisen asteen yhtälö

Toisen asteen yhtälöitä ratkaistiin kaavalla

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

aiemmalla kurssilla. Saadaan kompleksiratkaisuja, kun kirjoitetaan esim.

$$\sqrt{-16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = 4i.$$

35. Ratkaise $x^2 - 4x + 13 = 0$. **(Koetehtävä?)**

Ratkaisu: $x_1 = 2 + 3i, x_2 = 2 - 3i$

36. Ratkaise $x^2 - 6x + 10 = 0$.

Ratkaisu: $x_1 = 3 + i, x_2 = 3 - i$

37. Ratkaise $x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$.

Ratkaisu: $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$

Kompleksilukujen laskutoimitukset

Kompleksiluvuilla voi laskea kuten reaalityluilla, mutta täytyy ottaa huomioon $i^2 = -1$.

38. Olkoon $z = 3 - 4i$ ja $w = 1 + 2i$. Laske

(a) $z + w$

(b) $z - w$

(c) zw **(Koetehtävä?)**

$4 - 2i$

Ratkaisu: ~~$1 - 2i$~~

Ratkaisu: $2 - 6i$

Ratkaisu: $11 + 2i$

Kompleksilukujen jakolaskussa lavennetaan nimittäjän $z = a + ib$ liittoluvulla eli konjugaatilla $z^* = a - ib$ seuraavasti

$$\frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{(c + di)(a - bi)}{a^2 - b^2i^2} = \frac{(c + di)(a - bi)}{a^2 + b^2}.$$

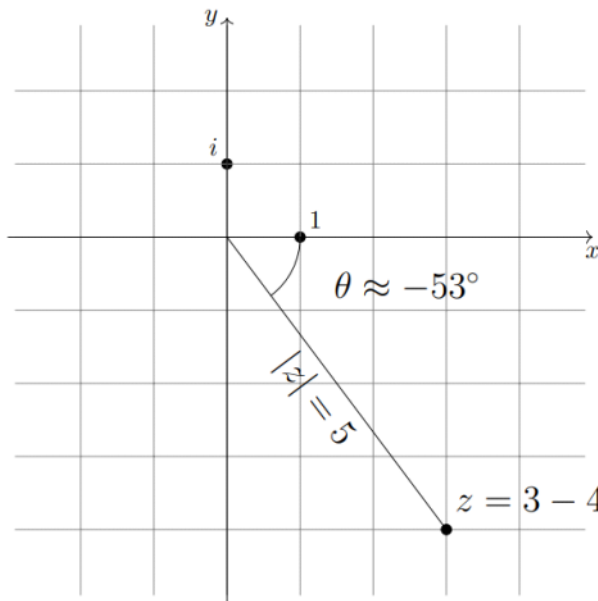
Hyöty on siinä, että nimittäjästä saatiin pois imaginaariyksiköt i ja voidaan taas laskea kuten reaalityluilla. Nimittäjään tuli

$$zz^* = a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = |z|^2$$

eli luvun z modulin eli itseisarvon $|z|$ neliö.

39. Olkoon $z = 3 - 4i$ ja $w = 1 + 2i$. Laske $\frac{w}{z}$ yllä kuvatulla menetelmällä. Piirrä kuva.

Kompleksiluvun esitystavat



$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\theta = \arctan(y/x) \approx -53^\circ$$

$$\begin{aligned} z &= 3 - 4i = 5(0,6 - 0,8i) \\ &= 5(\cos(-53^\circ) + i \sin(-53^\circ)) \\ &= 5e^{i(-53^\circ)} \end{aligned}$$

40. Piirrä kompleksiluvut ja määritä niille napakoordinaattiesitykset

(a) $z = 3 - 4i$

Ratkaisu: $z = 5 \angle -53,130^\circ$

(b) $w = 1 + 2i$

Ratkaisu: $w = \sqrt{5} \angle 63,435^\circ$

(c) $zw = 11 + 2i$

Ratkaisu: $zw = 5\sqrt{5} \angle 10,305^\circ$

(d) $w/z = -0,2 + 0,4i$

Ratkaisu: $w/z = \frac{1}{\sqrt{5}} \angle 116,57^\circ$

Kaava $\theta = \arctan(y/x)$ antaa vastauksen suoraan vain, jos $-90^\circ < \theta < 90^\circ$. Siispä tarkista, että kulmat vastaavat piirroksissa esiintyneitä arvoja.

Kompleksiluvuille saadaan napakoordinaattiesitys

$$z = |z| \angle \theta = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = |z|e^{i\theta}.$$

41. Muunna summamuotoon $z = 6e^{i27^\circ}$. (Koetehtävä?)

42. Muunna eksponenttimuotoon $z = 2 + 2i$.

Kaipaako lisää harjoitusta? Katso vanhat tehtävät Moodlesta.