

OAMK, Informaatioteknologia, Tietotekniikka / Susanna Kujanpää

OHJELMISTOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

TEHTÄVÄT

1. Tietotekniikan opiskelijoiden pituusjakauma on seuraava

<u>pituus (m)</u>	<u>opiskelijoiden lkm</u>
1.51 ... 1.53	2
1.54 ... 1.56	2
1.57 ... 1.59	5
1.60 ... 1.62	38
1.63 ... 1.65	62
1.66 ... 1.68	110
1.69 ... 1.71	126
1.72 ... 1.74	130
1.75 ... 1.77	126
1.78 ... 1.80	72
1.81 ... 1.83	42
1.84 ... 1.86	23
1.87 ... 1.89	7
1.90 ... 1.92	1

Millä todennäköisyydellä sattumanvaraisesti valittu opiskelija on pituudeltaan

a) yli 180 cm b) 163 ... 174 cm c) alle 160 cm ?

2. Opiskelijat arvioivat annetun janan pituuden. Heidän arviointivirheensä olivat seuraavat (cm):

2	3	0	5	6	1	2	4	3	1	3	2
1	0	1	1	0	2	1	1	0	5	0	2
5	3	1	1	2	0	4	3	0	0	2	1
0	3	5	4	2	0	5	3	1	6	2	4
1	1	4	7	2	0	2	1	0	4	4	3

Millä todennäköisyydellä sattumanvaraisesti valittu opiskelija arvioi kyseisen janan pituuden 1 cm tarkkuudella oikein?

3. Autotehdas teki listauksen siitä, missä vaiheessa heidän valmistamalle autolle tehtiin ensimmäinen korjaustoimenpide:

<u>km</u>	<u>ensikorjattujen autojen lkm</u>
0 - 10 000	50
10 001 - 20 000	93
20 001 - 30 000	293
30 001 - 40 000	391
40 001 - 50 000	183
50 001 -	40

Millä todennäköisyydellä tehtaan auto joutuu ensimmäisen kerran korjattavaksi, kun sillä on ajettu

- a) enintään 20 000 km
- b) 20 001 - 30 000 km
- c) 30 001 - 40 000 km
- d) yli 40 000 km

Laske kohtien a - d todennäköisyyksien summa.

- e) Millä todennäköisyydellä tehtaan auto, jolle ensimmäistä korjaustoimenpidettä ei ole tarvinnut tehdä ensimmäisen 30 000 km aikana, joutuu ensikorjaukseen seuraavan 10 000 km aikana ?

4. Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä summa on

- a) 1 b) 5 c) 11 d) suurempi kuin 7 ?

5. Heitetään kolikkoa kolme kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan

- a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0 kruunua ?

6. Millä todennäköisyydellä numeroista 1, 2, 3, 4 ja 5 satunnaisesti muodostettu kaksinumeroinen luku on jaollinen 2:lla tai 5:lla, kun sama numero voi esiintyä kahdesti ?

7. Millä todennäköisyydellä kahta noppaa heittämällä pistesummaksi saadaan 10, 11 tai 12 ?

8. Opiskelijoista saa arvosanan 5 matematiikan kokeissa 15% , fysiikan kokeissa 12% ja molemmissa 7%. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu opiskelija saa arvosanan 5 ainakin toisessa näistä kokeissa ?

9. Suojatien jalankulkuvalot on säädetty siten, että tien ylittäjä joutuu odottamaan valojen vaihtamista max 40 s ja vihreä valo palaa 20 s. Millä todennäköisyydellä suojatien ylittäjä joutuu odottamaan valojen vaihtumista max 30 s ?

10. Mikä on todennäköisyys nostaa kaksi ässää korttipakasta ?

11. Laatikossa on 6 punaista palloa ja 4 mustaa palloa. Nostetaan kaksi palloa palauttamatta niitä laatikkoon. Millä todennäköisyydellä molemmat pallot ovat mustia ?

12. Heitetään noppaa neljä kertaa. Laske todennäköisyys, että saadaan

- a) 2 kakkosta b) 4 parillista lukua c) ainakin 1 kuutonen.

13. Tehtaalla on 100 piirilevyä laatikossa ja kolme niistä on viallisia. Otetaan satunnaisesti kaksi piirilevyä laatikosta. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi piirilevyistä on ehjä ?

14. Laske todennäköisyys, että heitettäessä kolikkoa kaksi kertaa saadaan

- a) kaksi kruunua b) ainakin yksi klaava.

15. Kummalla on parempi todennäköisyys: saadaan pariton tai saadaan enintään 4 nopanheitossa?

16. Lentokone oli ylibuukattu. Viidestä jonottajasta valitaan arvalla 2, jotka pääsevät koneeseen. Henkilöt Ari, Birgitta, Cecilia, Daniel ja Emma ovat jonossa. Laske todennäköisyydet
- Ari ja Emma pääsevät koneeseen.
 - yksi mies ja yksi nainen pääsee koneeseen.
 - yksikään mies ei pääse koneeseen.
17. Arvonnassa on neljä lipuketta. Lipukkeissa on numerot 1, 2, 3 ja 4. Nostetaan yksi lipuke, palautetaan se takaisin laatikkoon, ja nostetaan toinen lipuke. Kannattaako lyödä vetoa sen puolesta, että arvonnassa saadaan ainakin yksi ykkönen?
18. Sää tiedotus ilmoitti sadekuurojen mahdollisuudeksi lauantaina 30% ja sunnuntaina 60%. Millä todennäköisyydellä viikonloppuna sataa vettä?
19. Montako erilaista istumajärjestystä luokan 32 opiskelijasta saadaan?
20. a) 10 henkilöä kättelevät kaikki toisiaan. Montako kättelyä suoritetaan?
b) 8 joukkuetta pelaavat pareittain. Montako ottelua pelataan?
21. Mielipidekyselyssä oli 6 kysymystä ja niissä jokaisessa oli 5 erilaista vastausmahdollisuutta. Paljonko vastausmahdollisuuksia oli kaikkiaan (joka kysymykseen piti vastata) ?
22. Jonossa on 3 poikaa ja 4 tyttöä niin, että tytöt ovat jonon alussa. Kuinka monta jonoa heistä voidaan muodostaa ?
23. Opiskelijan tulee vastata 10 kysymyksestä kahdeksaan.
- Montako erilaista vastausyhdistelmää hänellä on ?
 - Entä jos näiden 8 vastauksen joukossa tulee olla vastaukset 3 ensimmäiseen kysymykseen ?
24. Montako erilaista ryhmää, jossa on 3 miestä ja 2 naista voidaan valita 7 miehestä ja 5 naisesta ?
25. Salasana koostuu viidestä eri merkistä. Erilaisia merkkejä on käytössä 115.
- Kuinka monta erilaista salasanaa voidaan muodostaa, kun merkkien järjestyksellä on väliä ja yhtä merkkiä saa käyttää vain kerran ?
 - Jos yrittäisit arvata 5-merkkisen salasanan ja jokaiseen arvaukseen kuluisi 10s, kauanko kestäisi käydä kaikki mahdolliset salasanat läpi ?
26. a) Kuinka monessa eri järjestyksessä korttipakan kortit voivat olla ?
b) Laske todennäköisyys sille, että nostettaessa pakasta 5 korttia saadaan 4 ässää.
c) Laske todennäköisyys sille, että nostettaessa pakasta 5 korttia saadaan 3 pataa ja 2 ruutua.
27. Pääsykokeeseen on ehdolla 20 matematiikan ja 15 fysiikan tehtävää. Tehtävät arvotaan kokeeseen eikä niiden järjestyksellä ole väliä. Millä todennäköisyydellä arvotuista kuudesta tehtävästä
- kaikki ovat matematiikan tehtäviä
 - 3 on matematiikan ja 3 fysiikan tehtävää ?
28. Noppaa heitetään kymmenen kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan tasan 3 kuutosta ?

29. Jalkapallon vakioveikkauksessa veikataan 13 riviä. Jokaisella rivillä on 3 vaihtoehtoa (1, x, 2). Millä todennäköisyydellä vakioveikkauksessa saadaan 12 oikein ?
30. Englannin luetunymmärtämisen kokeessa on 40 kysymystä. Jokaisessa kysymyksessä on 4 vaihtoehtoa. Laske todennäköisyydet, kun opiskelija arvaa kaikki vastaukset:
a) kaikki oikein b) tasan 5 oikein c) vähintään 5 oikein
31. Onnenpyörä on jaettu 8 yhtäsuureen sektoriin, joista yksi on jokerisektori. Olkoon x satunnaismuuttuja, joka ilmoittaa jokerien määrän kolmessa pyörityksessä. Määritä jakauma ja laske odotusarvo.
32. Koripalloilijan onnistumistodennäköisyys saada kori on 0,70. Hän saa kaksi vapaaheittoa peräkkäin. Mikä on onnistuneiden heittojen lukumäärän odotusarvo ?
33. Olkoon $x \sim \text{Bin}(n, p)$. Määritä n ja p , kun $\mu = 2$ ja $\sigma^2 = \frac{4}{3}$.
34. Heitetään noppaa 4 kertaa. Tee jakauma kuutosten lukumäärästä.
35. Tuotantolinjalla tarkastetaan tuotteiden tasoa. Todennäköisyys, että tuote ei ole hyväksyttävä on 0.20. Otetaan kaksi sattumanvaraista tuotetta. Muodosta jakauma ja laske odotusarvo sekä keskihajonta.
36. Laatikossa on 3 mustaa ja 3 valkoista palloa. Nostetaan laatikosta kolme palloa. Laske saatujen valkoisten pallojen lukumäärän odotusarvo.
37. Kilpailun palkintona on rahasumma, joka määräytyy arpomalla. Palkinnon jakajalla on 5 kirjekuorta, joissa on rahaa 10€, 20€, 30€, 40€ ja 50€. Voittaja saa valita kaksi kirjekuorta. Satunnaismuuttuja x ilmoittaa yhteensä saadun voittosumman. Laske satunnaismuuttujan odotusarvo.
38. Arpajaisissa on 1000 arpaa ja niissä on voittoja seuraavasti 1 kpl 100€, 10 kpl 50€ ja 15 kpl 20€. Yksi arpa maksaa 1 €. Laske nettovoiton odotusarvo.
39. Heitetään kahta kolikkoa kerran. Jos saa yhden kruunan, niin voittaa 20€. Jos saa kaksi kruunaa, niin voittaa 40€. Jos saa kaksi klaavaa, niin häviää 100€. Laske voiton odotusarvo.
40. Lompakossa on 6 kpl 1€, 4 kpl 2€ ja 2 kpl 50 sentin kolikoita. Otetaan lompakosta yksi kolikko. Muodosta jakauma.
41. Opiskelijat heittivät kuutta kolikkoa 90 kertaa. Taulukosta voidaan nähdä saatujen kruunujen lukumäärä eri heittokerroilla:

0	2	3	2	4	3	4	3	3	4	1	4	3	4	5	3	4	4	4	4	3	2	1
4	2	3	4	2	5	3	4	2	4	2	1	2	4	2	1	4	3	2	2	1	5	2
3	1	5	3	3	3	1	3	4	2	3	4	1	3	5	5	3	2	5	3	2	3	4
2	3	3	3	2	3	4	5	5	0	5	2	3	3	4	3	0	4	1	2	4		

Muodosta aineiston jakauma.

42. Todennäköisyys, että levyohjain vikaantuu viikon aikana on 0.007. Tietokoneen palveluyritys ylläpitää 900 levyohjainta. Laske Poisson-jakauman avulla todennäköisyys, että
- a) 7 b) enemmän kuin 3 levyohjainta vikaantuu viikossa.
43. Jos keskimäärin kaksi autoa saapuu tiettyyn parkkipaikkaan minuutissa, millä tod.näk. minkä tahansa annetun minuutin aikana 4 tai useampi auto saapuu parkkipaikkalle ?
44. Koululla on paljon tietokoneita. Yhden kuukauden aikana tyypillisesti yksi koneista menee rikki. Mikä on todennäköisyys, että vähemmän kuin kaksi tietokonetta menee rikki ?
45. Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ noudattaa normaalijakaumaa. Laske todennäköisyydet
- a) $P(\underline{z} \leq 0.25)$ b) $P(1.2 \leq \underline{z} \leq 2.1)$ c) $P(-1 \leq \underline{z} \leq 1.5)$
46. Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ noudattaa normaalijakaumaa. Odotusarvo on 8 ja keskihajonta 1.7. Laske todennäköisyys, että $7 \leq \underline{x} \leq 12.2$.
47. Kännykän akkuja valmistava yritys on todennut, että akkujen elinikä vuosina noudattaa normaalijakaumaa $N(3; 1.2)$. Yksi valmistuserä on 7000 kpl. Kuinka monen akun voidaan olettaa toimivan viiden vuoden kuluttua ?
48. Miesten pituusjakauma on normaali ja odotusarvo on 175 cm ja keskihajonta on 8 cm. Kuinka monta prosenttia miehistä on yli 2 m ?
49. Tuotteiden paino noudattaa normaalijakaumaa $N(80 \text{ kg}; 4 \text{ kg})$.
- a) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu tuote painaa 77 ... 80 kg?
b) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu tuote painaa yli 80 kg?
50. Olkoon X normaali, jonka odotusarvo on 5 ja varianssi 0.04. Määritä vastaava x , jolle on annettu todennäköisyydet
- a) $P(X \leq x) = 95\%$ b) $P(X > x) = 1\%$
51. Vastuksen resistanssi noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 3Ω ja keskihajonta on 0.1Ω . Laske todennäköisyys, että vastuksen resistanssi on
- a) $2.9 \dots 3.05 \Omega$ b) enemmän kuin 2.95Ω c) vähemmän kuin 2.83Ω .
52. Määritä 99% luottamusväli keskiarvolle, kun muuttujan jakauma on likimain normaali ja keskihajonta on 2,5 käyttämällä otosta: 30,8; 30,0; 29,9; 30,1; 31,7; 34,0.
53. Laske 95% luottamusväli keskiarvolle, kun muuttujan jakauma on likimain normaali. Tiedetään, että odotusarvo on 74,81 ja varianssi on 16, kun otoskoko on 200.
54. Kannettavan tietokoneen keskipainon tulisi olla vähintään 2,0 kg. Otostutkimus antaa seuraavat painot: 8 kpl 1,90 kg, 10 kpl 1,95 kg, 12 kpl 1,98 kg ja 4 kpl 2,05 kg. Kuinka paljon vähintään tuotteet ovat tämän otoksen perusteella alipainoisia, jos käytetään 95% varmuutta ?

55. Matkapuhelimen keskipainoksi ilmoitettiin 0.700kg. Tutkitusta 10 puhelimesta 6 painoi 692g ja 4 painoi 701g. Onko ilmoitettu keskipaino hyväksyttyjen rajojen välissä, jos käytetään 99% varmuutta ?
56. Yritys kirjasi ylös IT-palvelujen odotusajan (min) ja $X \sim N(\mu, 25)$:
- | | | | | | | | | | |
|------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|------|--|
| 97 | 101,5 | 102,1 | 103,9 | 93,4 | 103,3 | 104,1 | 98,6 | 97,3 | |
| 96,2 | 107,7 | 104,8 | 98,5 | 99,2 | 93,8 | 100,3 | 103,7 | 96,4 | |
- Laske otoksen perusteella X :n odotusarvon 95%, 99% ja 99.9% luottamusvälit.
57. Tehtiin mittaukset Manilla köyden vetolujuudesta ($n = 16$). Näytteen keskiarvo oli 4482kg ja keskihajonta oli 115kg. Oletetaan, että vetolujuus on normaali sattumanvarainen muuttuja. Testaa hypoteesia $\mu_0 = 4500$ kg vaihtoehtoiseen arvoon $\mu_1 = 4400$ kg verrattuna.
58. Olkoon $X \sim N(\mu, 60)$. Testaa hypoteesia $\mu_0 = 120$ annetulla otoksella:
- | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 115 | 125 | 102 | 129 | 121 | 119 | 120 | 120 | 126 | 120 |
| 124 | 118 | 116 | 132 | 114 | 108 | 127 | 131 | 130 | 181 |
59. Olkoon $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Testaa hypoteesia $\mu_0 = 55$ merkitsevyystasolla 5% otokselle:
- | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 53,08 | 56,02 | 57,32 | 51,76 | 57,07 | 59,08 | 59,00 | 52,31 | 54,10 | 55,78 |
| 54,91 | 60,50 | 56,81 | 56,72 | 58,13 | 58,31 | 58,85 | 54,92 | 60,69 | 58,70 |
60. Sähköjännitteen mittaaminen samanaikaisesti kahdella erityyppisellä jännitemittarilla antaa tulokseksi (Volteina) : 0,4; -0,6; 0,2; 0,0; 1,0; 1,4; 0,4; 1,6 .
Voimmeko olettaa, että 5% merkitsevyystasolla ei ole merkitystä kahden eri tyyppisen mittarin kalibroinnilla ?
61. Oletetaan normaalijautuneeksi ja tiedetään varianssin olevan 9. Testaa hypoteesia $\mu = 60.0$ verrattuna vaihtoehtoiseen arvoon $\mu = 57.0$ käyttämällä näytekokoa 20, keskiarvoa 58.05 ja valitsemalla merkitsevyystasoksi $\alpha = 5\%$.

VASTAUKSET:

1. a) 0,098 b) 0,57 c) 0,012
2. 0,43
3. a) 0,14 b) 0,28 c) 0,37 d) 0,21 e) 0,64
4. a) 0 b) 0,11 c) 0,056 d) 0,42
5. a) 0 b) 1/8 c) 3/8 d) 3/8 e) 1/8
6. 0,6
7. 0,17
8. 0,2
9. 0,83
10. 0,0045
11. 0,13
12. a) 0,12 b) 0,0625 c) 0,52

13. 0,999

14. a) 0,25 b) 0,75

15. todennäköisempää on saada korkeintaan 4

16. a) 0,1 b) 0,6 c) 0,3

17. ei kannata

18. 0,72

19. $2,63 \cdot 10^{35}$

20. a) 45 b) 28

21. 15 625

22. 144

23. a) 45 b) 21

24. 350

25. a) $18 \cdot 10^9$ b) 5840 vuotta

26. a) $8,1 \cdot 10^{67}$ b) 0,000018 c) 0,000858

27. a) 0,024 b) 0,016

28. 0,155

29. 0,0000163

30. a) $8,27 \cdot 10^{-25}$ b) 0,027 c) 0,984

31. $\mu = 0,4$

32. $\mu = 1,4$

33. $n = 6$ ja $p = 1/3$

35. $\mu = 1,6$ ja $\sigma = 0,57$

36. $\mu = 1,5$

37. $\mu = 60\text{€}$

38. $\mu = -0,1\text{€}$

39. $\mu = -5\text{€}$

42. a) 0,14 b) 0,87

43. 0,14

44. 0,74

45. a) 0,5987 b) 0,0972 c) 0,7745

46. 0,7156

47. 330

48. 0,001

49. a) 0,27 b) 0,5

50. a) 5,328 b) 5,466

51. a) 0,5328 b) 0,6915 c) 0,0446

52. $28,45 \leq \mu \leq 33,71$

53. $74,25 \leq \mu \leq 75,36$

54. alipainioisia vähintään 24 g

55. $690,8 \leq \mu \leq 700,4$ g

56. a) $88,6 \leq \mu \leq 111,7$

b) $84,9 \leq \mu \leq 115,3$

c) $80,7 \leq \mu \leq$

119,5

57. hypoteesi μ_0 hyväksytään kaikilla merkitsevyystasoilla ja

hypoteesia μ_1 ei hyväksytä jos merkitsevyystaso on 5% tai 1%

58. hyväksytään kaikilla merkitsevyystasoilla

59. hypoteesia ei voi hyväksyä

60. hyväksytään eli kalibroinnilla ei ole merkitystä

61. hypoteesi $\mu = 60$ hylätään ja hypoteesi $\mu = 57$ hyväksytään