3.13 Lebesguen integraali, $f \geq 0$

Lause 3.14. *Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen ja $f \geq 0$. Tällöin $\exists$ nouseva jono 1-kertaisia funktioita $f_j \in Y$, $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$, s.e. $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Tod. Määritellään $f_j\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ seuraavasti: Jaetaan $[0, j)$ erillisiin puoliavoimiin väleihin $I_1, \ldots, I_k$, joiden pituus on $1/2^j$, t.s.

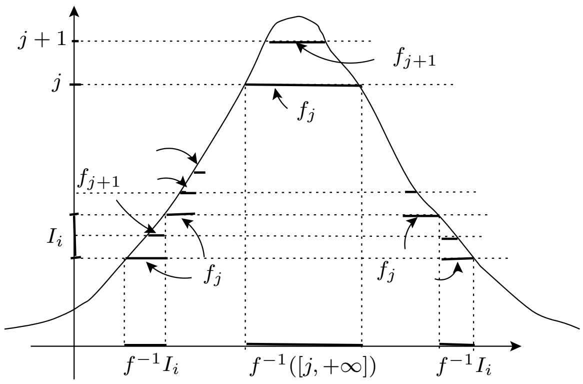
$$I_i = [(i-1)2^{-j}, i2^{-j}), \quad i = 1, \ldots, k = j2^j.$$

Määritellään

$$f_j(x) = \begin{cases} (i-1)2^{-j}, & \text{kun } x \in f^{-1}I_i, \quad (\text{eli } (i-1)2^{-j} \leq f(x) < i2^{-j}) \\ j, & \text{kun } x \in f^{-1}[j, +\infty] \quad (\text{eli } f(x) \geq j). \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ mitallinen } \Rightarrow\ f^{-1}(I_i) \text{ mitallinen ja} \\ f^{-1}[j, +\infty] \text{ mitallinen.} \\ \\ f_j \geq 0, \text{ saa vain äärellisen monta arvoa} \end{array}\right\} \Rightarrow\ f_j \in Y,\ j = 1, 2, \ldots$$

Konstruktio $\Rightarrow$ $f_j \leq f_{j+1}$ (katso kuva).



Väite: $f_j(x) \to f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(a): $f(x) < +\infty \ \Rightarrow\ \exists j_0 > f(x)$. Kun $j \geq j_0$, niin

$$\begin{gathered} (i-1)2^{-j} \leq f(x) < i2^{-j} \text{ jollakin } i \in \{1, \ldots, j2^j\} \\ \Rightarrow\ f_j(x) = (i-1)2^{-j} \leq f(x) < i2^{-j} = f_j(x) + 2^{-j} \ \Rightarrow\ f(x) - 2^{-j} < f_j(x) \leq f(x) \\ \Rightarrow\ \lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x). \end{gathered}$$

(b): $f(x) = +\infty \ \Rightarrow\ f_j(x) = j\ \forall j \ \Rightarrow\ f_j(x) \to +\infty = f(x)$. □

Määritelmä 3.15. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen ja $f \geq 0$. Silloin f:n *(Lebesguen) integraali* yli $\mathbb{R}^n$:n on

$$\int f = \sup\{I(\varphi)\colon \varphi \in Y,\ \varphi \leq f\}.$$

Jos $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, niin f:n integraali yli E:n on

$$\int_E f = \int f\chi_E. \tag{3.16}$$