1

DEMOT RIKU LAAKKONEN PE 10 – 12 M 305 (6 KPL)

LUENNOT MAANANTAI 10 – 12 M 304
KESKIVIIKKO 10 – 12 M 304

MATERIAALIT $\underbrace{\text{INTEGRAALI.COM/MIINT/}}_{\text{PIENELLÄ}}$

KURSSIARVOSTELU LOPPUKOE
+ DEMOT 10%

(b-OSA ALKAA MAALISKUUSSA)

SOVELLUKSIA:

- TODENNÄKÖISYYSLASKENTA:
  KOLMOGOROV 1933
- ANALYYSI (LEBESGUE-INTEGRAALI)
- FOURIER-ANALYYSI

Esim. HEITETÄÄN NOPPAA

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Sigma = \mathcal{P}(X) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \dots, \{1,2\}, \{1,3\}, \dots \}$

$m(\{3,4,5,6\}) = \frac{4}{6} =$ TN "SAADAAN VÄHINTÄÄN 3"

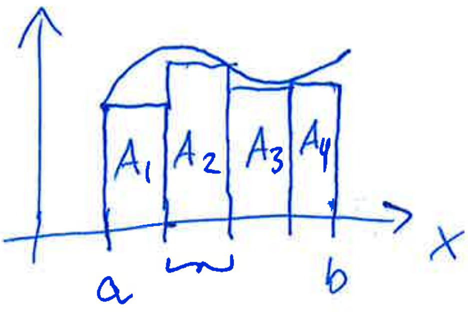
(X, Σ, m) $\quad m : \Sigma \to [0,1]$

"MITALLISET JOUKOT"

SIGMA-ALGEBRA

TODENNÄKÖISYYSAVARUUS $\quad m(X) = 1,$

RIEMANNIN INTEGRAALI



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} (A_1 + \dots + A_n)$$

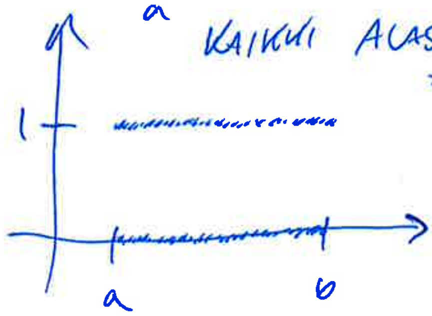
$$\frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

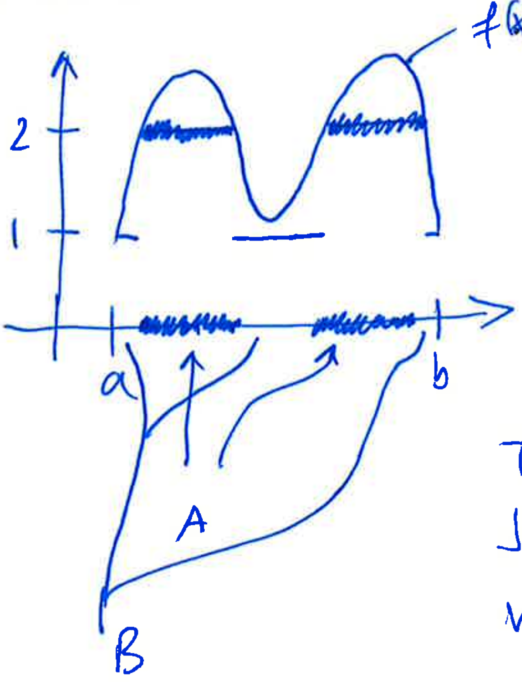
ONGELMIA :

$$f(x) = \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

KAIKKI ALASUMMAT $= 0$



LEBESGUE-INTEGRAALI



$$y \leq f$$

$$\int_a^b y(x)\,dx = 2 \cdot m(A) + 1 \cdot m(B)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{y \leq f} \int_a^b y(x)\,dx}$$

TÄSSÄ ON SE ETU, ETTÄ JOUKOT A JA B ~~####~~ VOIVAT OLLA MONIMUTKAISIA

$$\int_0^1 \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\,dx = 0 \cdot \underbrace{m([0,1] \cap \mathbb{Q})}_{=0} + 1 \cdot \underbrace{m([0,1] \cap \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}_{=1}$$

$$= 1$$

FOURIER-ANALYYSI

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \underbrace{\cos(b^n \pi x)}$$

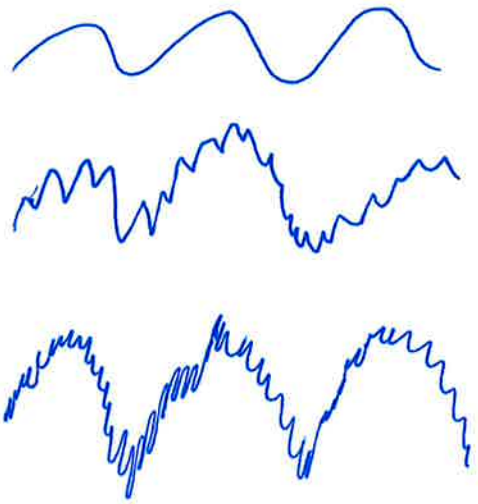
AMPLITUDI $\to 0$

HEILUU VOIMAKKAASTI

$0 < a < 1$

$b = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}$

$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$



$\sum_5$

$\sum_{n=0}^{5}$

$f(x)$

$$\lim_{N \to \infty} \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} (\ ) \right| dx = 0$$

JATKUVA

EI-MISSÄÄN DERIVOITUVA

SUPPENEMINEN?

TAVOITTEENA m_n S.E.

1) $m_n(E)$ ON HYVIN MÄÄRITELTY $\forall E \subset \mathbb{R}^n$

2) JOS $J = [a, b]$, NIIN

$$m_1(J) = b - a$$

JOS $A = [a, b] \times [c, d]$, NIIN

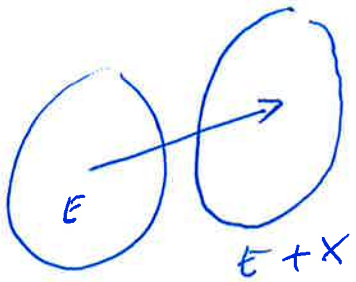
$$m_2(A) = (b-a)(d-c)$$

3) ADDITIIVISUUS: JOS $A \cap B = \emptyset$, NIIN $m_n(A \cup B) = m_n(A) + m_n(B)$

4) SIIRTOINVARIANSSI: JOS $E \subset \mathbb{R}^n$

$$m_n(E + x) = m_n(E),$$ MISSÄ

$$E + x = \{x + y : y \in E\}$$



OSOITTAUTUU, ETTÄ KAIKKIA EHTOJA 1–4 EI VOIDA TOTEUTTAA SAMANAIKAISESTI. LUOVUTAAN EHDOSTA 1.

MERKINTÖJÄ OLK. $V_n \subset \mathbb{R}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(V_n), $(V_n)_{n=1}^{\infty}$, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$

JA $V_1, V_2, \ldots$ TARKOITTAVAT JOUKKOJEN **JONOJA**.

JOUKKOJEN $A, B \subset \mathbb{R}^n$ **EROTUS**

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$

JOUKON **KOMPLEMENTTI** ON

$$B^c = \overline{B} = X \setminus B.$$

INDEKSOITU JOUKKOPERHE

ESIM. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ JA $X = \{1, 2, 3\}$

$$V_1 = \{1\}$$
$$V_2 = \{1, 2\}$$
$$V_3 = \emptyset$$

$$F = \{V_1, V_2, V_3\} = \{\{1\}, \{1,2\}, \emptyset\}$$

$$\bigcup_{A \in F} A = \{1, 2\} \quad \text{JA} \quad \bigcap_{A \in F} A = \emptyset.$$

YLINUMEROITUVA TAPAUS

OLK. $\mathcal{A} = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$,

JA $V_\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$,

NYT $\mathcal{F} = \{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ JA

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

MERK. $V_0 = \{0\}$, JOLLOIN

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A} \cup \{0\}} V_\alpha = \mathbb{R}$$

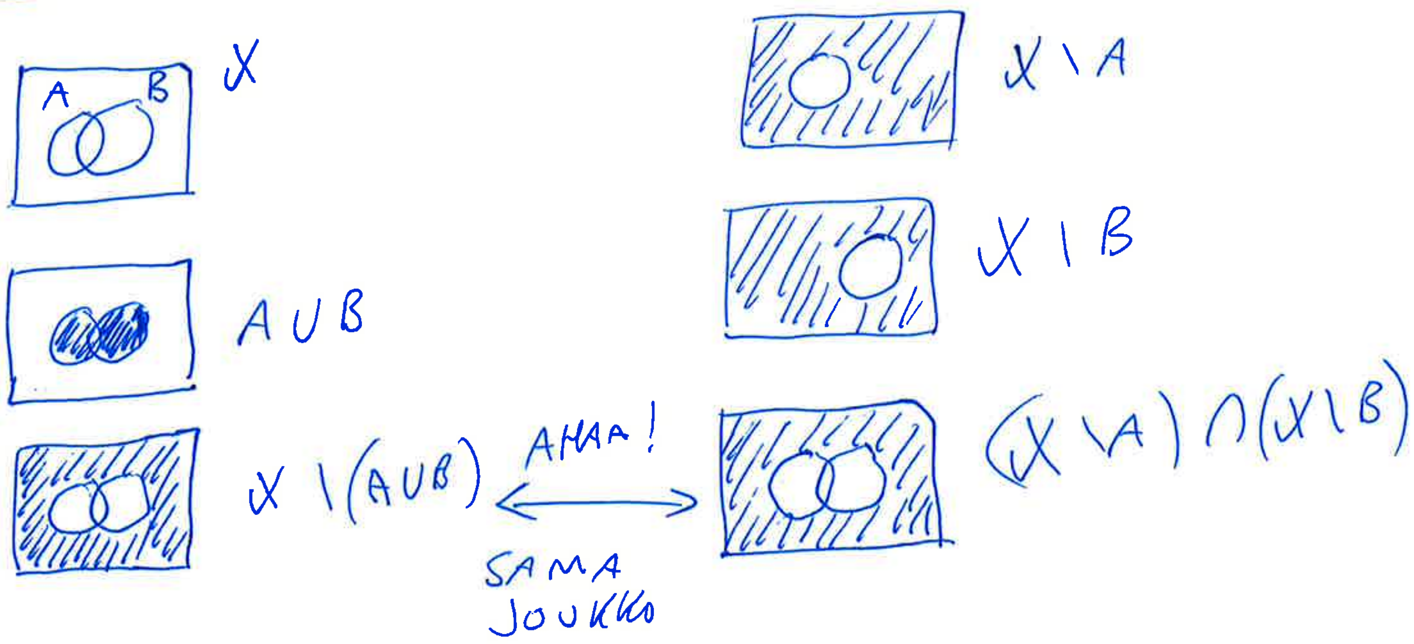
LEMMA 1.1.1 OSOITETAAN, ETTÄ

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \setminus V_\alpha)$$

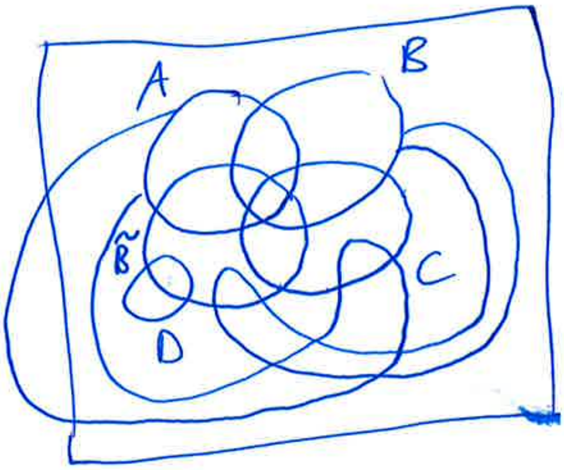
$$\boxed{A = B \iff A \subset B \text{ JA } A \supset B}$$

$x \in A \Rightarrow x \in B$

TAPAUS $\# \mathcal{A} = 2$



ENTÄ $\mathcal{A} = \#4$?



- HANKALA
- $A \cap C \setminus (B \cup D)$ PUUTTUU KUVASTA

TOD ~~(1)~~ OSOITETAAN

$$\mathcal{X} \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \subset \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (\mathcal{X} \setminus V_\alpha), \quad (1)$$

RIITTÄÄ OSOITTAA, ETTÄ JOS

$$x \in \mathcal{X} \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$$

NIIN

$$x \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (\mathcal{X} \setminus V_\alpha).$$

OLKOON SIIS $x \in \mathcal{X} \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$ MV.

$$\Rightarrow x \notin V_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow x \in \mathcal{X} \setminus V_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in V_\alpha} (\mathcal{X} \setminus V_\alpha).$$

OSOITETAAN VIELÄ, ETTÄ: (8

$$\bigcap_{\alpha \in A} (X \setminus V_\alpha) \subset X \setminus \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha. \quad (2)$$

OLKOON $x \in \bigcap_{\alpha \in A} (X \setminus V_\alpha)$ MV.

$\Leftrightarrow \quad x \in X \setminus V_\alpha \quad \forall \alpha \in A$

$\Leftrightarrow \quad x \notin V_\alpha \quad \forall \alpha \in A$

$\Leftrightarrow \quad x \notin \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$

$\Leftrightarrow \quad x \in X \setminus \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha.$

INKLUUSIOT (1) & (2) $\Rightarrow$ VÄITE. $\square$

JOUKKOPERHEEN YHDISTEEN JA LEIKKAUKSEN KUVAT JA ALKUKUVAT

OLKOOT X JA Y EPÄTYHJIÄ JOUKKOJA.

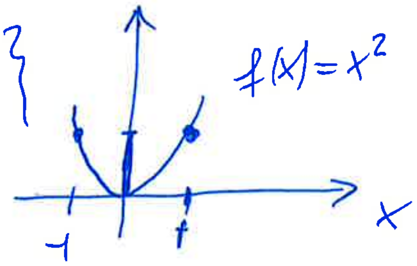
OLK. $f : X \to Y$.

KUVAUS. JOUKON $A \subset X$ KUVA (KUVAUKSESSA f) ON

$$f(A) = \{ f(x) : x \in A \} \subset Y.$$

JOUKON $B \subset Y$ ALKUKUVA (KUV. f) ON

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X : f(x) \in B \}$$



$$f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$$

LAUSE 1.1.2 OLK. $f : X \to Y$. KUVAUS, $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ X:n JOUKKOPERHE JA $\{W_\beta : \beta \in B\}$ Y:n JOUKKOPERHE.

TÄLLÖIN

(i) $$f\Big(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} f(V_\alpha)$$

(ii) $$f^{-1}\Big(\bigcup_{\beta \in B} W_\beta\Big) = \bigcup_{\beta \in B} f^{-1}(W_\beta)$$

(iii) $$f^{-1}\Big(\bigcap_{\beta \in B} W_\beta\Big) = \bigcap_{\beta \in B} f^{-1}(W_\beta)$$

LAUSEEN 1.1.2 TOD

i) $y \in f\left(\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha\right)$

$\Leftrightarrow$ $y = f(x)$ JA $x \in \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$

$\Leftrightarrow$ $y = f(x)$ JA $x \in V_\alpha$ JOLLEKIN $\alpha \in A$

$\Leftrightarrow$ $y \in f(V_\alpha)$ JOLLEKIN $\alpha \in A$

$\Leftrightarrow$ $y \in \bigcup_{\alpha \in A} f(V_\alpha)$. $\square$

PÄTEEKÖ

$$f\left(\bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in A} f(V_\alpha) \quad ?$$