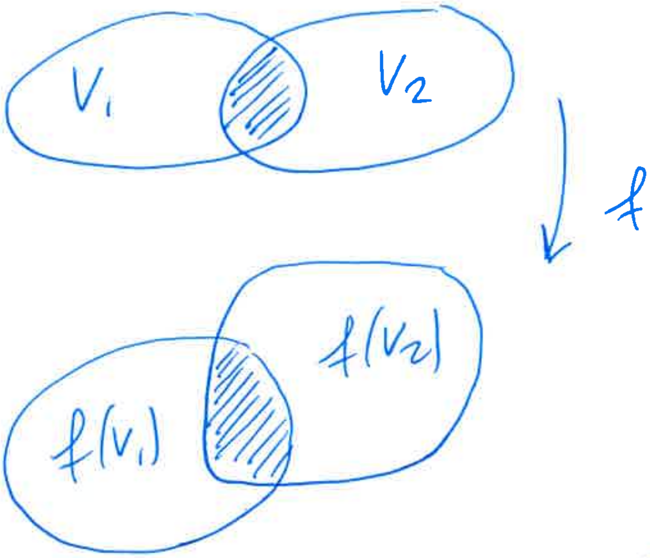
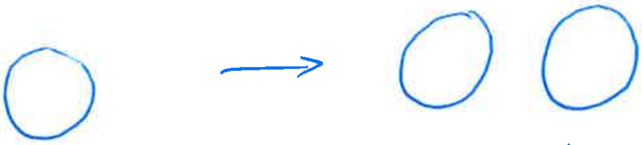
$$f(V_1 \cap V_2) \subseteq f(V_1) \cap f(V_2)$$



BANACH-TARSKI PARADOKSI

2 KPL SAMANKOKOISIA



SAMAAN TAPAAN KEMIASSA, JOS

$$\begin{array}{rl} & 500 \text{ ml VETTÄ} \\ + & 500 \text{ ml ETANOLIA} \\ \hline & 870 \text{ ml SEKOITUSTA} \end{array}$$

("MOLEKYYLIT MENEVÄT LIMITTÄIN")

<u>ESIM.</u> $\quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

VOIDAAN OSOITTAA $\quad x_n \le x_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x_n \le x_m, \quad n \le m$

ELI (x_n) ON KASVAVA JONO

VOIDAAN OSOITTAA $\quad 1 \le x_n \le 3, \quad n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n \in \mathbb{R}$ ON OLEMASSA JA

$\lim_{n \to \infty} x_n \in [1, 3]$

ITSE ASIASSA

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\in \mathbb{Q}} = \underset{\notin \mathbb{Q}}{e} = 2,7\ \underline{1828}\ \underline{1828}\ 45\ \underset{\uparrow \atop 2\cdot 45}{90}\ 45$$

ESIM.

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$B = \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad A + B = \left\{ \frac{n}{n+1} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \sup(A+B) \le \sup(A) + \sup(B)$$

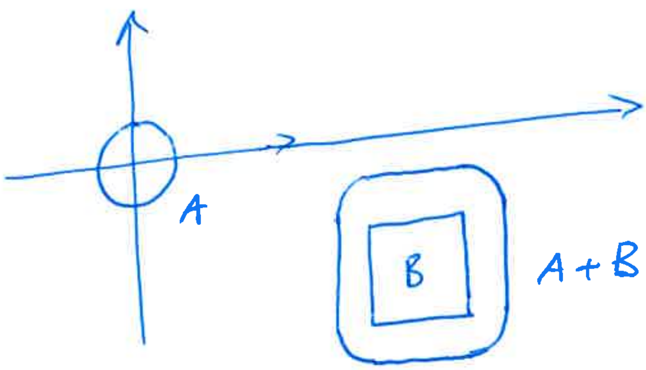
$$= 1 + e$$

OSOITTAUTUU
ETTÄ TÄSSÄ
PÄTEE YHTÄSUURUUS

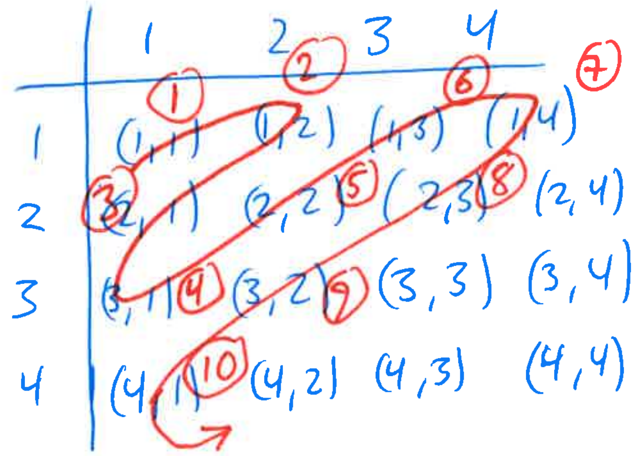
ESIM. SIIS $A + B = \{ a + b : a \in A,\ b \in B \}$,

JOS $A, B \in \mathbb{R}^2$, NIIN

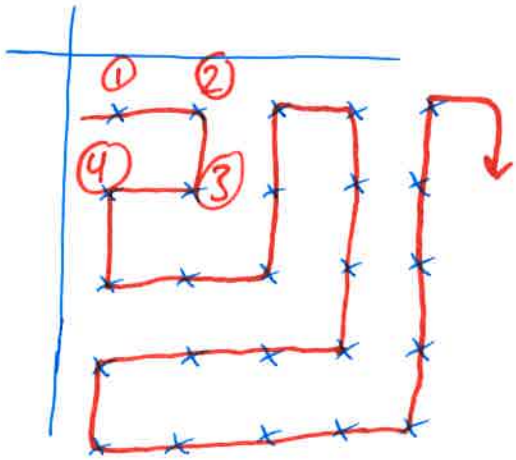
$$A + B = \{ \bar{a} + \bar{b} : \bar{a} \in A,\ \bar{b} \in B \}$$



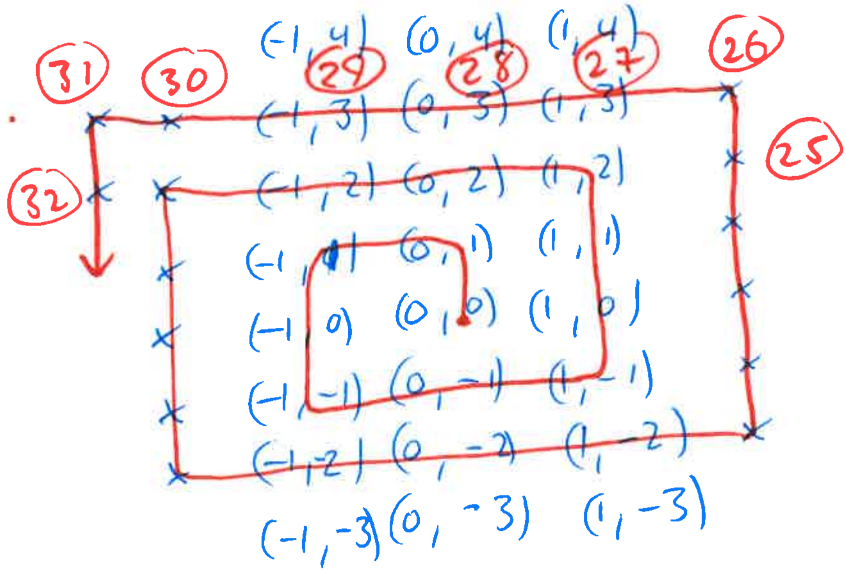
FUNKTION $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ETSIMINEN



TAI



FUNKTION $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ETSIMINEN



TÄTÄ VOISI NIMITTÄÄ TAULUKKO-, SIKSAK-, TAI SPIRAALI KUVIOKSI

ESIM. $\mathbb{R}$ ON YLINUMEROITUVA.

AT $\mathbb{R}$ ON NUMEROITUVA.

NYT LUENTOJEN MUKAAN, KOSKA $[0,1) \subset \mathbb{R}$, NIIN $[0,1)$ ON NUMEROITUVA JA VOIDAAN ESITTÄÄ LUETTELONA:

$$[0,1) = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

OLKOON $\alpha_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} 10^{-k}$, $n \in \mathbb{N}$, MISSÄ LUVUT $a_{n,k} \in \{0, \dots, 9\}$.

(SIIS OTETTIIN LUVUN α 10-KANTAINEN DESIMAALIKEHITELMÄ. OLTAISIIN VOITU OTTAA IHAN YHTÄ 2-, 3- TAI m-KANTAINEN HYVIN.)

NYT

$$\begin{array}{lllllll}
\alpha_1 & = & 0, & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \dots \\
\alpha_2 & = & 0, & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \dots \\
\alpha_3 & = & 0, & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \dots \\
\alpha_4 & = & 0, & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \dots \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

DIAGONAALI

OLKOON $x = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k 10^{-k}$, SITEN ETTÄ $\beta_k \in \{0, \dots, 9\}$ JA $\beta_k \neq a_{kk}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

KOSKA $\beta_1 \neq a_{11}$, NIIN $x \neq \alpha_1$

$\beta_2 \neq a_{22}$ $\quad x \neq \alpha_2$

$\beta_3 \neq a_{33}$ $\quad x \neq \alpha_3$

$\vdots$

NÄHDÄÄN, ETTÄ

$$x \notin \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} = [0,1),$$

MUTTA TOISAALTA

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k 10^{-k} \in [0,1).$$

SAATIIN RISTIRIITA RR

SIIS ANTITEESI OLI VÄÄRÄ, ELI $\mathbb{R}$ ON YLINUMEROITUVA.

ESITETTY TODISTUS ON "DIAGONAALITODISTUS".

(DIAGONAALITODISTUKSELLA VOI TODISTAA MM. JOIDENKIN JONOJEN TAI FUNKTIOIDEN SUPPENEMISIA ESIMERKIKSI NORMAALIPERHEIDEN TAPAUKSESSA.)

Seurauksen 1.3.4 tod OLKOON (16)

$$A_k = \left\{ \frac{m}{n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ m \in \mathbb{Z},\ |m|, |n| \leq k \right\}$$

ESIM.
$$A_1 = \left\{ \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \underbrace{\frac{1}{-1}, \frac{0}{-1}, \frac{-1}{-1}}_{n=-1} \right\}$$
$$= \{-1, 0, 1\}$$

NYT A_k ON ÄÄRELLINEN $\forall k \in \mathbb{N}$,

SITEN $\mathbb{Q} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$

ON NUMEROITUVA L.1.3.3 NOJALLA. $\square$

TUNTITEHTÄVÄ LEMMASSA 1.4.2 EI OLE VÄITTEITÄ

① U_α AVOIN KAIKILLA $\alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ AVOIN

② V_α SULJETTU ——"—— $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$ SULJETTU,

KOSKA VÄITTEET EIVÄT OLE TOTTA.
ETSI VASTAESIMERKIT.
(VOIT OTTAA ESIM. $U_\alpha, V_\alpha \subset \mathbb{R}$, JA INDEKSIJOUKOKSI $\mathcal{A} = \mathbb{N}$.)