MOODLESSA ON "HARJOITUSTENTTEJÄ", JOTKA OVAT PÄÄASIASSA ESIMERKKEJÄ KÄSITTEISTÄ. (17)

KOODI: 3317122

SALASANA: Miin 2019

VIIME KERRALLA TULI LOPUSSA ESILLE (LEMMASTA 1.4.2)

POHDINTATEHTÄVÄ: MIKSI

① U_α AVOIN KAIKILLA $\alpha \in A \not\Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ AVOIN

② V_α SULJETTU —— " —— $\not\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ SULJETTU

VASTAESIMERKIT

① $U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$, $-\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$

$$\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)}_{\text{AVOIMIA}} = \{0\} \quad \text{EI OLE AVOIN}$$

② DE MORGANIN LAILLA (LEMMA 1.1.1) EDELLISESTÄ KOHDASTA. VALITAAN

$V_n = \mathbb{R} \setminus U_n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\Rightarrow V_n = \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, \infty\right)$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{V_n}_{\text{SULJETTUJA}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus U_n) \underset{\uparrow \text{ LEMMA 1.1.1}}{=} \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \mathbb{R} \setminus 0 = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

EI OLE SULJETTU

②'

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-2 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right] = (-2, 2)$$

LAUSE 1.4.3 (HEINE-BORELIN LAUSE)

SANOO, ETTÄ

$$V \subset \mathbb{R}^n \text{ KOMPAKTI} \iff V \begin{cases} \text{SULJETTU JA} \\ \text{RAJOITETTU} \end{cases}$$

YLEISESTI JOUKKO V ON <u>KOMPAKTI</u>, JOS JOKAISELLA AVOIMELLA PEITTEELLÄ

$$V \subset \bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{U_\alpha}_{\text{AVOIMIA}}$$

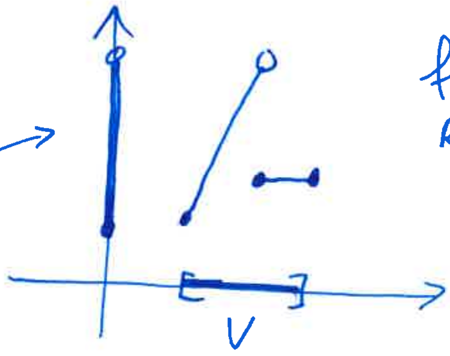
ON ÄÄRELLINEN OSAPEITE

$$V \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}, \quad (k \in \mathbb{N})$$

<u>ESIM.</u> JOS $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ON JATKUVA JA $V \subset \mathbb{R}$ ON KOMPAKTI, NIIN $f(V)$ ON KOMPAKTI.

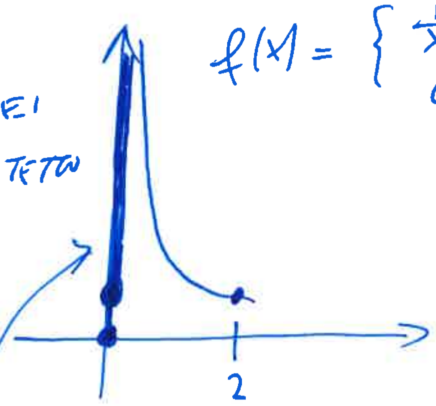
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 2 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

f(V) EI SULJETTU



f EI JATKUVA

f(V) EI RAJOITETTU



$$f(V) = \{0\} \cup [\tfrac{1}{2}, \infty)$$

PERUSTELU. OLKOON $\{U_i\}_{i\in J}$ KOKOELMA,

JOLLE $f(V) \subset \bigcup_{i\in J} U_i$

JA JOUKOT U_i OVAT AVOIMIA,

TÄLLÖIN $V \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i\in J} U_i\right) = \bigcup_{i\in J} f^{-1}(U_i)$.

KOSKA f ON JATKUVA, NIIN JOUKOT $f^{-1}(U_i)$ OVAT AVOINTEN JOUKKOJEN ALKUKUVINA AVOIMIA.

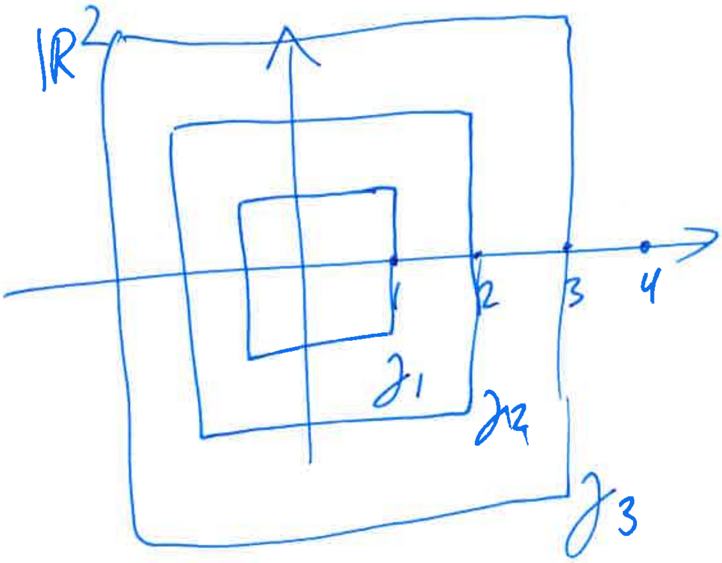
$$\left\{\begin{array}{l} x \in f^{-1}(U_i) \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : \ y \in B(x,\delta) \Rightarrow f(y) \in U_i \\ \varepsilon > 0 \\ B(f(x),\varepsilon) \subset U_i \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \Rightarrow B(x,\delta) \in f^{-1}(U_i) \\ \Rightarrow f^{-1}(U_i) \text{ AVOIN} \end{array}$$

KOSKA V ON KOMPAKTI, NIIN LÖYTYY JOUKOT $U_1, \dots, U_k$ SITEN, ETTÄ

$$V \subset \bigcup_{j=1}^{k} f^{-1}(U_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{k} U_j\right)$$

$$\Rightarrow f(V) \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_j.$$

LÖYDETTIIN JOUKON $f(V)$ ÄÄRELLINEN OSAPEITE, JOTEN $f(V)$ ON KOMPAKTI.

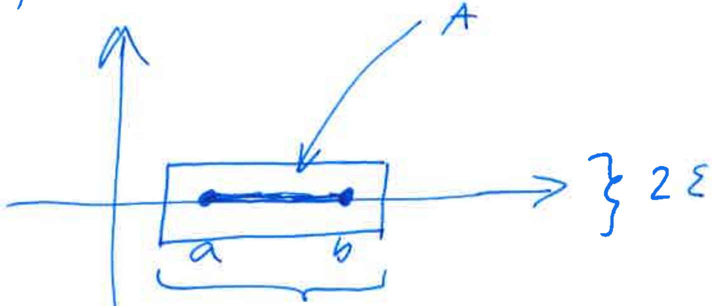


$$\sum_{i=1}^{\infty} \ell(J_i) = \lim_{p \to \infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \ell(J_i)}_{\text{KASVAVA JONO}}$$

L 1.2.6

$$= \sup \left\{ \sum_{i=1}^{p} \ell(J_i) : p \in \mathbb{N} \right\} \in \begin{cases} [0, \infty) \\ +\infty \end{cases}$$

(2) $n = 2$, $\mathbb{R}^2$, $A = \{(x,0) : a \le x \le b\}$ (21)



Väite: $m_2^*(A) = 0$

Tod. OLKOON $\varepsilon > 0$.

OLKOON $J_\varepsilon =]a-\varepsilon, b+\varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[$.

NYT $A \subset J_\varepsilon$, JOTEN

$$0 \le m_2^*(A) \le \ell(J_\varepsilon) = 2\varepsilon(b-a+2\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

KURISTUSPERIAATTEEN NOJALLA

$m_2^*(A) = 0$. □

SIVUN 11 ESIMERKKI 4, PERUSTELO.

OLKOON $A \subset \mathbb{R}^n$ NUMEROITUVA.
SIIS SE VOIDAAN ESITTÄÄ LISTANA

$$A = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}, \text{ MISSÄ}$$

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{N}.$$

VALITAAN NYT

$$J_{ik} = \left] a_{ik} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^i}\right)^{\frac{1}{n}}, \; a_{ik} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^i}\right)^{\frac{1}{n}} \right[$$

kaikilla $k = 1, 2, \dots, n$.

NYT $a_i \in J_i = J_{i1} \times J_{i2} \times \dots \times J_{in}$.

TÄSSÄ $\ell(J_{ik}) = 2 \, \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^i}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\varepsilon}{2^i}\right)^{\frac{1}{n}}$,

JOTEN $\ell(J_i) = \left(\left(\frac{\varepsilon}{2^i}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{\varepsilon}{2^i}$.

NYT $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_i$ JA SAADAAN

$$0 \le m_n^*(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} J_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to 0+,$$

SIIS $m_n^*(A) = 0$.