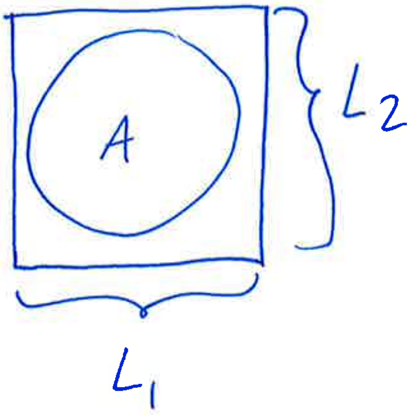
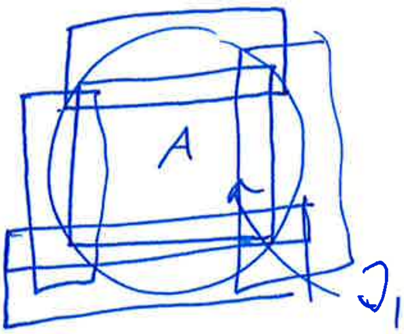
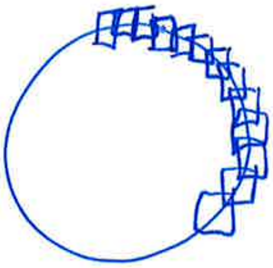
Esim. $A \subset \mathbb{R}^2$

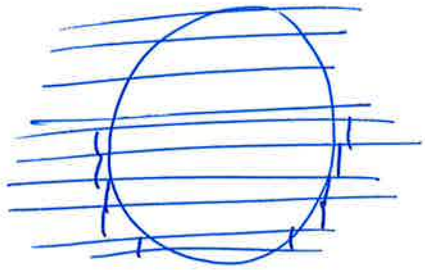


$m_2^*(A) \le L_1 L_2$



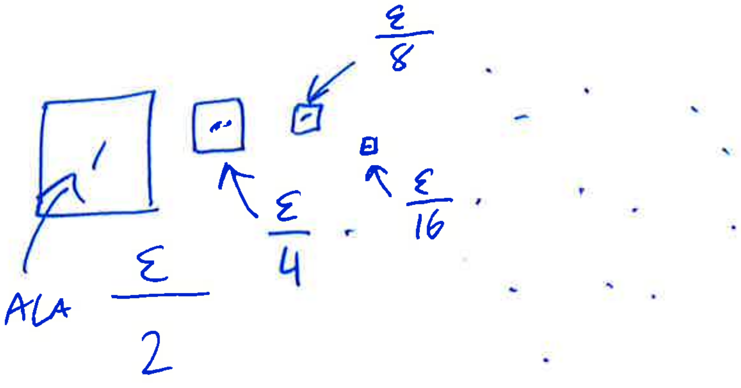
YMPYRÄ PEITETTIIN 5 AVOIMELLA VÄLILLÄ





TARKEMPIA ARVIOITA

ESIM. A NUMEROITUVA $\Rightarrow m_n^*(A) = 0$



A SAADAAN PEITETTYÄ NELIÖILLÄ, JOTKA OVAT PIENEMPIÄ JA PIENEMPIÄ

KOKONAISALA

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ell(J_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right)}_{=1} = \varepsilon$$

$$m_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \ell(J_i) \right\} \le \sum_{i=1}^{\infty} \ell(J_i) = \varepsilon$$ (23)

$$\Rightarrow \quad 0 \le m_n^*(A) \le \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad m_n^*(A) = 0,$$

Esimerkki: Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}$ siten, että

$$a \le b$$

kaikilla $a \in A$ ja $b \in B$. Tällöin

$$\sup A \le \inf B.$$

Perustelu. KIINNITETÄÄN $b \in B$. NYT

$$a \le b \quad \text{kaikilla } a \in A.$$

SIIS b ON JOUKON A ERÄS YLÄRAJA.

SIIS $\sup A$ (JOUKON A PIENIN YLÄRAJA)

TOTEUTTAA

$$\sup A \le b.$$

LUKU $b \in B$ OLI MIELIVALTAINEN.

SIIS

$$\sup A \le b \quad \text{kaikilla } b \in B.$$

SIIS $\sup A$ ON ERÄS ALARAJA JOUKOLLE B.

SIIS $\inf B$ (JOUKON B SUURIN ALARAJA)

TOTEUTTAA $\sup A \le \inf B$.

SOVELLUS

$a \le b$, $a \in A$, $b \in B$ $\Rightarrow a \le \inf B$, $a \in A$

$\Rightarrow \sup A \le \inf B$

Esim.

$$
\begin{array}{cc|ccc}
 & & \overbrace{1 \quad\quad 2}^{J_2} & & 3 \\
\hline
\multirow{2}{*}{I_1} & 1 & (1,1) & (1,2) & \\
 & 2 & (2,1) & (2,2) & \\
 & 3 & & & \\
\end{array}
$$

$I \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ MUTTA

$I \neq I_1 \times J_2$

KOSKA $(2,2) \in I_1 \times J_2$

$(2,2) \notin I$

KUITENKIN $I \subseteq I_1 \times J_2$

Todistus (LEMMA 2.3.3) $\displaystyle\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} \geq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij}$,

OLKOON $I' < I$ ja

$J_i' < J$

ÄÄRELLISIÄ KAIKILLA $i \in I'$.

MERKITÄÄN $A = \{(i,j) : i \in I', j \in J_i'\}$.

TÄLLÖIN

$$S = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} \geq S_A = \sum_{i \in I'} \sum_{j \in J_i'} a_{ij}$$

SUPIN MÄÄRITELMÄ

OTETAAN SUP YLI KAIKKIEN ÄÄRELLISTEN $J_i' < J$

$$\Rightarrow S \geq \sum_{i \in I'} \sum_{j \in J} a_{ij}$$

OTETAAN SUP YLI KAIKKIEN ÄÄRELLISTEN $I' < I$

$$\Rightarrow S \geq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij}.$$

HUOM. SUBADDITIIVISUUS EI (YLEENSÄ) PÄDE MUODOSSA

$$m_n^*\left(\bigcup_{i\in J} A_i\right) \le \sum_{i\in J} m_n^*(A_i), \qquad (1)$$

KUN $A_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in J$, JA J ON YLINUMEROITUVA.

SYY: $\mathbb{R}^n = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} \{x\}$

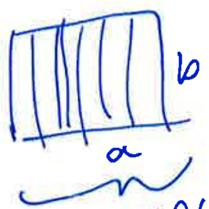
MISSÄ $m_n^*(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

JA $m_n^*(\mathbb{R}^n) = +\infty. \qquad (2)$

JOS (1) PÄTISI, NIIN

$$0 \le m_n^*(\mathbb{R}^n) = m_n^*\left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} \{x\}\right) \overset{(1)}{\le} \sum_{x\in\mathbb{R}^n} m_n^*(\{x\}) = 0$$

$\Rightarrow$ ~~...~~ $m_n^*(\mathbb{R}^n) = 0$ RISTIRIITA KAAVAN 2 KANSSA.



∞ KPL

$0 \cdot \infty = ab$

$0 \cdot \infty = 0$

$0 \cdot \infty = \infty$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{n^2}\, n = \frac{1}{n} \\ &\frac{1}{n}\, n^2 = n \end{aligned}}$$

ESIM.

$a_i \in \mathbb{R}$

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \in \mathbb{R}$ JA $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = \infty$

JOS ON ANNETTU $\alpha \in \mathbb{R}$

NIIN LÖYTYY $g: \mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{N}$ BIJEKTIO (26)

(JÄRJESTELEE LUONNOLLISET LUVUT)

JOLLE PÄTEE

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{g(i)} = \alpha.$$

HUOM. $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$, $a_i \in (0, +\infty)$

TS. "YLEINEN" SUMMAN MÄÄR. ON YHTÄPITÄVÄ AIEMMAN MÄÄRITELMÄN KANSSA.

Tod. MERK. $J_n = \{1, \dots, n\}$ ja

$$S = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = \sup\{\underbrace{S_J}_{= \sum_{i \in J} a_i} : J \subset \mathbb{N} \text{ ÄÄRELLINEN}\}$$

KOSKA $(S_{J_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ON KASVAVA JONO $(a_i > 0)$,

NIIN (LAUSE 1.2.6) $\Rightarrow$

$$\exists \lim_{n \to \infty} S_{J_n} = S' \left(= \sup_{n \in \mathbb{N}} S_{J_n}\right)$$

LISÄKSI $S_{J_n} \leq S \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \underline{S_{J_n} \leq} \underline{S' \leq S}. \quad (1)$$

JOS $J \subset \mathbb{N}$ ON ÄÄRELLINEN, NIIN $\exists\, n \in \mathbb{N}$

S.E. $J \subset J_n \Rightarrow S_J \le S_{J_n} \le S'$

$\Rightarrow S_J \le S' \quad \forall J$ ÄÄRELLINEN

$\Rightarrow \underline{S} = \sup_J \{S_J\} \underline{\le S'}$ (2)

NYT (1) & (2) $\Rightarrow$ VÄITE. $\square$