# MITALLISISTA JOUKOISTA

$A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$

AINA PÄTEE: $m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$.

LÖYTYY $A, B \in \mathbb{R}^n$, JOILLE $A \cap B = \emptyset$ JA

$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B). \quad (1)$$

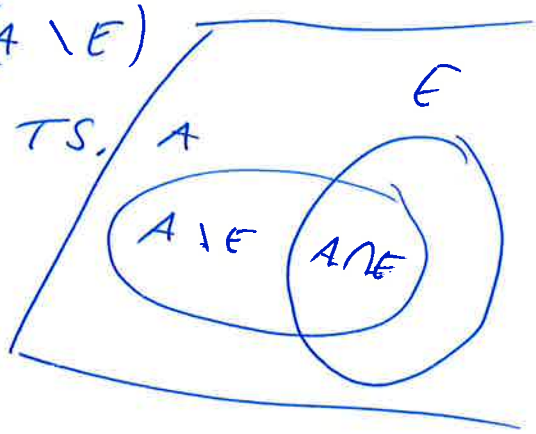
SIIS ULKOMITTA EI OLE TÄYSADDITIIVINEN.

"ONGELMASTA" (1) HANKKIUDUTAAN EROON HYLKÄÄMÄLLÄ OSA $\mathbb{R}^n$:n OSAJOUKOISTA.

OLK. $E \subset \mathbb{R}^n$ JA $A \subset \mathbb{R}^n$ "TESTIJOUKKO".

TÄLLÖIN $A = (A \cap E) \cup (A \setminus E)$ ON PISTEVIERAS YHDISTE, TS.

$$(A \cap E) \cap (A \setminus E) = \emptyset.$$




KOSKA $m^*$ ON SUBADDITIIVINEN, NIIN AUTOMAATTISESTI PÄTEE

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E). \quad (2)$$

NS. CARATHEODORYN EHTO VAATII, ETTÄ EY:SSÄ (2) PÄTEE YHTÄSUURUUS $\forall A \subset \mathbb{R}^n$.

TÄLLÖIN $E$ ON <u>MITALLINEN</u>,

MERK. $E \in \mathrm{Leb}\,\mathbb{R}^n$.

MIKÄ ON LEBES[redacted]GUE[redacted] -MITALLISTEN JOUKKOJEN AVARUUS. 29

JOS $E \in \mathrm{Leb}\,\mathbb{R}^n$, NIIN $m(E) = m^*(E)$.

[VERTAA BORELIN JOUKOT $\mathrm{Bor}\,\mathbb{R}^n \subset \mathrm{Leb}\,\mathbb{R}^n$]

LEMMAN 2.4.4 TOD.

$$\boxed{E_1, E_2 \in \mathrm{Leb}\,\mathbb{R}^n \Rightarrow E_1 \cap E_2 \text{ JA } E_1 \cup E_2 \in \mathrm{Leb}\,\mathbb{R}^n}$$

OL: ETTÄ: $k=2$. (YLEINEN TAPAUS INDUKTIOLLA

$E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \underbrace{(E_1 \cap E_2)}\cap \underbrace{E_3}$)

OLK. $E_1, E_2 \in \mathrm{Leb}\,\mathbb{R}^n$. OLKOON $A \subset \mathbb{R}^n$ TESTIJOUKKO. NYT

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(\underbrace{A \cap E_1^c}_{=B}) \qquad (1)$$

$$m^*(B) = m^*(B \cap E_2) + m^*(B \cap E_2^c) \qquad (2)$$

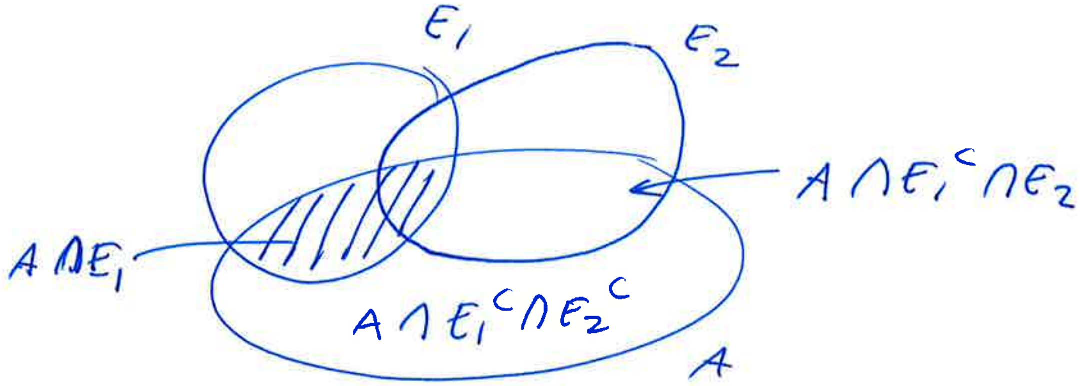
TÄLLÖIN (2):N NOJALLA

$$(3) \quad m^*(A \cap E_1^c) = m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c).$$

SIJ. (3) KAAVAAN (1) $\Rightarrow$

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c),$$

MERK. $C = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)$.




NYT

$$m^*(C) \le m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2)$$

TS.

$$(4) \quad m^*(A) = \underline{(\ ) + (\ )} + (\ ) \ge m^*(C) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$$

TOISAALTA

$$C = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2) \qquad // \text{DE MORGAN}$$

$$= A \cap (E_1 \cup (E_1^c \cap E_2))$$

$$= A \cap (E_1 \cup (E_2 \setminus E_1))$$

$$= A \cap (E_1 \cup E_2)$$

$$\Rightarrow m^*(C) = m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)).$$

SIIS (4) $\Rightarrow$

$$m^*(A) \ge m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap (E_1^c \cap E_2^c))$$

$$= m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c)$$

SIIS $E_1 \cup E_2$ ON MITALLINEN.

INDUKTIO $\Rightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{k} E_i$ MITALLINEN (*)

(3)

DE MORGAN $\Rightarrow$

$$\bigcap_{i=1}^{k} E_i = \left( \bigcup_{i=1}^{k} E_i^c \right)^c$$

$E_i$ MITALLINEN

L2.4.3 $\Rightarrow$ $E_i^c$ MITALLISIA

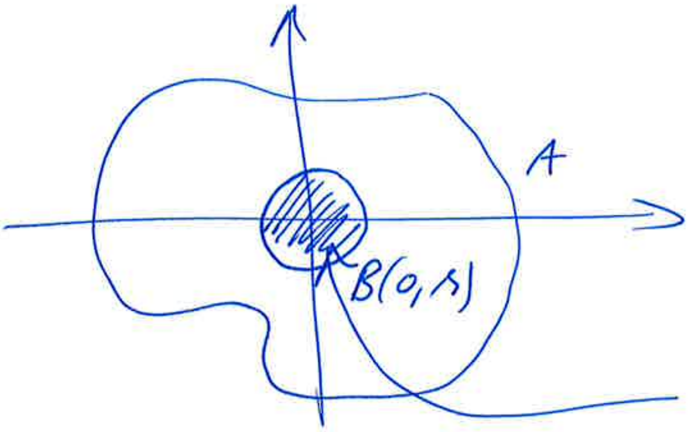
(*) $\Rightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{k} E_i^c$ MITALLINEN

L 2.4.3. $\Rightarrow$ $\left( \bigcup_{i=1}^{k} E_i^c \right)^c$ MITALLINEN. $\square$

ESIM. OLKOON $A \subset \mathbb{R}^2$ S.E.

$$m^*(A \cap B(x,r)) \leq |x|\, r^3 \quad (1)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall r > 0$. TÄLLÖIN $m(A) = 0$.



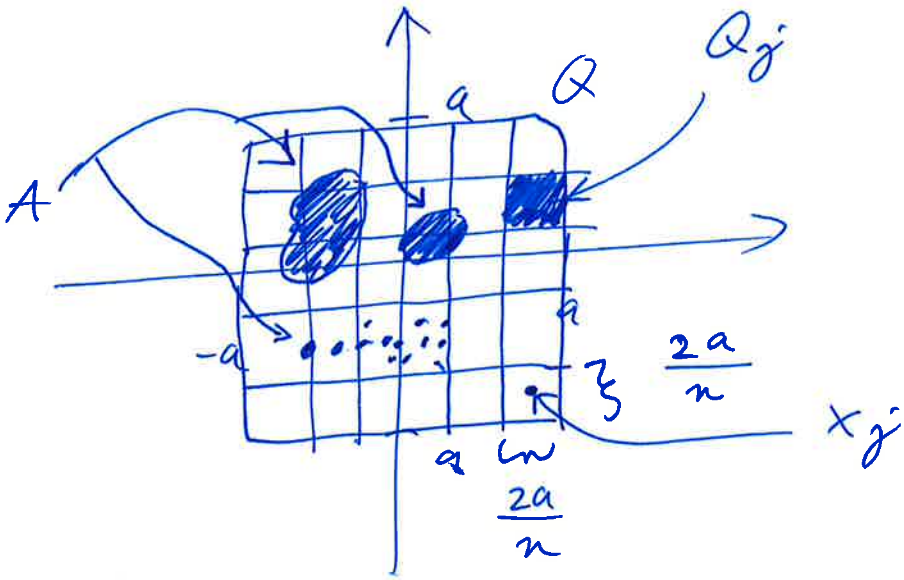


$m^*(A \cap B(0,r)) \leq \pi r^2$.

(a) OLK. A RAJOITETTU, JOLLOIN

$A \subset Q = [-a, a] \times [-a, a]$, $a > 0$ RIITTÄVÄN SUURI,

JAETAAN Q SULJETTUIHIN OSANELIÖIHIN $Q_j$, JOIDEN SIVUN PITUUS ON $\frac{2a}{n}$.



OLK, $x_j$ NELIÖN $Q_j$ KESKIPISTE. (33)

TÄLLÖIN (KARKEITA ARVIOITA)

$$|x_j| \left(\leq \sqrt{2}\, a\right) \leq 2a \quad (2)$$

JA $Q_j \subset B\left(x_j, \frac{2a}{n}\right)$

JOTEN

$$m^*(A \cap Q_j) \overset{\text{MONOT.}}{\leq} m^*\left(A \cap B\left(x_j, \frac{2a}{n}\right)\right)$$

$$\overset{(1)}{\leq} |x_j| \left(\frac{2a}{n}\right)^3$$

$$\overset{(2)}{\leq} \frac{(2a)^4}{n^3}. \quad (3)$$

NYT $A = \bigcup_{j=1}^{n^2} (A \cap Q_j)$,

JOTEN SUBADDITIIVISUUS $\Rightarrow$

$$m^*(A) = m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n^2} (A \cap Q_j)\right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n^2} m^*(A \cap Q_j)$$

$$\overset{(3)}{\leq} n^2 \cdot \frac{(2a)^4}{n^3} = \frac{(2a)^4}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ANTAMALLA $n \to \infty$ SAADAAN

$$m^*(A) \leq 0 \Rightarrow m^*(A) = 0$$

$$\overset{L2.4.2}{\Rightarrow} \begin{cases} A \text{ MITALLINEN} \\ m(A) = 0. \end{cases}$$

b YLEINEN TAPAUS. NYT

$$A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j,$$

MISSÄ $A_j = A \cap B(0, j)$ ON RAJOITETTU.

KOSKA $A_j \subset A$, NIIN 1 ON VOIMASSA JOUKOLLE $A_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$. SIIS a $\Rightarrow$

$$m^*(A_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad m^*(A) \underset{\text{SUBADDIT.}}{\leq} \sum_{j \in \mathbb{N}} \underbrace{m^*(A_j)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad m(A) = 0. \qquad \square$$