Lause (Vitali 1905)

$$\mathrm{Leb}\,\mathbb{R} \subsetneq P(\mathbb{R})$$

eli: $\exists\, E \subset \mathbb{R}$, JOKA EI OLE LEBESGUE-MITALLINEN,

IDEA: ETSITÄÄN $B \subset \mathbb{R}$, $0 < m^*(B) < \infty$,

JA B:N OSITUS

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

ERILLISIIN JOUKKOIHIN A_i S.E.

$$m^*(A_i) = m^*(A_1) \quad \forall i.$$

TOD. TARKASTELLAAN TEKIJÄRYHMÄÄ $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, JONKA ALKIOT OVAT T EKVIVALENSSI LUOKKIA

ESIM.

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$0 \sim 3$, $1 \sim 4$, $2 \sim 5$

$[0] = \{0, 3\}$, $[1] = \{1, 4\}$, $[2] = \{2, 5\}$

$\Rightarrow A/\sim = \{[0], [1], [2]\} = \{\{0,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}\}$

$\# A = 6$ $\qquad \#[i] = 2$ $\qquad \#(A/\sim) = 3$

"$A/\sim$" $= 6/2 = 3$

$E(x)$ S.E.

$$E(x) = E(y) \iff x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

ESIM. $\frac{1}{2} \sim \frac{17}{23}$ $\qquad \sqrt{2} \not\sim 1$

$\sqrt{2} \sim \sqrt{2} + \frac{1}{2}$ $\qquad \sqrt{2} \not\sim \pi$

$\sim$ ON EKVIVALENSSI RELAATIO

① $a \sim a \iff a - a = 0 \in \mathbb{Q}$ ok

② $a \sim b$ $\qquad a \sim b \Rightarrow a - b = r \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow b \sim a$ $\qquad \Rightarrow b - a = -r \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow b \sim a$ ok

③ $\begin{cases} a \sim b \\ b \sim c \end{cases} \Rightarrow a \sim c$

$$\begin{cases} a \sim b \\ b \sim c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = r \in \mathbb{Q} \\ b - c = s \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$+ \quad a - c = r + s \in \mathbb{Q}$$

$\Rightarrow a \sim c$ ok

VALITAAN JOKAISESTA EKV. LUOK. $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$, TÄSMÄLLEEN YKSI EDUSTAJA VÄLILTÄ $[0,1]$.

OLKOON A KAIKKIEN NÄIDEN EDUSTAJIEN JOUKKO.

Väite: $A \notin \mathrm{Leb}\,\mathbb{R}$

AT. $A \in \mathrm{Leb}\,\mathbb{R}$,

(i) JOUKOT $A + r$, $r \in \mathbb{Q}$, OVAT ERILLISIÄ:

$x \in (A + r) \cap (A + s)$, $r, s \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow x = a_1 + r$ JA $x = a_2 + s$, $\quad a_1, a_2 \in A$.

$\Rightarrow a_1 - a_2 = s - r \in \mathbb{Q}$ (*)

$\Rightarrow a_1 \sim a_2 \Rightarrow E(a_1) = E(a_2)$

$\Rightarrow a_1 = a_2$ (KOSKA VALITAAN YKSI EDUSTAJA)

$\overset{(*)}{\Rightarrow} s = r.$

ii) $m(A) = 0$.

KOSKA $A \subset [0,1]$, NIIN $A + \frac{1}{n} \subset [0,2]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow 2 = m^*([0,2])$$

$$\geq m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A + \frac{1}{n}\right)\right)$$

$A + \frac{1}{j}$:t ERILLISIÄ

LAUSE 2.4.7.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} m^*\left(A + \frac{1}{n}\right)$$

A MITALLINEN

$\Rightarrow A + \frac{1}{n}$ ON MITALLINEN

H2 T3

$$= \sum_{n=1}^{\infty} m\left(A + \frac{1}{n}\right)$$

$m\left(A + \frac{1}{n}\right) = m(A)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} m(A)$$

$\Rightarrow \underline{m(A) = 0}$

iii) $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A + r)$

OLK. $x \in \mathbb{R}$ MV. $\Rightarrow \exists\, a \in E(x) \cap A$

$\Rightarrow x - a = r \in \mathbb{Q}$, $a \in A$

$\Rightarrow x = a + r$

$\Rightarrow x \in A + r \Rightarrow x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \underbrace{(A + r)}_{\subset \mathbb{R}} \subset \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ iii) TOSI

NYT (i), (ii) JA (iii) $\Rightarrow$

$$+\infty = m(\mathbb{R}) \overset{(iii)}{=} \sum_{r \in \mathbb{Q}} m(A + r)$$

$\boxed{\text{LAUSE } 2.4.7}$

$$= \sum_{r \in \mathbb{Q}} \underbrace{m(A)}_{\overset{(iii)}{=} 0} = 0. \quad RR$$

TS. $A \notin Leb(\mathbb{R})$.

HUOM.

1. ITSE ASIASSA $Leb\, \mathbb{R}^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

2. JOS $B \subset \mathbb{R}^n$ ON MIKÄ TAHANSA JOUKKO S.E. $m^*(B) > 0$, NIIN $\exists A \subset B$ S.E. $A \notin Leb\, \mathbb{R}^n$.
(ESIM. YLLÄ $B = [0,1]$.)

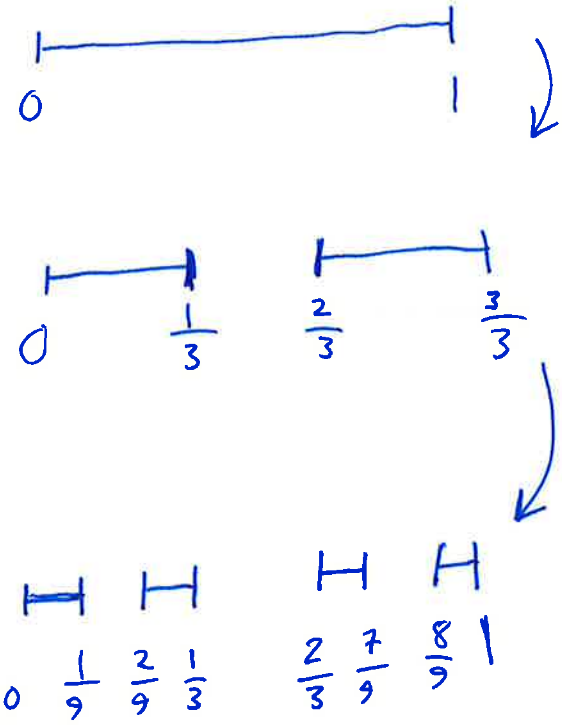
A NUMEROITUVA $\Rightarrow$ $m(A) = 0$

A YLINUMEROITUVA $\overset{?}{\not\Rightarrow}$ $m(A) > 0$

ESIM. KONSTRUOIDAAN NS. CANTORIN 1/3 – JOUKKO C, JOLLE

① $m(C) = 0$

② C ON YLINUMEROITUVA.



$C_0 = [0,1]$ $\quad m(C_0) = 1$

POISTETAAN KESKIMMÄINEN (AVOIN) KOLMANNES

$C_1 = [0,1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ $\quad m(C_1) = \frac{2}{3}$

$= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \underbrace{\frac{3}{3}}_{=1}\right]$

C_2 $\quad m(C_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

SAADAAN JONO SISÄKKÄISIÄ JOUKKOJA

$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset C_4 \supset \ldots,$

JOILLE $m(C_j) = \left(\frac{2}{3}\right)^j$.

OLKOON $C = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} C_j$.

NYT KOSKA $C \subset C_j \;\; \forall j$

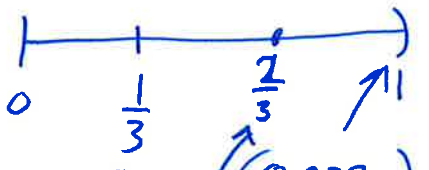
NIIN (m^* MONOTONINEN) $\Rightarrow$

$$m^*(C) \le m^*(C_j) = m(C_j) = \left(\frac{2}{3}\right)^j \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

ANTAMALLA $j \to \infty$, SAADAAN

$$m^*(C) = 0 \implies \begin{cases} C \in \operatorname{Leb} \mathbb{R} \\ m(C) = 0, \end{cases}$$

(2) JOUKKO $C \neq \emptyset$, ESIM. $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots \in C$.



SISÄLTÄÄ $\leftarrow$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{a_j}_{\in \{0,\dots,9\}} 10^{-j}$

$(0{,}222\dots)_3$

SISÄLTÄÄ

$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{a_j}_{\in \{0,1,2\}} 3^{-j}$

$= 1 - \frac{2}{3}$

$= (0{,}0222\dots)_3$

$(0{,}20000)_3$

$0{,}999\ldots = 1$

$(0{,}222\ldots)_3 = 1$

HUOMATAAN:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\iff a_1 = 1$$

ENSIMMÄINEN DESIMAALI

$$x \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \iff a_2 = 1$$

SIIS $\displaystyle x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j} \in C$

$$\iff a_j \neq 1 \;\; \forall j \iff a_j \in \{0,2\} \;\; \forall j$$

TEHDÄÄN KUVAUS $f : C \to [0,1]$, JOLLE

41

$$f\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j 2^{-j}$$

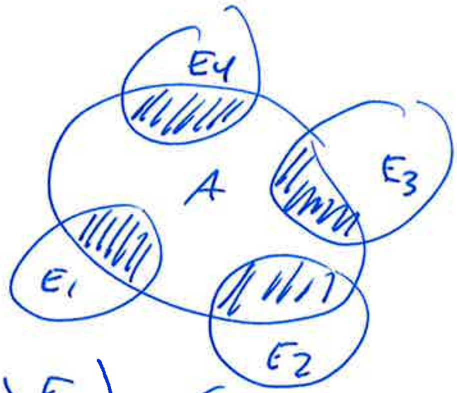
$$b_j = \begin{cases} 0, & a_j = 0 \\ 1, & a_j = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow f : C \to [0,1]$
BIJEKTIO

KAIKKI VÄLIN $[0,1]$ LUVUT OVAT TÄTÄ MUOTOA,

$[0,1]$ YLINUM. $\Rightarrow$ C YLINUMEROITUVA.

LEMMAN 2.4.5 TOD



(a) OLKOON $k=2$,

E_1 MITALLINEN

$$\Rightarrow m^*(B) = m^*(B\cap E_1) + m^*(B\setminus E_1) \quad (\forall B \in \mathbb{R}^n)$$

VALITAAN $B = A\cap(E_1\cup E_2)$, JOLLOIN

$$m^*(A\cap(E_1\cup E_2)) = m^*(A\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1) + m^*(A\cap(E_1\cup E_2)\setminus E_1)$$

$$= m^*(A\cap E_1) + m^*(A\cap E_2),$$

KOSKA

$$A\cap(E_1\cup E_2)\setminus E_1 = A\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1^c$$

$$= A\cap \underbrace{E_1\cap E_1^c}_{=\emptyset} \cup A\cap \underbrace{E_2\cap E_1^c}_{=E_2}$$

$$= \emptyset \cup A\cap E_2$$

$$= A\cap E_2.$$

$\Leftrightarrow E_2 \subset E_1^c$

$\Leftrightarrow E_1\cap E_2 = \emptyset$