MITALLISISTA FUNKTIOISTA

OLKOON $G \subset \mathbb{R}^n$ AVOIN,

$\boxed{\text{KUVAUS } f: G \to \mathbb{R}^m \text{ ON JATKUVA} \iff f^{-1}(U) \text{ ON AVOIN } \forall U \subset \mathbb{R}^m \text{ AVOIN}}$

[? $\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$]

TOPOLOGINEN AVARUUS (X, T), MISSÄ X ON JOUKKO JA T ON SELLAINEN X:N OSAJOUKKOJEN KOKOELMA, ETTÄ

1. $\emptyset \in T$, $X \in T$
2. $\{A_i : i \in J\} \subset T \Rightarrow \bigcup_{i \in J} A_i \in T$
3. $A, B \in T \Rightarrow A \cap B \in T$

ESIM. $T_1 = P(X)$, $T_2 = \{\emptyset, X\}$,

$\emptyset \cup X \cup X = X \in T_2$

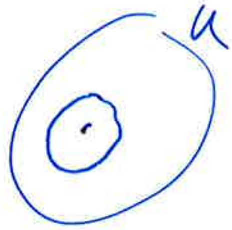
$X \cap X = X \in T_2$

$\emptyset = X \cap \emptyset \in T_2$

ESIM. OLKOON $X = \mathbb{R}^n$.

ASETETAAN $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$, JOS

$\forall x \in \mathcal{U} \ \exists r > 0 : B(x, r) \subset \mathcal{U}$.



TÄSSÄ

$$B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \underbrace{|y - x|}_{= d(x,y)} < r \}$$

$= d(x,y)$ PISTEIDEN x JA y VÄLINEN ETÄISYYS

ETÄISYYS $\Rightarrow$ PALLOT $\Rightarrow$ AVOIMET JOUKOT.

ESIM. OLKOON $X = \mathbb{R}$. VALITAAN

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{ (a, \infty) : a \in \mathbb{R} \}$$

NS. OIKEA PUOLISÄDE -TOPOLOGIA.

TOTEUTTAA EHDOT 1. – 3.:

1. $\emptyset, X = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$

2. $$\bigcup_{i \in J} (a_i, \infty) = \left(\inf_{i \in J} a_i , \infty \right) \left[= \begin{cases} (b, \infty), & b \in \mathbb{R} \\ (-\infty, \infty) = \mathbb{R} \end{cases} \right] \in \mathcal{T}$$

3. $(a, \infty) \cap (b, \infty) = (\max(a,b), \infty) \in \mathcal{T}$

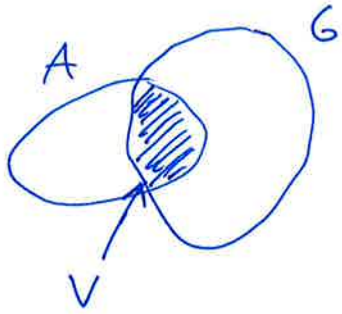
RELATIIVITOPOLOGIA

OLKOON (X, T) TOPOLOGINEN AVARUUS.

OLKOON $A \subset X$, MISSÄ $A \neq \emptyset$.

NYT T "INDUSOI" JOUKKOON A TOPOLOGIAN T_A, NS. RELATIIVITOPOLOGIAN:

$$V \in T_A \iff V = A \cap G \text{ JOLLAKIN } G \in T,$$

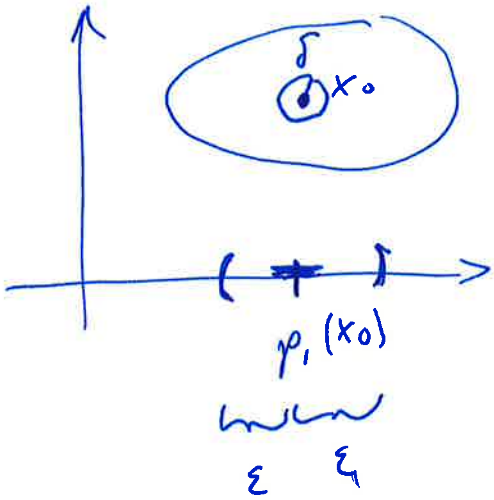


ESIMERKKI. OLKOON $X = \mathbb{R}$ JA OLKOON T REAALILUKUJEN STANDARDI TOPOLOGIA. VALITAAN

$$A = [0,1] \cup \{4\}.$$

NYT

$$A \supset \left\{ \begin{array}{lll} [0,1] \in T_A & \text{KOSKA} & [0,1] = A \cap \underset{T}{\underset{\cap}{(-1,2)}} \\ \{4\} \in T_A & \text{KOSKA} & \{4\} = A \cap \underset{T}{\underset{\cap}{(3,5)}} \\ (\frac{1}{2}, 1] \cup \{4\} \in T_A & \text{KOSKA} & (\frac{1}{2}, 1] \cup \{4\} = A \cap \underset{T}{\underset{\cap}{(\frac{1}{2}, \infty)}} \\ (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \in T_A & & (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = A \cap \underset{T}{\underset{\cap}{(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})}} \\ (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \notin T_A & \text{KOSKA} & \nexists\, G \in T : (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] = A \cap G \end{array} \right.$$



φ_j JATKUVA

"⇐" OLETETAAN, ETTÄ f_j ON MITALLINEN $\forall j \in \{1, \dots, m\}$. OLKOON $G \subset \mathbb{R}^m$ AVOIN.

TÄLLÖIN LINDELÖFIN LAUSEEN NOJALLA

$$G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J^{(i)}$$

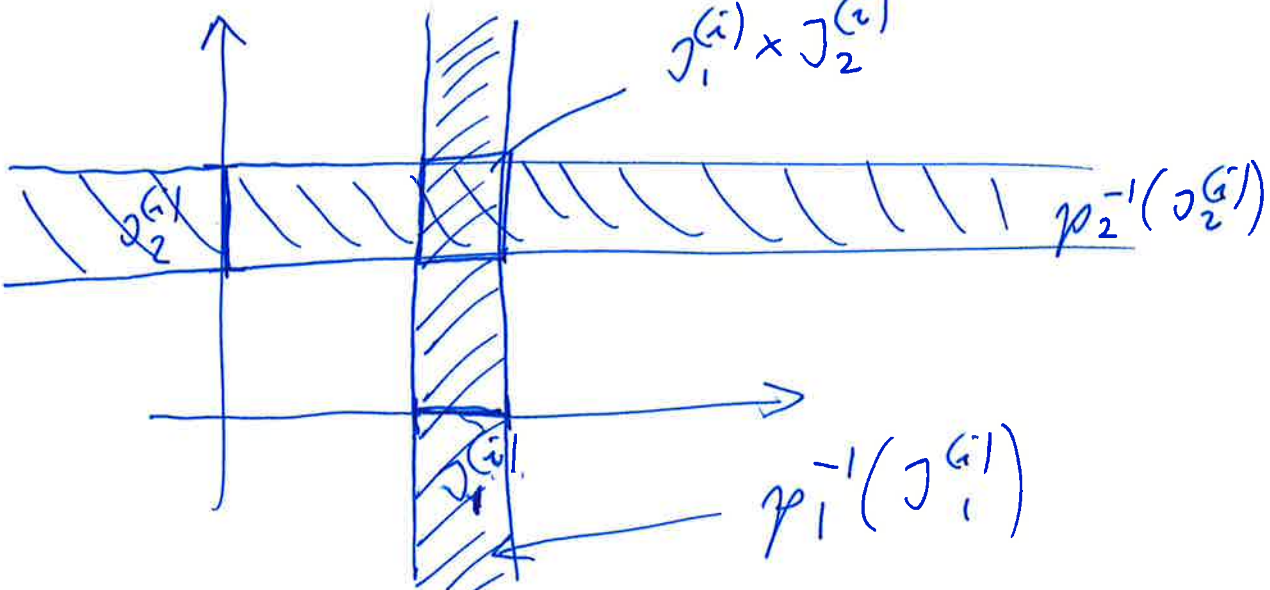
(VRT. L. 2.4.9 TODISTUS)

MISSÄ $J^{(i)}$ ON AVOIN m-VÄLI, TÄTEN

$$J^{(i)} = J_1^{(i)} \times \dots \times J_m^{(i)}$$

$\mathbb{R}$:n AVOIMIA VÄLEJÄ

$$= \bigcap_{j=1}^{m} \varphi_j^{-1}\left(J_j^{(i)}\right)$$



MERKINTÄ: JOS $f : A \to \mathbb{R}^m$, ~~[illegible]~~ MISSÄ $A \subset \mathbb{R}^n$,

NIIN

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

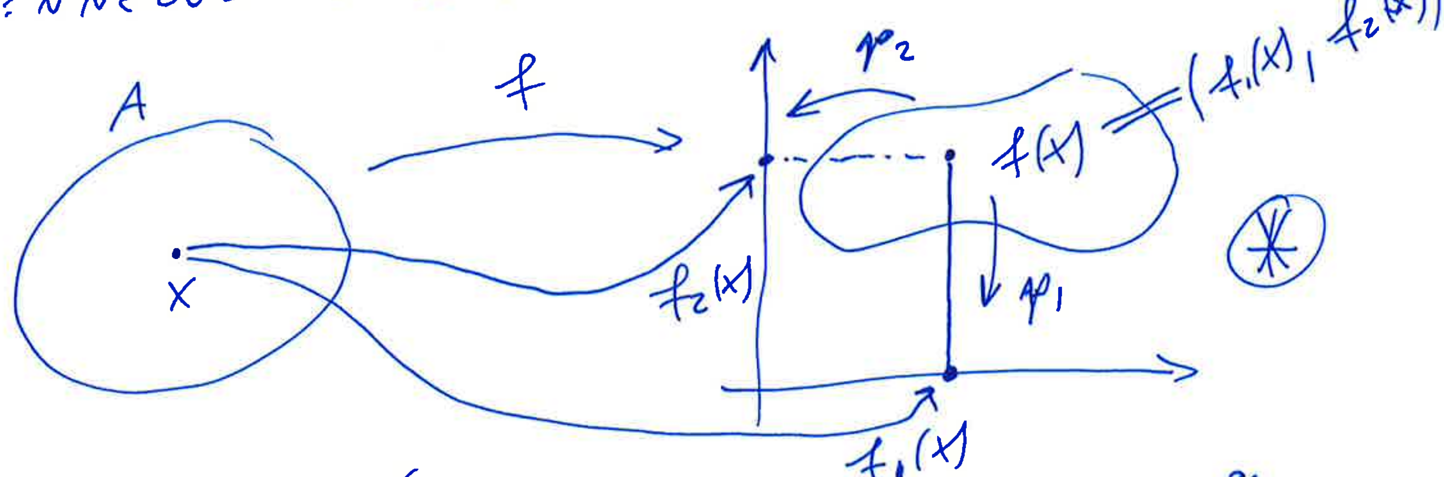
MISSÄ $f_j : A \to \mathbb{R}$.

LISÄKSI

$$f_j(x) = (p_j \circ f)(x)$$

JA $p_j(y_1, \dots, y_n) = y_j$ ON PROJEKTIO

j:NNELLE KOORDINAATILLE



(*)

LAUSE. $f = (f_1, \dots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$,

ON MITALLINEN

$\iff$ f_j ON MITALLINEN $\forall j \in \{1, \dots, m\}$.

Tod. "$\Rightarrow$" JOS f ON MITALLINEN, NIIN

$$f_j = p_j \circ f$$

ON MITALLINEN L.2.6.3 NOJALLA, KOSKA p_j

ON JATKUVA.

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(G) = f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} J^{(i)}\Big)$$

$$\overset{L.1.1.2}{=} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}\big(J^{(i)}\big)$$

$$= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}\Big(\bigcap_{j=1}^{m} p_j^{-1}\big(J_j^{(i)}\big)\Big)$$

$$\overset{L.1.1.2}{=} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{j=1}^{m} f^{-1}\Big(p_j^{-1}\big(J_j^{(i)}\big)\Big)$$

TÄSSÄ $f^{-1}\big(p_j^{-1}(x)\big) = f_j^{-1}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

[KATSO KUVA (*)]

SAADAAN

$$f^{-1}(G) = \underbrace{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{j=1}^{m} \underbrace{f_j^{-1}\big(\underbrace{J_j^{(i)}}_{\text{AVOIN}}\big)}_{\substack{\text{MITALLINEN, KOSKA} \\ f_j \text{ ON MITALLINEN}}}}_{\text{MITALLINEN (L.2.4.7)}}$$

$\Rightarrow f$ MITALLINEN FUNKTIO.