KÄÄNTEINEN FATOUN LEMMA

OLKOON $E \subset \mathbb{R}^n$ ja $f_i : E \to [0,\infty]$ MITALLISIA $\forall i \in \mathbb{N}$ S.E. $f_i \leq g$, MISSÄ g ON MYÖS MITALLINEN JA $g : E \to [0,\infty]$.

TÄLLÖIN

$$\limsup_{i\to\infty} \int_E f_i \, dm \leq \int_E \limsup_{i\to\infty} f_i \, dm .$$

Todistus. NYT $g - f_i$ ON JONO MITALLISIA EI-NEG. FUNKTIOITA $E \to [0,\infty]$. SITEN FATOUN LEMMAN NOJALLA

$$\int_E \liminf_{i\to\infty} (g - f_i) \, dm \leq \liminf_{i\to\infty} \int_E (g - f_i) \, dm .$$

$$\Rightarrow \int_E g + \liminf_{i\to\infty} (-f_i) \, dm \leq \liminf_{i\to\infty} \int_E g \, dm - \int_E f_i \, dm$$

$$\Rightarrow \cancel{\int_E g \, dm} - \int_E \limsup_{i\to\infty} f_i \, dm \leq \cancel{\int_E g \, dm} - \limsup_{i\to\infty} \int_E f_i \, dm$$

$$\Rightarrow \limsup_{i\to\infty} \int_E f_i \, dm \leq \int_E \limsup_{i\to\infty} f_i \, dm , \qquad \square$$

$\boxed{\text{OSOITA } 1=2 \text{ SUPISTAMALLA LUVULLA } \infty}$

- TÄYTYY OLETTAA $\int_E g \, dm < \infty$
- JOTTA $g(x) - f_i(x)$ OLISI HYVIN MÄÄRITELTY $\boxed{\text{EI } (\infty - \infty)}$, VOIDAAN OLETTAA

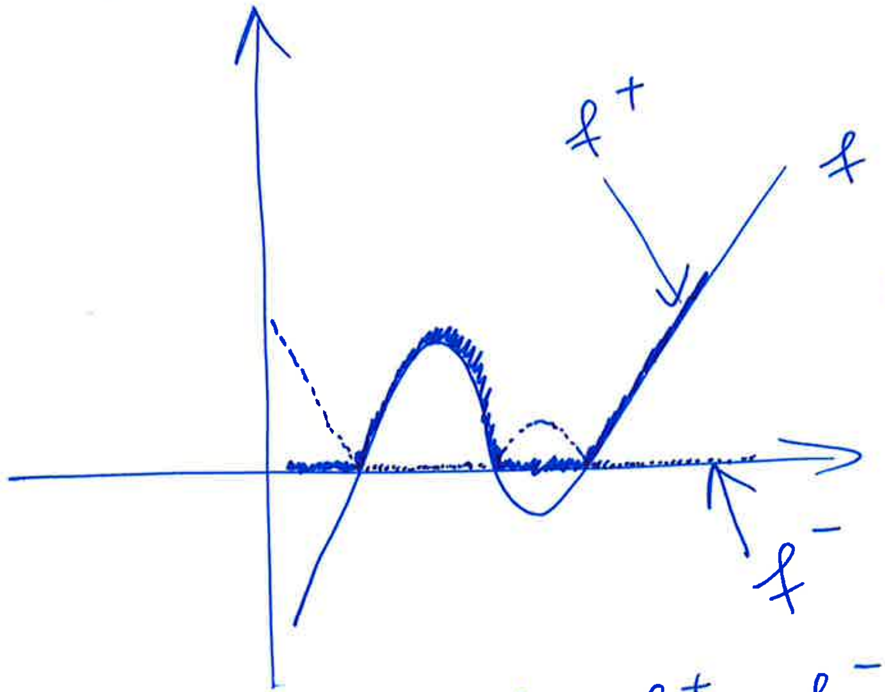
ETTÄ $g : E \to [0, \infty)$ $(g \neq \infty$ /

JA ETTÄ $\liminf_{i \to \infty} (-f_i(x)) = -\limsup_{i \to \infty} f_i(x) \neq -\infty$,

KAIKILLA $x \in E$

TAI LIEVEMPI OLETUS

$$\left[\begin{array}{l} g : E \to [0, \infty] \text{ JA} \\ m\left(\left\{ x \in E : \limsup_{i \to \infty} f_i(x) = \infty \right\}\right) = 0 \end{array} \right.$$



$f^+ = \max(f, 0)$

$f^- = -\min(f, 0)$

$\to f = f^+ - f^-$

$\to |f| = f^+ + f^-$