Mitta- ja integroimisteoria a
Loppukoe
27.02.2019

1. Osoita, että jos $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, niin $m_n^*(A) \leq m_n^*(B)$.

2. Osoita, että joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen jos ja vain jos $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ on mitallinen.

3. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ ja olkoon $f : E \to [0, +\infty]$ ei-negatiivinen Lebesgue integroituva funktio joukossa E. Tällöin

$$\int_E af\,dm = a\int_E f\,dm \tag{1}$$

kaikille $a \geq 0$. Olkoon $g : E \to \mathbb{R}$ vaihtuvamerkkinen Lebesgue integroituva funktio joukossa E. Osoita käyttämällä hyväksi yhtälöä (1), että

$$\int_E \lambda g\,dm = \lambda \int_E g\,dm$$

kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Olkoon $A =]0,1[$ ja

$$f_i(x) = \frac{(1-x^2)^i}{\sqrt{x}}.$$

Laske $\lim_{i\to\infty} \int_A f_i\,dm$.

5. Olkoon $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ on mitallinen ja olkoon $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että funktio $f^2 + a$ on mitallinen.