MITTA- JA INTEGROIMISTEORIA LOPPUKOE 27.2.2019

MALLI RATKAISUT

① TEHTÄVÄ

JOS $F = \{ U_i : i \in \mathbb{N} \}$ ON JOUKON B LEBESGUEN PEITE, NIIN

- $B \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$
- U_i ON AVOIN n-VÄLI KAIKILLA $i \in \mathbb{N}$
- $|F| = \sum_{i \in \mathbb{N}} l(U_i)$, MISSÄ

$$U_i = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \Rightarrow$$

$$l(U_i) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \times \dots \times (b_n - a_n).$$

KOSKA $A \subset B$, NIIN F ON MYÖS JOUKON A LEBESGUEN PEITE, SILLÄ

$$A \subset B \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \Rightarrow A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i,$$

$$m_n^*(A) = \cancel{\sup}\ \mathrm{INF} \underbrace{\{ |F| : F \text{ ON } A\text{:N LEB PEITE} \}}_{\supset \{ |F| : F \text{ ON } B\text{:N LEB PEITE} \}}$$

$$\leq \cancel{\sup}\ \mathrm{INF} \{ |F| : F \text{ ON } B\text{:N LEB PEITE} \}$$

$$= m_n^*(B),$$

YLEISESTI $E \supset F \Rightarrow \cancel{\sup}\ \mathrm{INF}\, E \leq \cancel{\sup}\ \mathrm{INF}\, F.$

(2) TEHTÄVÄ

$E \subset \mathbb{R}^n$ MITALLINEN

MÄÄR

$\Leftrightarrow \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n \quad m^*(A) = m^*(\underbrace{A \cap E}_{= A \setminus E^c}) + m^*(\underbrace{A \setminus E}_{= A \cap E^c})$

(*)

$\Leftrightarrow \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n \quad m^*(A) = m^*(A \setminus E^c) + m^*(A \cap E^c)$

MÄÄR

$\Leftrightarrow \quad E^c \subset \mathbb{R}^n$ MITALLINEN

(*) TARKISTUS

$x \in A \cap E \Leftrightarrow x \in A$ JA $x \in E$

$\Leftrightarrow x \in A$ JA $x \notin E^c \Leftrightarrow x \in A \setminus E^c$

$\cancel{x \in A \cap E^c \Leftrightarrow x \in A}$

$x \in A \setminus E \Leftrightarrow x \in A$ JA $x \notin E$

$\Leftrightarrow x \in A$ JA $x \in E^c$

$\Leftrightarrow x \in A \cap E^c$.

3 TEHTÄVÄ

SIIS $g = g^+ - g^-$, MISSÄ

$$g^+ = \max(g, 0) \geq 0 \quad \text{JA}$$

$$g^- = \max(-g, 0) \geq 0,$$

ON MÄÄRITELTY

$$\int g \, dm = \int g^+ \, dm - \int g^- \, dm,$$

i) OLKOON $\lambda = 0$, NYT

$$\lambda \int_E g \, dm = 0 \cdot \int_E g \, dm$$

$$= 0 \cdot \Big(\underbrace{\int_E g^+ dm}_{<\infty} - \underbrace{\int g^- \, dm}_{<\infty} \Big) = 0,$$

SAMOIN

$$\int_E \lambda g \, dm = \int_E 0 \, dm = \cancel{\quad}$$

$$= 0 \cdot \underbrace{m(E)}_{\substack{\text{VOI OLLA } \in (0,\infty) \\ \text{TAI } = \infty,}} = 0$$

SIIS VÄITE PÄTEE MUODOSSA $0 = 0$.

(ii) OLKOON $\lambda > 0$. NYT

$$\begin{cases} (\lambda g)^+ = \max(\lambda g, 0) = \lambda \max(g, 0) = \lambda g^+ \\ (\lambda g)^- = \max(-\lambda g, 0) = \lambda \max(-g, 0) = \lambda g^- . \end{cases} \quad (*)$$

SIIS

$$\int_E \lambda g \, dm \overset{\text{MÄÄR}}{=} \int_E (\lambda g)^+ \, dm - \int_E (\lambda g)^- \, dm$$

$$\overset{(*)}{=} \int_E \lambda g^+ \, dm - \int_E \lambda g^- \, dm$$

$$\overset{(1)}{=} \lambda \int_E g^+ \, dm - \lambda \int_E g^- \, dm$$

$$= \lambda \left(\int_E g^+ \, dm - \int_E g^- \, dm \right) \overset{\text{MÄÄR}}{=} \lambda \int_E g \, dm$$

(iii) OLKOON $\lambda < 0$. NYT

$$\begin{cases} (\lambda g)^+ = \max(\lambda g, 0) = \max(\underbrace{(-\lambda)}_{> 0}(-g), 0) \\ \qquad = (-\lambda) \max(-g, 0) = -\lambda g^- \\ (\lambda g)^- = \max(-\lambda g, 0) = \max(\underbrace{(-\lambda)}_{> 0} g, 0) \\ \qquad = -\lambda \max(g, 0) = -\lambda g^+ \end{cases} \quad (**)$$

SIIS

$$\int_E \lambda g \, dm \overset{\text{MÄÄR}}{=} \int_E (\lambda g)^+ \, dm - \int_E (\lambda g)^- \, dm$$

$$\overset{(**)}{=} \int_E (-\lambda) g^- \, dm - \int_E (-\lambda) g^+ \, dm$$

$$\overset{(1)}{=} (-\lambda) \int_E g^- \, dm - (-\lambda) \int_E g^+ \, dm$$

$$= \lambda \left(\int_E g^+ \, dm - \int_E g^- \, dm \right)$$

$$\overset{\text{MÄÄR}}{=} \lambda \int_E g \, dm .$$

SIIS (i) – (iii) $\Rightarrow$ VÄITE PÄTEE KAIKILLA $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. TEHTÄVÄ

$$f_i(x) = \frac{(1-x^2)^i}{\sqrt{x}}$$

KOSKA $\quad 0 < x < 1 \quad \| \, (\ )^2$

$\Rightarrow \quad 0 < x^2 < 1 \quad \| \cdot (-1)$

$\Rightarrow \quad -1 < -x^2 < 0 \quad \| +1$

$\Rightarrow \quad 0 < 1-x^2 < 1$,

NIIN $\quad 1-x^2 \in (0,1)$.

HAVAITAAN $\quad (1-x^2)^{i+1} < (1-x^2)^i \quad \forall x \in (0,1)$
$\forall i \in \mathbb{N}$,

SIIS $f_i(x)$ ON VÄHENEVÄ FUNKTIOJONO.

EI VOIDA KÄYTTÄÄ MONOTONISEN KONVERGENSSIN LAUSETTA SUORAAN.

OLKOON $\quad g_i(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{(1-x^2)^i}{\sqrt{x}}$

TÄLLÖIN $\quad g_{i+1}(x) > g_i(x) \quad \forall x \in (0,1)$
$\forall i \in \mathbb{N}$

ELI g_i ON KASVAVA JONO FUNKTIOITA

MONOTONISEN KONVERGENSSIN LAUSEEN NOJALLA

$$\lim_{i\to\infty} \int_A g_i \, dm = \int_A g \, dm,$$

MISSÄ

$$g(x) = \lim_{i\to\infty} g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \lim_{i\to\infty} \frac{\overbrace{(1-x^2)^i}^{\to 0}}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}},$$

NYT

$$\lim_{i\to\infty} \int_A f_i \, dm = \lim_{i\to\infty} \int_A \frac{(1-x^2)^i}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$= \lim_{i\to\infty} \int_A \frac{2}{\sqrt{x}} - \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{(1-x^2)^i}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \lim_{i\to\infty} \int_A (g(x) - g_i(x)) \, dm$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{i\to\infty} \left[\int_A g \, dm - \int_A g_i \, dm \right]$$

$$= \int_A g \, dm - \lim_{i\to\infty} \int_A g_i \, dm$$

$$= \int_A g \, dm - \int_A g \, dm = 0.$$

TÄYTYY VIELÄ OSOITTAA, ETTÄ

$$\int_A g \, dm < \infty \quad \text{JA} \int_A g_i \, dm < \infty,$$

JOTTA (*) OLISI OK.

1° $\int_A g\,dm = \int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{x}} = 2 \Big/_0^1 2x^{\frac{1}{2}} = 4 < \infty$

2° $|g_i(x)| = \frac{|2 - (1-x^2)^i|}{\sqrt{x}}$

$\leq \frac{2 + |1-x^2|^i}{\sqrt{x}} \leq \frac{2+1^i}{\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2}|g| = \frac{3}{2}g$

SIIS $\left|\int_A g_i\,dm\right| \leq \int_A |g_i|\,dm \leq \frac{3}{2}\int g\,dm = \frac{3}{2}\cdot 4$
$= 6 < \infty.$

1° & 2° ⇒ YHTÄLÖ ⊛ ON OK.

VÄITE SEURAA.

II TAPA VOIDAAN RATKAISTA KUTEN HARJOITUS 6 TEHTÄVÄ 8

{ MONOTONISEN KONVERGENSSIN LAUSE
{ DOMINOIDUN — " — — " —

5 TEHTÄVÄ

OLKOON $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$B = \{x \in A : f(x)^2 + a > \alpha\}$$

$$= \{x \in A : f(x)^2 > \alpha - a\} \qquad \text{OLETUS: } \alpha - a \geq 0$$

$$= \{x \in A : f(x) > \sqrt{\alpha - a}\} \cup \{x \in A : f(x) < -\sqrt{\alpha - a}\}$$

KOSKA f ON MITALLINEN, NÄMÄ JOUKOT OVAT MITALLISIA, SIIS NIIDEN YHDISTEENÄ B ON MITALLINEN TILANTEESSA $\alpha - a \geq 0$.

JOS $\alpha - a < 0$, NIIN $f(x)^2 > \alpha - a$ PÄTEE KAIKILLA $x \in A$, SIIS $B = A$ TÄSSÄ TILANTEESSA. KOSKA f ON MITALLINEN, NIIN MÄÄRITTELYJOUKKO

$$A = f^{-1}(\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\})$$

$$= \underbrace{f^{-1}(\mathbb{R})}_{\text{MIT}} \cup \underbrace{f^{-1}(\{-\infty\})}_{\text{MIT}} \cup \underbrace{f^{-1}(\{\infty\})}_{\text{MIT}}$$

ON MITALLINEN.

SIIS B ON MITALLINEN KAIKILLA $\alpha \in \mathbb{R}$, JOTEN $f^2 + a$ ON MITALLINEN.

S115

1.
- ULKOMITAN MÄÄRITELMÄ
- LEBESGUEN PEITE
- $\sup$ OMINAISUUDET

2.
- MITALLISUUDEN EHTO/ CARATHEODORYN EHTO
- JOUKKO-OPPIA $\begin{cases} A \cap E = A \setminus E^c \\ A \setminus E = A \cap E^c \end{cases}$

3.
- $\int g \, dm = \int g^+ \, dm - \int g^- \, dm$
- TAPAUKSET $\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda > 0 \end{array}\right\} \lambda \geq 0 \\ \lambda < 0 \end{array}\right.$

4.
- f_i VÄHENEVÄ JONO
- ARVAUS $\lim\limits_{i \to \infty} \int_A f_i \, dm = 0$
- MONOTONISEN KONVERGENSSIN LAUSE
- DOMINOIDUN KONVERGENSSIN LAUSE
- DOMINANTTI-FUNKTION INTEGROITUVUUDEN TARKISTUS

5.
- MITALLISUUDEN KARAKTERISOINTI JOUKKOJEN $\{x \in A : f(x) > \alpha\}$ AVULLA
- LASKESKELUA.

TAI $(f^2 + a)^{-1}(u)$, u AVOIN TARKASTELUA

~~[illegible]~~ HUOMAUTUKSIA RATKAISUISTA

1 $(-g)_+ = \max((-g),0) = \max(-g,0) = g_-$

$(-g)_- = \max(-(-g),0) = \max(g,0) = g_+$

2 PÄÄTTELY

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\frac{1}{i}}^{1-\frac{1}{i}} f_i\,dx = \int_0^1 \lim_{i\to\infty} f_i\,dx = \int_0 0\,dx = 0$$

EI VAKUUTA.

VERTAA OLKOON $g_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{i}, & \text{KUN } -i < x < i \\ 0, & \text{KUN } x \notin (-i,i) \end{cases}$

TÄLLÖIN $\lim_{i\to\infty} g_i(x) = 0$ KAIKILLA $x \in \mathbb{R}$ JA

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_i\,dm = \int_{-i}^{i} \frac{1}{i}\,dx = 2i\cdot\frac{1}{i} = 2,$$

JOTEN

$$2 = \lim_{i\to\infty} \int_{-i}^{i} g_i\,dx \neq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\lim_{i\to\infty} g_i}_{=0}\,dx = 0.$$

3) CARATHEODORYN EHTO

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \quad \forall A \subset \mathbb{R} \quad (*)$$

$\Leftrightarrow$ E MITALLINEN

KYSYMYS: RIITTÄISIKÖ TUTKIA EHTOA $(*)$

ESIM. MITALLISILLA JOUKOILLA A?

4) ULKOMITTA ON MÄÄRITELTY

$$m_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \ell(J_i) : F = \{J_i\} \text{ ON JOUKON } A \text{ LEBESGUEN PEITE} \right\}$$

INF, EI SUP

JOS $E \subset F$, NIIN

$\text{INF } F \leq \text{INF } E$

RAJOITETAAN ENEMMÄN LUKUJA, INF VOI KASVAA,

5) EHTO (1) $\int_E \alpha f \, dm = \alpha \int_E f \, dm$

OLETUKSET $\begin{cases} f \geq 0 \\ \alpha \geq 0 \end{cases}$