Mitta- ja integroimisteoria: osa a
Harjoitus 1/2019

1. Olkoot $A, B \subset \mathbf{R}$ epätyhjiä. Osoita, että $\inf A \geq \inf B$ jos $A \subset B$.

2. Olkoot $A, B \subset \mathbf{R}$ epätyhjiä. Osoita, että

$$\inf(A+B) \leq \inf A + \inf B.$$

3. Olkoon $\mathcal{A}$ mielivaltainen indeksijoukko. Osoita, että:

Jos U_α on avoin kaikilla $\alpha \in \mathcal{A}$, niin $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ on avoin.

4. Olkoon $\mathcal{A}$ mielivaltainen indeksijoukko. Osoita, että:

Jos V_α on suljettu kaikilla $\alpha \in \mathcal{A}$, niin $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$ on suljettu.

5. Todista seuraava reaalilukujonoja koskeva aputulos raja-arvon määritelmien ja täydellisyysaksioman avulla:

(1) Jos $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, niin

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \sup\{\, x_n \mid n \in \mathbf{N} \,\} \in \mathbf{R}.$$

(2) Jos $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ on kasvava ja ei ole ylhäältä rajoitettu, niin

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \sup\{\, x_n \mid n \in \mathbf{N} \,\} = +\infty.$$