Mitta- ja integroimisteoria: osa a
Harjoitus 1/2019 (Ratkaisut)

1. Olkoot $A, B \subset \mathbf{R}$ epätyhjiä. Osoita, että $\inf A \geq \inf B$ jos $A \subset B$.

Ratkaisu: Voidaan olettaa, että $\inf B > -\infty$, ts. B on alhaalta rajoitettu. Tällöin myös A on alhaalta rajoitettu. Jos $a \in A$, niin $a \geq \inf B$, sillä $\inf B$ on eräs B:n alaraja ja $A \subset B$. Siis $\inf B$ on eräs A:n alaraja. Mutta $\inf A$ on A:n suurin alaraja, joten $\inf A \geq \inf B$.

2. Olkoot $A, B \subset \mathbf{R}$ epätyhjiä. Osoita, että

$$\inf(A + B) \leq \inf A + \inf B.$$

Ratkaisu: Väite on triviaali, jos $A+B$ ei ole alhaalta rajoitettu. Näin on, jos joko A ei ole alhaalta rajoitettu tai B ei ole alhaalta rajoitettu. Voidaan siis olettaa, että $\inf A > -\infty$ ja että $\inf B > -\infty$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $a \in A$ siten, että $a < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$ ja on olemassa $b \in B$ siten, että $b < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$. Nyt

$$a + b < \inf A + \inf B + \varepsilon,$$

joten $\inf A + \inf B + \varepsilon$ ei ole $A + B$:n alaraja. Näin ollen $\inf(A + B) \leq \inf A + \inf B$.

3. Olkoon $\mathcal{A}$ mielivaltainen indeksijoukko. Osoita, että:

Jos U_α on avoin kaikilla $\alpha \in \mathcal{A}$, niin $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ on avoin.

Ratkaisu: Olkoon U_α avoin kaikilla $\alpha \in \mathcal{A}$ ja olkoon $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$. Tällöin $x \in U_{\alpha_0}$ jollekin $\alpha_0 \in \mathcal{A}$. Koska U_{α_0} on avoin, on olemassa $r > 0$ siten, että

$$B(x, r) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha.$$

Siis $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ on avoin.

4. Olkoon $\mathcal{A}$ mielivaltainen indeksijoukko. Osoita, että:

Jos V_α on suljettu kaikilla $\alpha \in \mathcal{A}$, niin $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$ on suljettu.

Ratkaisu: Olkoon V_α suljettu kaikilla $\alpha \in \mathcal{A}$. Siis $X \setminus V_\alpha$ on avoin kaikilla $\alpha \in \mathcal{A}$. Tehtävän 3 perusteella $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}}(X \setminus V_\alpha)$ on avoin. Toisaalta de Morganin lain perusteella

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \setminus V_\alpha) = X \setminus \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha,$$

joten $X \setminus \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$ on avoin. Näin ollen $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$ on suljettu.

5. Todista seuraava reaalilukujonoja koskeva aputulos raja-arvon määritelmien ja täydellisyysaksioman avulla:

(1) Jos $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, niin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{\, x_n \mid n \in \mathbf{N}\,\} \in \mathbf{R}.$$

(2) Jos $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on kasvava ja ei ole ylhäältä rajoitettu, niin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{\, x_n \mid n \in \mathbf{N}\,\} = +\infty.$$

Ratkaisu: (1) Täydellisyysaksioman nojalla luku $a := \sup\{\, x_n \mid n \in \mathbf{N}\,\} \in \mathbf{R}$ on olemassa. Olkoon $\varepsilon > 0$. Supremumin määritelmän (ks. Lemma 1.2.2) on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ siten, että $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$. Kasvavuuden ja supremumin määritelmän perusteella kaikilla $n \geq n_\varepsilon$ pätee

$$a \geq x_n \geq x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon.$$

Siis $|x_n - a| < \varepsilon$ kaikilla $n \geq n_\varepsilon$, joten määritelmän mukaan $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

(2) Jos $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ei ole ylhäältä rajoitettu, niin $\sup\{\, x_n \mid n \in \mathbf{N}\,\} = +\infty$ (sopimus). On siis osoitettava, että $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Tätä varten, olkoon $M > 0$. Koska $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ei ole ylhäältä rajoitettu, on olemassa $n_M \in \mathbf{N}$, jolle $x_{n_M} > M$. Kasvavuuden perusteella kaikilla $n \geq n_M$ pätee

$$x_n \geq x_{n_M} > M.$$

Määritelmän mukaan $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.