Mitta- ja integroimisteoria: osa a
Harjoitus 2/2019 (Ratkaisut)

1. Osoita: Jos $I \subset \mathbf{R}^n$ on n-väli, niin

$$m_n^*(I) \leq \ell(I),$$

Ratkaisu: Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa avoin n-väli J, joka sisältää välin I, ja jolle $\ell(J) < \ell(I) + \varepsilon$. Nyt $\mathcal{F} = \{J\}$ muodostaa I:n Lebesguen peitteen, jolle

$$m_n^*(I) \leq S(\mathcal{F}) = \ell(J) < \ell(I) + \varepsilon.$$

Koska $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, niin $m_n^*(I) \leq \ell(I)$.

2. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $A \subset \mathbf{R}^n$. Osoita, että on olemassa avoin joukko $B \subset \mathbf{R}^n$ siten, että $A \subset B$ ja $m_n^*(B) \leq m_n^*(A) + \varepsilon$.

Ratkaisu: Jos $m_n^*(A) = +\infty$, voidaan valita $B = \mathbf{R}^n$. Voidaan siis olettaa, että $m_n^*(A) < +\infty$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa jono avoimia n-välejä (I_i) siten, että

$$A \subset \cup_{i \in \mathbf{N}} I_i \quad \text{ja} \quad \sum_{i \in \mathbf{N}} \ell(I_i) < m_n^*(A) + \varepsilon.$$

(Ts. $\mathcal{F} := \{ I_i : i \in \mathbf{N} \}$ on joukon A Lebesguen peite.) Valitaan $B = \cup_{i \in \mathbf{N}} I_i$. Tällöin B on avoin avointen joukkojen yhdisteenä. Koska $\mathcal{F} := \{ I_i : i \in \mathbf{N} \}$ on myös joukon B Lebesguen peite, on

$$m_n^*(B) \leq \sum_{i \in \mathbf{N}} \ell(I_i) < m_n^*(A) + \varepsilon.$$

3. Osoita, että ulkomitta on siirtoinvariantti, ts. kaikilla $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $x \in \mathbf{R}^n$ pätee

$$m_n^*(x + A) = m_n^*(A),$$

missä $x + A = \{ x + a : a \in A \}$.

Ratkaisu: Olkoon $\mathcal{F} := (I_i)_{i \in \mathbf{N}}$ mielivaltainen joukon $x + A$ Lebesguen peite. Siis I_i:t ovat avoimia n-välejä siten, että $x + A \subset \cup_{i \in \mathbf{N}} I_i$. Tällöin $A \subset \cup_{i \in \mathbf{N}} (-x + I_i)$, sillä jos alkiota $a \in A$ vastaa $y_i \in I_i$ siten, että $x + a = y_i$, niin $a = -x + y_i \in -x + I_i$. Näin ollen avoimet n-välit $-x + I_i$ muodostavat joukon A Lebesguen peitteen, joten

$$m_n^*(A) \leq \sum_{i \in \mathbf{N}} \ell(-x + I_i) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \ell(I_i).$$

Infimumin määritelmän perusteella

$$m_n^*(A) \leq m_n^*(x + A).$$

Koska tämä pätee kaikille A, x, voidaan edellisessä A korvata $x + A$:lla ja x alkiolla $-x$, jolloin saadaan

$$m_n^*(x + A) \leq m_n^*(-x + x + A) = m_n^*(A).$$

Näin saadaan yhtäsuuruus $m_n^*(x + A) = m_n^*(A)$.

4. Osoita, että jokaiselle numeroituvalle joukolle $A \subset \mathbf{R}^n$ pätee $m_n^*(A) = 0$.

Ratkaisu: Olkoon $A = \{ a_i : i \in \mathbf{N} \}$ numeroituva ja merkitään $a_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja

$$I_i =]a_{1i} - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\varepsilon}{2^i}\right)^{1/n}, a_{1i} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\varepsilon}{2^i}\right)^{1/n}[\times \cdots \times]a_{ni} - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\varepsilon}{2^i}\right)^{1/n}, a_{ni} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\varepsilon}{2^i}\right)^{1/n}[.$$

Tällöin $\ell(I_i) = \frac{\varepsilon}{2^i}$ ja $(I_i)_{i \in \mathbf{N}}$ on joukon A Lebesguen peite. Edelleen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon,$$

joten ulkomitan määritelmän mukaan $m_n^*(A) \leq \varepsilon$. Koska $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, $m_n^*(A) = 0$.

5. Osoita, että $\mathbf{R}$ on ylinumeroituva.

Ratkaisu: Antiteesi: Oletetaan, että $\mathbf{R}$ on numeroituva. Tehtävän 4 nojalla $m_1^*(\mathbf{R}) = 0$. Toisaalta Lauseen 2.3.4 mukaan $m_1^*([0,1]) = 1$ ja monotonisuuden (Lause 2.3.2) nojalla

$$m_1^*(\mathbf{R}) \geq m_1^*([0,1]) = 1.$$

Ristiriita, joten väite seuraa.

6. Olkoon $m_n^*(A) = 0$ joukolle $A \subset \mathbf{R}^n$. Osoita, että kaikille $B \subset \mathbf{R}^n$ pätee

$$m_n^*(A \cup B) = m_n^*(B).$$

Ratkaisu: Monotonisuuden perusteella pätee

$$m_n^*(B) \leq m_n^*(A \cup B).$$

Toisaalta subadditiivisuuden (ja oletuksen) perusteella

$$m_n^*(A \cup B) \leq m_n^*(A) + m_n^*(B) = m_n^*(B).$$