Mitta- ja integroimisteoria: osa a
Harjoitus 3/2019

1. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen. Osoita, että $x + A$ on mitallinen kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$.

2. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen ja $B \subset \mathbf{R}^n$ ei-mitallinen siten, että $A \cap B = \emptyset$. Osoita, että $A \cup B$ ei ole mitallinen.

3. Olkoot $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $B \subset \mathbf{R}^n$ mitallisia. Osoita, että

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

4. Todista Lemma 2.4.6: Olkoot E_i mitallisia kaikilla $i \in \mathbf{N}$ ja olkoon $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$. Tällöin on olemassa erilliset ja mitalliset joukot $F_i \subset E_i$ siten, että

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

(Vihje! Valitse $F_1 = E_1,\ F_2 = E_2 \setminus E_1,\ \ldots\ , F_i = E_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} E_k$.)

5. Todista Lindelöfin lause: Olkoon $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ mielivaltainen kokoelma avoimia joukkoja. Tällöin on olemassa numeroituva indeksijoukko $\{\, \alpha_i : i \in \mathbf{N} \,\} \subset \mathcal{A}$, jolle

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} U_{\alpha_i}.$$

(Vihje! Avointen n-välien perhe $\{\, I(x, r) \,:\, x \in \mathbf{Q}^n,\ r > 0, r \in \mathbf{Q} \,\}$ on numeroituva. Tässä

$$I(x, r) =]x_1 - r, x_1 + r[\times \cdots \times]x_n - r, x_n + r[$$

on x-keskinen n-väli, jolle kaikkien sivujen pituus on $2r$.)

6. Osoita, että kaikilla $A \subset \mathbf{R}^n$ on olemassa mitallinen joukko $B \subset \mathbf{R}^n$, jolle $A \subset B$ ja $m^*(A) = m(B)$. (Vihje! Harjoitus 2; tehtävä 2.)