Mitta- ja integroimisteoria: osa a
Harjoitus 3/2019 (Ratkaisut)

1. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen. Osoita, että $x + A$ on mitallinen kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$.

Ratkaisu: Koska $A \subset \mathbf{R}^n$ on mitallinen, niin kaikilla $B \subset \mathbf{R}^n$ pätee (testijoukkona $-x + B$)

$$m^*(-x+B) = m^*((-x+B) \cap A) + m^*((-x+B) \setminus A).$$

Toisaalta m^* on siirtoinvariantti (Harjoitus 2), joten

$$m^*(-x+B) = m^*(B),$$

$$m^*((-x+B) \cap A) = m^*(x + ((-x+B) \cap A))$$

ja

$$m^*((-x+B) \setminus A) = m^*(x + ((-x+B) \setminus A)).$$

Yhdistämällä yhtälöt saadaan

$$m^*(B) = m^*(x + ((-x+B) \cap A)) + m^*(x + ((-x+B) \setminus A)).$$

Helposti nähdään, että

$$x + ((-x+B) \cap A) = B \cap (x+A) \text{ ja } x + ((-x+B) \setminus A) = B \setminus (x+A).$$

Näin ollen

$$m^*(B) = m^*(B \cap (x+A)) + m^*(B \setminus (x+A)),$$

ts. $x + A$ on mitallinen.

2. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen ja $B \subset \mathbf{R}^n$ ei-mitallinen siten, että $A \cap B = \emptyset$. Osoita, että $A \cup B$ ei ole mitallinen.

Ratkaisu: Olkoon vastoin väitettä $A \cup B$ mitallinen. Koska $A \cap B = \emptyset$, niin

$$B = (A \cup B) \setminus A = (A \cup B) \cap A^c$$

on mitallinen (lemmat 2.4.3 ja 2.4.4). Ristiriita, joten väite pätee.

3. Olkoot $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $B \subset \mathbf{R}^n$ mitallisia. Osoita, että

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

Ratkaisu: Joukko $A \cup B$ voidaan esittää erillisten joukkojen yhdisteenä muodossa

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

joten additiivisuuden nojalla

$$m(A \cup B) = m(A \cap B) + m(A \setminus B) + m(B \setminus A).$$

Toisaalta additiivisuuden perusteella

$$m(A) = m(A \cap B) + m(A \setminus B) \text{ ja } m(B) = m(A \cap B) + m(B \setminus A),$$

joten yhdistämällä yhtälöt saadaan

$$m(A)+m(B) = m(A\cap B)+m(A\setminus B)+m(A\cap B)+m(B\setminus A) = m(A\cap B)+m(A\cup B).$$

4. Todista Lemma 2.4.6: Olkoot E_i mitallisia kaikilla $i \in \mathbf{N}$ ja olkoon $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$. Tällöin on olemassa erilliset ja mitalliset joukot $F_i \subset E_i$ siten, että

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

(Vihje! Valitse $F_1 = E_1,\ F_2 = E_2 \setminus E_1,\ \dots, F_i = E_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} E_k$.)

Ratkaisu: Lemmojen 2.4.3 ja 2.4.4 perusteella on selvää, että joukot F_i ovat mitallisia. Toisaalta $F_i \subset E_i$, joten $\cup_{i=1}^{\infty} F_i \subset E$. Käänteisen inkluusion $E \subset \cup_{i=1}^{\infty} F_i$ toteamiseksi osoitetaan induktiolla, että

$$\bigcup_{i=1}^{k} E_i = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$$

kaikilla $k \in \mathbf{N}$:

(1) Väite on selvä tapauksessa $k = 1$.

(2) Oletetaan, että $\cup_{i=1}^{k} E_i = \cup_{i=1}^{k} F_i$ kun $k \in \mathbf{N}$. Osoitetaan, että

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i = \bigcup_{i=1}^{k+1} F_i.$$

Oikeanpuolen yhdiste sisältyy vasemmanpuolen yhdisteeseen koska $F_i \subset E_i$. Käänteisen inkluusion todistamiseksi olkoon $x \in \cup_{i=1}^{k+1} E_i$. Jos $x \in \cup_{i=1}^{k} E_i$, niin $x \in \cup_{i=1}^{k} F_i$ (induktio-oletus). Jos taas $x \notin \cup_{i=1}^{k} E_i$, niin määritelmän mukaan $x \in F_{k+1}$.

Lopuksi osoitetaan, että joukot F_i ovat pistevieraita.

AT: On olemassa $j < i$ siten, että $F_j \cap F_i \neq \emptyset$. Siis on olemassa $x \in F_j \cap F_i$. Tällöin $x \in E_j$, mutta toisaalta $x \in F_i = E_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} E_k$. Tämä on ristiriita, sillä $j \in \{ 1, \dots, i-1 \}$.

5. Todista Lindelöfin lause: Olkoon $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ mielivaltainen kokoelma avoimia joukkoja. Tällöin on olemassa numeroituva indeksijoukko $\{ \alpha_i : i \in \mathbf{N} \} \subset \mathcal{A}$, jolle

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} U_{\alpha_i}.$$

(Vihje! Avointen n-välien perhe $\{ I(x,r) : x \in \mathbf{Q}^n,\ r > 0, r \in \mathbf{Q} \}$ on numeroituva. Tässä

$$I(x,r) =]x_1 - r, x_1 + r[\times \cdots \times]x_n - r, x_n + r[$$

on x-keskinen n-väli, jolle kaikkien sivujen pituus on $2r$.)

Ratkaisu: Merkitään

$$\mathcal{I} = \{\, I(x,r) : x \in \mathbf{Q}^n,\ r > 0, r \in \mathbf{Q} \,\}.$$

Tällöin $\mathcal{I}$ on numeroituva, sillä se voidaan kuvata bijektiivisesti $\mathbf{Q}^{n+1}$:n osajoukolle ja $\mathbf{Q}^{n+1}$ on numeroituva numeroituvien joukkojen äärellisenä karteesisena tulona (olennaisesti sama asia kuin $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$:n numeroituvuus).

Olkoon $U = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ ja olkoon $x \in U$. Tällöin on olemassa α_x siten, että $x \in U_{\alpha_x}$. Koska U_{α_x} on avoin, on olemassa avoin pallo $B(x, r_x)$, jolle pätee $x \in B(x, r_x) \subset U_{\alpha_x}$. Koska $\mathbf{Q}^n$ on tiheä avaruudessa $\mathbf{R}^n$, löydetään $I_x \in \mathcal{I}$ siten, että $x \in I_x \subset B(x, r_x)$. Olkoon

$$\mathcal{I}' = \{\, I_x : x \in U \,\}.$$

Koska $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$, niin $\mathcal{I}'$ on numeroituva. Merkitään $\mathcal{I}' = \{\, I_i : i \in \mathbf{N} \,\}$. Valitaan jokaista joukkoa $I_i \in \mathcal{I}'$ kohti jokin U_{α_i} siten, että $I_i \subset U_{\alpha_i}$. Tällöin kokoelma $(U_{\alpha_i})_{i \in \mathbf{N}}$ on numeroituva ja

$$U \subset \bigcup_{i \in \mathbf{N}} I_i \subset \bigcup_{i \in \mathbf{N}} U_{\alpha_i} \subset U.$$

Väite seuraa.

6. Osoita, että kaikilla $A \subset \mathbf{R}^n$ on olemassa mitallinen joukko $B \subset \mathbf{R}^n$, jolle $A \subset B$ ja $m^*(A) = m(B)$. (Vihje! Harjoitus 2;tehtävä 2.)

Ratkaisu: Harjoituksen 2; tehtävä 2 nojalla kaikilla $i \in \mathbf{N}$ on olemassa avoin joukko G_i siten, että $A \subset G_i$ ja $m(G_i) < m^*(A) + \frac{1}{i}$. Olkoon $G = \cap_{i \in \mathbf{N}} G_i$. Tällöin G on mitallinen mitallisten joukkojen numeroituvana leikkauksena ja

$$m(G) \leq m(G_i) < m^*(A) + \frac{1}{i}$$

kaikilla $i \in \mathbf{N}$. Tällöin välttämättä $m(G) \leq m^*(A)$. Käänteinen epäyhtälö $m^*(A) \leq m(G)$ pätee sillä $A \subset G$.