Mitta- ja integroimisteoria: osa a
Harjoitus 4/2019

1. Osoita: Jos $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : A \to \mathbf{R}^m$ on mitallinen, niin $f^{-1}(B)$ on mitallinen kaikille Borelin joukoille $B \subset \mathbf{R}^m$. (Vihje! Osoita, että $\Gamma = \{\, V \subset \mathbf{R}^m : f^{-1}(V) \text{ on mitallinen} \,\}$ on σ-algebra, joka sisältää avoimet joukot.)

2. Olkoon $f : A \to \mathbf{R}^m$ mitallinen, $A \subset \mathbf{R}^n$, ja olkoon $g : B \to \mathbf{R}^k$ jatkuva siten, että $f(A) \subset B \subset \mathbf{R}^m$. Osoita, että yhdistetty kuvaus $g \circ f$ on mitallinen.

3. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen. Osoita, että $f^{-1}(\{y\})$ on mitallinen kaikilla $y \in \overline{\mathbf{R}}$.

4. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : A \to \mathbf{R}$ mitallinen siten, että $f(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$. Osoita, että $1/f$ on mitallinen.

5. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen. Osoita, että

(a) $|f|$ on mitallinen;

(b) $|f|^a$ on mitallinen kaikilla $a > 0$ jos sovitaan laskusäännöstä $(\infty)^a = \infty$.

6. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen. Osoita, että $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ on mitallinen jos ja vain jos $f^{-1}(]q, +\infty])$ on mitallinen kaikilla $q \in \mathbf{Q}$.