Mitta- ja integroimisteoria: osa a
Harjoitus 4/2019 (Ratkaisut)

1. Osoita: Jos $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : A \to \mathbf{R}^m$ on mitallinen, niin $f^{-1}(B)$ on mitallinen kaikille Borelin joukoille $B \subset \mathbf{R}^m$. (Vihje! Osoita, että $\Gamma = \{ V \subset \mathbf{R}^m : f^{-1}(V) \text{ on mitallinen} \}$ on σ-algebra, joka sisältää avoimet joukot.)

Ratkaisu: Osoitetaan, että Γ on σ-algebra:

(1) Koska $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, niin $\emptyset \in \Gamma$.

(2) Olkoon $V \in \Gamma$, ts. $f^{-1}(V)$ on mitallinen. Koska A on mitallinen, $f^{-1}(V^c) = A \setminus f^{-1}(V)$ on mitallinen, ja siis $V^c \in \Gamma$.

(3) Olkoot $V_i \in \Gamma$, $i \in \mathbf{N}$. Koska $f^{-1}(\cup_{i \in \mathbf{N}} V_i) = \cup_{i \in \mathbf{N}} f^{-1}(V_i)$ on mitallinen mitallisten joukkojen numeroituvana yhdisteenä, niin $\cup_{i \in \mathbf{N}} V_i \in \Gamma$.

Toisaalta Γ sisältää avoimet joukot, sillä jos $V \subset \mathbf{R}^m$ on avoin, niin $f^{-1}(V)$ on mitallinen f:n mitallisuuden nojalla. Mutta Borelin sigma-algebra on leikkaus niistä σ-algebroista, jotka sisältävät avoimet joukot, joten $B \in \Gamma$ kaikille Borelin joukoille $B \subset \mathbf{R}^m$. Näin ollen $f^{-1}(B)$ on mitallinen kaikille Borelin joukoille $B \subset \mathbf{R}^m$.

2. Olkoon $f : A \to \mathbf{R}^m$ mitallinen, $A \subset \mathbf{R}^n$, ja olkoon $g : B \to \mathbf{R}^k$ jatkuva siten, että $f(A) \subset B \subset \mathbf{R}^m$. Osoita, että yhdistetty kuvaus $g \circ f$ on mitallinen.

Ratkaisu: Olkoon $U \subset \mathbf{R}^k$ avoin. Tällöin $g^{-1}(U)$ on avoin joukossa B koska g on jatkuva. Näin ollen $g^{-1}(U) = B \cap V$, missä $V \subset \mathbf{R}^m$ on avoin. Toisaalta

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) = f^{-1}(B \cap V) = f^{-1}(V),$$

sillä $f(A) \subset B$. Koska $f^{-1}(V) \subset \mathbf{R}^n$ on mitallinen (f on mitallinen), niin $g \circ f$ on mitallinen.

3. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen. Osoita, että $f^{-1}(\{y\})$ on mitallinen kaikilla $y \in \overline{\mathbf{R}}$.

Ratkaisu: Olkoon $y \in \mathbf{R}$. Kaikilla $i \in \mathbf{N}$ alkukuvajoukko $f^{-1}(]y - \frac{1}{i}, y + \frac{1}{i}[)$ on mitallinen määritelmän mukaan. Toisaalta

$$f^{-1}(\{y\}) = \bigcap_{i \in \mathbf{N}} f^{-1}(]y - \frac{1}{i}, y + \frac{1}{i}[)$$

on mitallisten joukkojen numeroituvana leikkauksena mitallinen. Tapaukset $y = \pm\infty$ ovat selviä määritelmän nojalla.

4. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : A \to \mathbf{R}$ mitallinen siten, että $f(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$. Osoita, että $1/f$ on mitallinen.

Ratkaisu: Olkoon $\alpha \in \mathbf{R}$. Tällöin

$$\{ x : \frac{1}{f(x)} < \alpha \} =$$
$$(\{ x : f(x) > 0 \} \cap \{ x : 1 < \alpha f(x) \}) \bigcup (\{ x : f(x) < 0 \} \cap \{ x : 1 > \alpha f(x) \})$$

on mitallinen Lauseen 2.6.5 nojalla, sillä f ja αf ovat mitallisia (Lause 2.6.6).

5. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen. Osoita, että

(a) $|f|$ on mitallinen;

(b) $|f|^a$ on mitallinen kaikilla $a > 0$ jos sovitaan laskusäännöstä $(\infty)^a = \infty$.

Ratkaisu: (a) Olkoon $\alpha \in \mathbf{R}$. Jos $\alpha \geq 0$, niin

$$\{ x \in A : |f|(x) = |f(x)| > \alpha \} = \{ x \in A : f(x) > \alpha \} \cup \{ x \in A : f(x) < -\alpha \}.$$

Oikeanpuoleisen yhdisteen molemmat joukot ovat f:n mitallisuuden nojalla mitallisia, joten vasemmanpuolen joukko on mitallinen.

Toisaalta, jos $\alpha < 0$, niin

$$\{ x \in A : |f|(x) = |f(x)| > \alpha \} = A$$

on triviaalisti mitallinen. Väite seuraa Lauseesta 2.6.5.

(b) Olkoon $\alpha \in \mathbf{R}$. Jos $\alpha \geq 0$, niin

$$\{ x \in A : |f|^a(x) = |f(x)|^a > \alpha \} = \{ x \in A : |f(x)| > (\alpha)^{1/a} \}.$$

Oikeanpuolen joukko on $|f|$:n mitallisuuden nojalla mitallinen. Toisaalta, jos $\alpha < 0$, niin

$$\{ x \in A : |f(x)|^a > \alpha \} = A$$

on mitallinen. Väite seuraa Lauseesta 2.6.5.

6. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen. Osoita, että $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ on mitallinen jos ja vain jos $f^{-1}(]q, +\infty])$ on mitallinen kaikilla $q \in \mathbf{Q}$.

Ratkaisu: ($\Rightarrow$). Jos $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ on mitallinen ja $q \in \mathbf{Q}$, niin

$$f^{-1}(]q, +\infty]) = \{ x \in A : f(x) > q \}$$

on mitallinen Lauseen 2.6.5 nojalla. Tämä nähdään myös suoraan mitallisen funktion määritelmästä kirjoittamalla

$$f^{-1}(]q, +\infty]) = f^{-1}(]q, +\infty[) \cup f^{-1}(+\infty).$$

($\Leftarrow$). Oletetaan, että $f^{-1}(]q, +\infty])$ on mitallinen kaikilla $q \in \mathbf{Q}$. Olkoon $\alpha \in \mathbf{R}$. Tällöin

$$\{ x \in A : f(x) \geq \alpha \} = \bigcap_{q \in \mathbf{Q}, q < \alpha} \{ x \in A : f(x) > q \}.$$

Koska oikeanpuolen joukko on mitallisten joukkojen (oletus) numeroituvana leikkauksena mitallinen, funktion f mitallisuus seuraa Lauseesta 2.6.5.