Mitta- ja integroimisteoria: osa a
Harjoitus 5/2019

1. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kasvava. Osoita, että f on mitallinen. (Vihje! Ilmaise joukko $\{ x \in \mathbf{R} : f(x) \geq \alpha \}$ luvun $a := \inf\{ x \in \mathbf{R} : f(x) \geq \alpha \}$ avulla.)

2. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : E \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen. Osoita, että $f\chi_E : \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ on mitallinen.

3. Olkoot $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ ja $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ lukujonoja joukossa $\mathbf{R}$. Osoita, että aina pätee

$$\limsup_{i\to\infty}(a_i + b_i) \leq \limsup_{i\to\infty} a_i + \limsup_{i\to\infty} b_i$$

olettaen, että oikeanpuoleinen summa on määritelty.

4. Olkoon $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ lukujono joukossa $\mathbf{R}$ siten, että $\liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i \in \mathbf{R}$. Osoita, että tällöin

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i.$$

5. Olkoot $f = \sum_{i=1}^{l} a_i\chi_{A_i}$ ja $g = \sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{B_j}$ yksinkertaisia funktioita, missä $a_i, b_j \in \mathbf{R}_+$, joukot A_i muodostavat $\mathbf{R}^n$:n osituksen ja joukot B_j muodostavat $\mathbf{R}^n$:n osituksen. Esitä integraali $\int \max(f,g)\,dm$ lukujen $a_i, b_j \in \mathbf{R}_+$ ja joukkojen A_i, B_j avulla.

6. Olkoon f yksinkertainen funktio ja $E \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen. Osoita, että

$$\int_E \alpha f\,dm = \alpha \int_E f\,dm$$

kaikilla $\alpha \in \mathbf{R}_+$.