Mitta- ja integroimisteoria: osa a
Harjoitus 5/2019 (Ratkaisut)

1. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kasvava. Osoita, että f on mitallinen. (Vihje! Ilmaise joukko $\{ x \in \mathbf{R} : f(x) \geq \alpha \}$ luvun $a := \inf\{ x \in \mathbf{R} : f(x) \geq \alpha \}$ avulla.)

Ratkaisu: Olkoon $\alpha \in \mathbf{R}$. Koska voidaan olettaa, että joukko

$$E_\alpha := \{ x \in \mathbf{R} : f(x) \geq \alpha \}$$

on epätyhjä, on olemassa

$$a := \inf E_\alpha \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}.$$

1) Olkoon $a = -\infty$. Koska E_α ei ole alhaalta rajoitettu, niin kaikilla $x \in \mathbf{R}$ on olemassa $y \in E_\alpha$ siten, että $y < x$. Siis $f(y) \geq \alpha$. Kasvavuuden perusteella $f(x) \geq f(y) \geq \alpha$, joten $x \in E_\alpha$. Nyt $E_\alpha = \mathbf{R}$ ja siten mitallinen.

2) Olkoon $a \in \mathbf{R}$. Osoitetaan, että $]a, \infty[\subset E_\alpha$: Jos $x \in]a, \infty[$, niin infimumin määritelmän (x ei voi olla alaraja) nojalla löytyy $y \in E_\alpha$ siten, että $y < x$. Kasvavuuden perusteella $\alpha \leq f(y) \leq f(x)$, joten $x \in E_\alpha$.

On selvää, että mikään luku $x < a$ ei kuulu joukkoon E_α. Siispä joko $E_\alpha =]a, \infty[$ tai $E_\alpha = [a, \infty[$. Joka tapauksessa E_α on mitallinen.

2. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : E \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen. Osoita, että $f\chi_E : \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ on mitallinen.

Ratkaisu: Tässä $f\chi_E$ tarkoittaa funktion f nollajatkoa. Koska f on E:ssä mitallinen, niin E on mitallinen. Olkoon $\alpha \in \mathbf{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned} E_\alpha :&= \{ x \in \mathbf{R}^n : (f\chi_E)(x) > \alpha \} \\ &= \{ x \in E : (f\chi_E)(x) > \alpha \} \cup \{ x \in \mathbf{R}^n \setminus E : (f\chi_E)(x) > \alpha \}. \end{aligned}$$

Tässä

$$\{ x \in E : (f\chi_E)(x) > \alpha \} = \{ x \in E : f(x) > \alpha \}$$

on mitallinen oletuksen nojalla. Toisaalta $\{ x \in \mathbf{R}^n \setminus E : (f\chi_E)(x) > \alpha \}$ on joko $\mathbf{R}^n \setminus E$ (jos $\alpha < 0$) tai $\emptyset$ (jos $\alpha \geq 0$). Siispä $\{ x \in \mathbf{R}^n \setminus E : (f\chi_E)(x) > \alpha \}$ on mitallinen ja siten E_α on mitallinen. Näin ollen $f\chi_E$ on mitallinen joukossa $\mathbf{R}^n$.

3. Olkoot $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ ja $(b_i)_{i \in \mathbf{N}}$ lukujonoja joukossa $\mathbf{R}$. Osoita, että aina pätee

$$\limsup_{i \to \infty} (a_i + b_i) \leq \limsup_{i \to \infty} a_i + \limsup_{i \to \infty} b_i$$

olettaen, että oikeanpuoleinen summa on määritelty.

Ratkaisu: Olkoot

$$\begin{aligned} c_k &= \sup\{ a_i : i \geq k \}; \\ d_k &= \sup\{ b_i : i \geq k \}; \\ e_k &= \sup\{ a_i + b_i : i \geq k \}, \end{aligned}$$

missä $k \in \mathbf{N}$. Huomaa, että jonot (c_k), (d_k) ja (e_k) ovat väheneviä ja reaaliarvoisia. On siis osoitettava, että

$$\lim_{k\to\infty} e_k \leq \lim_{k\to\infty} c_k + \lim_{k\to\infty} d_k.$$

Kaikilla $k \in \mathbf{N}$ ja $i \geq k$ pätee $a_i + b_i \leq c_k + d_k$, koska supremum on yläraja. Edelleen kaikilla $k \in \mathbf{N}$

$$e_k \leq c_k + d_k \ (*)$$

pienimmän ylärajan määritelmän nojalla.

Ratkaisu 1: Koska vähenevillä jonoilla (e_k) ja $(c_k + d_k)$ on raja-arvot, raja-arvon säilyminen epäyhtälössä sanoo, että

$$e := \lim_{k\to\infty} e_k \leq \lim_{k\to\infty} (c_k + d_k).$$

Koska oletuksen nojalla $\lim_{k\to\infty} c_k + \lim_{k\to\infty} d_k =: c+d$ ei ole määrittelemätöntä muotoa $\infty - \infty$, voidaan summan raja-arvo kirjoittaa raja-arvojen summana ja siten

$$e \leq \lim_{k\to\infty} (c_k + d_k) = \lim_{k\to\infty} c_k + \lim_{k\to\infty} d_k = c + d.$$

Ratkaisu 2 (tarkempi perustelu): Tehdään antiteesi

$$e := \lim_{k\to\infty} e_k > \lim_{k\to\infty} c_k + \lim_{k\to\infty} d_k =: c + d.$$

Tässä välttämättä $c, d \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ ja $e \in \mathbf{R}$. Raja-arvon määritelmästä seuraa, että on olemassa $k_0 \in \mathbf{N}$ siten, että

$$e > c_k + d_k$$

kaikilla $k \geq k_0$. Tähän päästään riippumatta siitä ovatko c, d, e äärellisiä vai äärettömiä. Tarkkaan ottaen $k_0 = \max(k_1, k_2)$ missä k_i on valittu sopivasti jonojen (c_k) ja (d_k) raja-arvojen määritelmää soveltaen.

Koska (e_k) on vähenevä, pätee

$$e_k \geq e > c_k + d_k$$

kun $k \geq k_0$. Ristiriita epäyhtälön $(*)$ kanssa.

4. Olkoon $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ lukujono joukossa $\mathbf{R}$ siten, että $\liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i \in \mathbf{R}$. Osoita, että tällöin

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i.$$

Ratkaisu: Olkoon $a := \liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i \in \mathbf{R}$. Siis

$$\lim_{k\to\infty} b_k = a = \lim_{k\to\infty} c_k,$$

missä $b_k = \sup\{\, a_i : i \geq k \,\}$ ja $c_k = \inf\{\, a_i : i \geq k \,\}$. Tässä jono (b_k) on vähenevä, jono (c_k) on kasvava ja $c_k \leq b_k$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$. Raja-arvon määritelmän mukaan kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$ siten, että

$$0 \leq b_k - a < \varepsilon$$

kun $k \geq k_1$ ja

$$0 \leq a - c_k < \varepsilon$$

kun $k \geq k_2$. Valitsemalla $k_0 = \max(k_1, k_2)$ saadaan arvoilla $i \geq k_0$

$$a - \varepsilon < c_{k_0} \leq a_i \leq b_{k_0} < a + \varepsilon.$$

Näin ollen $|a_i - a| < \varepsilon$ kaikilla $i \geq k_0$ eli $\lim_{i\to\infty} a_i = a$.

5. Olkoot $f = \sum_{i=1}^{l} a_i \chi_{A_i}$ ja $g = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ yksinkertaisia funktioita, missä $a_i, b_j \in \mathbf{R}_+$, joukot A_i muodostavat $\mathbf{R}^n$:n osituksen ja joukot B_j muodostavat $\mathbf{R}^n$:n osituksen. Esitä integraali $\int \max(f, g)\, dm$ lukujen $a_i, b_j \in \mathbf{R}_+$ ja joukkojen A_i, B_j avulla.

Ratkaisu: Joukot $A_i \cap B_j$ muodostavat erään $\mathbf{R}^n$:n osituksen, kun $i = 1, \ldots, l$ ja $j = 1, \ldots, m$. Toisaalta $\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x)) = \max(a_i, b_j)$, kun $x \in A_i \cap B_j$. Näin ollen

$$\int \max(f, g)\, dm = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \max(a_i, b_j) m(A_i \cap B_j).$$

6. Olkoon f yksinkertainen funktio ja $E \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen. Osoita, että

$$\int_E \alpha f\, dm = \alpha \int_E f\, dm$$

kaikilla $\alpha \in \mathbf{R}_+$.

Ratkaisu: Olkoon $f = \sum_{i=1}^{l} a_i \chi_{A_i}$, missä $a_i \in \mathbf{R}_+$ ja joukot A_i muodostavat $\mathbf{R}^n$:n osituksen. Tällöin $\alpha f = \sum_{i=1}^{l} \alpha a_i \chi_{A_i}$ ja Lemman 3.1.6 nojalla

$$\int_E \alpha f\, dm = \sum_{i=1}^{l} \alpha a_i m(A_i \cap E) = \alpha \sum_{i=1}^{l} a_i m(A_i \cap E) = \alpha \int_E f\, dm.$$