Mitta- ja integroimisteoria: osa a
Harjoitus 6/2019

1. Olkoon $f \in \mathcal{Y}$ ja olkoon $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \mathbf{R}^n$ kasvava jono mitallisia joukkoja. Osoita, että

$$\int_{\cup_{i\in\mathbf{N}} E_i} f\,dm = \lim_{i\to\infty} \int_{E_i} f\,dm.$$

(Vihje! Lemma 3.1.7 ja Lause 2.5.1.)

2. Olkoon $f : A \to \mathbf{R}$ mitallinen funktio siten, että $0 \le f \le M$ joukossa $A \subset \mathbf{R}^n$ vakiolle $M > 0$. Osoita, että

$$\int_A f\,dm \le Mm(A).$$

3. Olkoon $f : A \to [0, +\infty]$ mitallinen funktio siten, että $m(\{\, x \in A : f(x) > 0 \,\}) > 0$. Osoita, että $\int_A f > 0$. (Vihje! Osoita mitan konvergenssia käyttäen, että $m(\{\, x \in A : f(x) > \frac{1}{i} \,\}) > 0$ jollekin $i \in \mathbf{N}$.)

4. Olkoon $f : A \to [0, +\infty]$ mitallinen funktio siten, että $\int_A f\,dm < \infty$. Osoita, että $f < \infty$ m.k. joukossa A.

5. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ ja olkoot $f_i : E \to [0, +\infty]$ mitallisia kaikilla $i \in \mathbf{N}$. Osoita, että

$$\int_E \sum_{i=1}^{\infty} f_i\,dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E f_i\,dm.$$

(Vihje! Ks. lauseet 3.2.4 ja 3.2.7.)

6. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ ja olkoot $f, g : E \to [0, +\infty]$ mitallisia. Osoita: Jos $f = g$ m.k. joukossa E, niin

$$\int_E f\,dm = \int_E g\,dm.$$

7. Olkoot joukot $E_i \subset \mathbf{R}^n$ mitallisia ja pareittain pistevieraita sekä olkoon $f : \cup_{i=1}^{\infty} E_i \to [0, +\infty]$ mitallinen. Todista Lemman 3.1.7 avulla Lauseen 3.2.10 väitteen epäyhtälö

$$\int_{\cup_{i=1}^{\infty} E_i} f\,dm \le \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,dm.$$

8. Olkoon $A =]0, 1[$ ja

$$f_i(x) = \frac{(1 - x^2)^i}{\sqrt{x}}.$$

Osoita, että $\lim_{i\to\infty} \int_A f_i\,dm = \int_A \lim_{i\to\infty} f_i\,dm = 0$.