Mitta- ja integroimisteoria: osa a
Harjoitus 6/2019 (Ratkaisut)

1. Olkoon $f \in \mathcal{Y}$ ja olkoon $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \mathbf{R}^n$ kasvava jono mitallisia joukkoja. Osoita, että

$$\int_{\cup_{i\in\mathbf{N}} E_i} f\, dm = \lim_{i\to\infty} \int_{E_i} f\, dm.$$

(Vihje! Lemma 3.1.7 ja Lause 2.5.1.)

Ratkaisu: Kirjoitetaan $\cup_{i\in\mathbf{N}} E_i$ pareittain pistevieraana yhdisteenä muodossa

$$\cup_{i\in\mathbf{N}} E_i = \cup_{i\in\mathbf{N}} (E_i \setminus E_{i-1}),$$

missä asetetaan $E_0 = \emptyset$. Tällöin Lemman 3.1.7 nojalla

$$\begin{aligned}\int_{\cup_{i\in\mathbf{N}} E_i} f\, dm &= \sum_{i\in\mathbf{N}} \int_{E_i\setminus E_{i-1}} f\, dm = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \int_{E_i\setminus E_{i-1}} f\, dm \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\cup_{i=1}^{k}(E_i\setminus E_{i-1})} f\, dm = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f\, dm.\end{aligned}$$

2. Olkoon $f : A \to \mathbf{R}$ mitallinen funktio siten, että $0 \le f \le M$ joukossa $A \subset \mathbf{R}^n$ vakiolle $M > 0$. Osoita, että

$$\int_A f\, dm \le Mm(A).$$

Ratkaisu. Olkoon $\phi \in \mathcal{Y}$ siten, että $\phi \le f\chi_A$. Tällöin $\phi \le M\chi_A$ ja integraalin monotonisuuden nojalla (Lemma 3.1.9 (1))

$$\int \phi\, dm \le \int M\chi_A\, dm = Mm(A).$$

Tässä yksinkertaisen funktion $M\chi_A$ integraali saadaan esityksestä

$$M\chi_A = M\chi_A + 0 \cdot \chi_{\mathbf{R}^n\setminus A}.$$

Ottamalla supremum yli funktioiden ϕ saadaan

$$\int_A f\, dm \le Mm(A).$$

3. Olkoon $f : A \to [0, +\infty]$ mitallinen funktio siten, että $m(\{\, x \in A : f(x) > 0 \,\}) > 0$. Osoita, että $\int_A f > 0$. (Vihje! Osoita mitan konvergenssia käyttäen, että $m(\{\, x \in A : f(x) > \frac{1}{i} \,\}) > 0$ jollekin $i \in \mathbf{N}$.)

Ratkaisu. Olkoon $E = \{\, x \in A : f(x) > 0 \,\}$ ja $E_i = \{\, x \in A : f(x) > \frac{1}{i} \,\}$, $i \in \mathbf{N}$. Koska $E = \cup_{i\in\mathbf{N}} E_i$ ja $E_i \subset E_{i+1}$ kaikilla $i \in \mathbf{N}$, niin Lauseen 2.5.1 nojalla

$$0 < m(E) = \lim_{i\to\infty} m(E_i).$$

Raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa $i_0 \in \mathbf{N}$ siten, että $m(E_i) > 0$ kaikilla $i \geq i_0$. (Jos $m(E) \in \mathbf{R}$, niin esimerkiksi $m(E_i) > \frac{m(E)}{2}$ kaikilla $i \geq i_0$. Jos taas $m(E) = \infty$, niin esimerkiksi $m(E_i) > 100$ kaikilla $i \geq i_0$.)

Olkoon $\phi \in \mathcal{Y}$ siten, että $\phi = \frac{1}{i_0}$ joukossa E_{i_0} ja $\phi = 0$ komplementissa $\mathbf{R}^n \setminus E_{i_0}$. Tällöin $\phi \leq f\chi_A$, joten integraalin $\int_A f\,dm$ määritelmän nojalla

$$\int_A f\,dm \geq \int \phi\,dm = \frac{m(E_{i_0})}{i_0} > 0.$$

Huomaa, että tehtävän väite voidaan ekvivalentisti ilmaista muodossa: Jos $\int_A f = 0$, niin $f = 0$ m.k. joukossa A.

4. Olkoon $f : A \to [0, +\infty]$ mitallinen funktio siten, että $\int_A f\,dm < \infty$. Osoita, että $f < \infty$ m.k. joukossa A.

Ratkaisu: Tehdään antiteesi $m(E) > 0$ joukolle $E = \{\, x \in A : f(x) = \infty \,\}$. Olkoon $\phi_i \in \mathcal{Y}$ siten, että funktio $\phi_i = i$ joukossa E ja 0 muualla. Tällöin $\phi_i \leq f\chi_A$ ja

$$\int \phi_i\,dm = im(E)$$

kaikilla $i \in \mathbf{N}$. Näin ollen joukko

$$\left\{ \int \phi\,dm \mid \phi \in \mathcal{Y} \text{ ja } \phi \leq f\chi_A \right\}$$

ei ole ylhäältä rajoitettu, joten $\int_A f\,dm = \infty$. Ristiriita.

5. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ ja olkoot $f_i : E \to [0, +\infty]$ mitallisia kaikilla $i \in \mathbf{N}$. Osoita, että

$$\int_E \sum_{i=1}^{\infty} f_i\,dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E f_i\,dm.$$

(Vihje! Lauseet 3.2.4 ja 3.2.7.)

Ratkaisu: Osasummat $\sum_{i=1}^{k} f_i$ muodostavat kasvavan jonon joukossa E. Näin ollen lauseiden 3.2.4 ja 3.2.7 nojalla

$$\begin{aligned}\int_E \sum_{i=1}^{\infty} f_i\,dm &= \int_E \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} f_i\,dm = \lim_{k\to\infty} \int_E \sum_{i=1}^{k} f_i\,dm \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \int_E f_i\,dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E f_i\,dm.\end{aligned}$$

6. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ ja olkoot $f, g : E \to [0, +\infty]$ mitallisia. Osoita: Jos $f = g$ m.k. joukossa E, niin

$$\int_E f\,dm = \int_E g\,dm.$$

Ratkaisu: Olkoon $A = \{ x \in E : f(x) \neq g(x) \}$. Oletuksen mukaan $m(A) = 0$. Integraalin additiivisuuden nojalla voidaan kirjoittaa

$$\int_E f\,dm = \int_A f\,dm + \int_{E\setminus A} f\,dm = 0 + \int_{E\setminus A} g\,dm = \int_A g\,dm + \int_{E\setminus A} g\,dm = \int_E g\,dm.$$

7. Olkoot joukot $E_i \subset \mathbf{R}^n$ mitallisia ja pareittain pistevieraita sekä olkoon $f : \cup_{i=1}^{\infty} E_i \to [0, +\infty]$ mitallinen. Todista Lemman 3.1.7 avulla Lauseen 3.2.10 väitteen epäyhtälö

$$\int_{\cup_{i=1}^{\infty} E_i} f\,dm \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,dm.$$

Ratkaisu: Olkoon $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ ja olkoon $\phi \in \mathcal{Y}$ siten, että $\phi \leq f\chi_E$. Lemman 3.1.7 mukaan

$$\int_E \phi\,dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \phi\,dm \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,dm,$$

sillä ϕ kelpaa "testifunktioksi"integraalin $\int_{E_i} f\,dm$ määritelmään. Ottamalla supremum yli funktioiden ϕ saadaan

$$\int_E f\,dm \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,dm.$$

8. Olkoon $A =]0, 1[$ ja

$$f_i(x) = \frac{(1 - x^2)^i}{\sqrt{x}}.$$

Osoita, että $\lim_{i\to\infty} \int_A f_i\,dm = \int_A \lim_{i\to\infty} f_i\,dm = 0$.

Ratkaisu: Jos $x \in A$, niin $f_i(x) \to 0$ kun $i \to \infty$. Siis pisteittäinen rajafunktio on $f = 0$ joukossa A. Toisaalta kaikilla $x \in A$ ja $i \in \mathbf{N}$ pätee

$$|f_i(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

joten väite seuraa dominoidun konvergenssin lauseesta kunhan osoitetaan, että funktio $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ on integroituva joukossa A. Merkitään

$$g_i = g\chi_{[\frac{1}{i},1[}, \quad i \in \mathbf{N}.$$

Jono (g_i) on kasvava ja $g(x) = \lim_{i\to\infty} g_i(x)$ kaikilla $x \in A$. Monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\int_A g\,dm = \lim_{i\to\infty} \int_A g_i\,dm.$$

Toisaalta

$$\int_A g_i\,dm = \int_{]0,\frac{1}{i}[} 0\,dm + \int_{[\frac{1}{i},1[} g\,dm = \int_{\frac{1}{i}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{i}} \to 2,$$

kun $i \to \infty$. Siis $\int_A g\,dm = 2$ ja väite seuraa.