

# Mitta- ja integroimisteoria a

Luentomoniste (2008): Visa Latvala

Kevät 2019

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Kertausta: merkintöjä, käsitteitä ja aputuloksia</b>	<b>3</b>
1.1	Joukkokokoelmat . . . . .	3
1.2	Supremum ja infimum . . . . .	4
1.3	Numeroituvat joukot . . . . .	6
1.4	Avoimet ja suljetut joukot avaruudessa $\mathbf{R}^n$ . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Lebesguen mitta euklidisessa avaruudessa</b>	<b>8</b>
2.1	Ääretöntä koskevia sopimuksia . . . . .	8
2.2	Johdanto . . . . .	8
2.3	Lebesguen ulkomitta . . . . .	9
2.4	Mitalliset joukot . . . . .	13
2.5	Mitan konvergenssi . . . . .	18
2.6	Mitalliset funktiot . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Lebesguen integraali</b>	<b>28</b>
3.1	Yksinkertaiset funktiot . . . . .	28
3.2	Ei-negatiivisen funktion integraali . . . . .	32
3.3	Lebesguen integraali vaihtuvamerkkiselle funktiolle . . . . .	39

# Lukijalle

Lebesguen integrointiteoriaa voi pitää modernin analyysin tutkimuksen kulmakivenä. Teoriassa integroituvuuden käsite on laajempi kuin vanhemmassa Riemannin integraalin tapauksessa. Tämän seurauksena voidaan mm. täsmälleen karakterisoida niiden funktioiden luokka, joille analyysin peruslause on voimassa. Edelleen erilaiset konvergenssilauseet voidaan esittää yleisessä käyttökelpoisessa muodossa.

Kurssin tarkoituksena on esittää huolella Lebesguen integrointiteorian perusteet avaruudessa  $\mathbf{R}^n$ . Varsinainen kurssi alkaa luvusta 2; lukuun 1 on koottu keskeiset taustatiedot, jotka voidaan pitää tunnettuna aiemmilta kursseilta. Tämän vuoksi luvun 1 väitteitä on perusteltu vain esimerkin omaisesti.

## 1 Kertausta: merkintöjä, käsitteitä ja aputuloksia

### 1.1 Joukkokokoelmat

Olkoon  $X$  mielivaltainen joukko. Tällöin

$$\mathcal{P}(X) = \{ A : A \subset X \}$$

on  $X$ :n *potenssijoukko*. Joukon  $X$  *joukkoperhe* (*joukkokokoelma*)  $\mathcal{F}$  on mikä tahansa  $\mathcal{P}(X)$ :n osajoukko, ts.  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ . Perheen  $\mathcal{F}$  *yhdiste* on

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{ x \in X : x \in A \text{ jollekin } A \in \mathcal{F} \}$$

ja *leikkaus* on

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{ x \in X : x \in A \text{ kaikilla } A \in \mathcal{F} \}.$$

Olkoon edelleen  $\mathcal{A}$  *indeksijoukko* ja oletetaan, että jokaista  $\alpha \in \mathcal{A}$  vastaa yksikäsitteinen  $X$ :n osajoukko  $V_\alpha \subset X$ . Tällöin kokoelma

$$\mathcal{F} = \{ V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A} \}$$

on  $X$ :n *indeksöity joukkoperhe*. Indeksimerkintää käyttäen yhdiste ja leikkaus ovat

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = \{ x \in X : x \in V_\alpha \text{ jollekin } \alpha \in \mathcal{A} \}$$

ja

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = \{ x \in X : x \in V_\alpha \text{ kaikilla } \alpha \in \mathcal{A} \}.$$

Jos indeksijoukko on tiedossa, se jätetään usein pois. Siis esimerkiksi merkitään  $\cup_\alpha V_\alpha$ .

**Lemma 1.1.1.** Olkoon  $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$  joukon  $X$  joukkoperhe. Tällöin ovat voimassa *de Morganin lait*

$$X \setminus \bigcup_{\alpha} V_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (X \setminus V_{\alpha})$$

ja

$$X \setminus \bigcap_{\alpha} V_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (X \setminus V_{\alpha}).$$

Edelleen, jos  $E \subset X$ , niin yhdisteelle ja leikkaukselle ovat voimassa *distributiivisuuslait*

$$E \cap \left( \bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha} (E \cap V_{\alpha})$$

ja

$$E \cup \left( \bigcap_{\alpha} V_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha} (E \cup V_{\alpha}).$$

**Esimerkki.** Tarkastellaan malliksi ensimmäistä de Morganin lakia

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_{\alpha} = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \setminus V_{\alpha}).$$

Jos  $x \in X \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_{\alpha}$ , niin  $x \notin \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_{\alpha}$ . Yhdisteen määritelmän mukaan kaikilla  $\alpha \in \mathcal{A}$  pätee  $x \notin V_{\alpha}$ , joten kaikilla  $\alpha \in \mathcal{A}$  pätee  $x \in X \setminus V_{\alpha}$ . Leikkauksen määritelmän mukaan  $x \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \setminus V_{\alpha})$ .

Käänteinen implikaatio nähdään edellisestä päättelystä toiseen suuntaan.

## 1.2 Supremum ja infimum

**Määritelmä 1.2.1.** Olkoon  $A \subset \mathbf{R}$ . Luku  $a \in \mathbf{R}$  on joukon  $A$  *pienin yläraja*, merkitään  $a = \sup A$ , jos se toteuttaa ehdot (1) ja (2):

- (1)  $a$  on joukon  $A$  yläraja eli  $x \leq a$  kaikilla  $x \in A$ ;
- (2) Jos  $b \in \mathbf{R}$  ja  $x \leq b$  kaikilla  $x \in A$ , niin  $a \leq b$ .

**Huomautus.** Ehto (1) sanoo, että  $A$  on ylhäältä rajoitettu. Ehto (2) puolestaan sanoo, että jokainen  $A$ :n yläraja on vähintään  $a$ . Sovitaan siitä, että  $\sup A = +\infty$  jos  $A \subset \mathbf{R}$  ei ole ylhäältä rajoitettu.

**Lemma 1.2.2.** Olkoon  $A \subset \mathbf{R}$  ja  $a \in \mathbf{R}$ . Tällöin  $a = \sup A$ , jos ja vain jos  $a$  toteuttaa ehdot (1) ja (2):

- (1)  $a$  on joukon  $A$  yläraja;
- (2) Kaikilla  $\varepsilon > 0$  on olemassa  $x \in A$ , jolle  $a - \varepsilon < x$ .

**Määritelmä 1.2.3.** Olkoon  $A \subset \mathbf{R}$ . Luku  $a \in \mathbf{R}$  on joukon  $A$  *suurin alaraja*, merkitään  $a = \inf A$ , jos se toteuttaa ehdot (1) ja (2):

- (1)  $a$  on joukon  $A$  alaraja eli  $a \leq x$  kaikilla  $x \in A$ ;
- (2) Jos  $b \in \mathbf{R}$  ja  $b \leq x$  kaikilla  $x \in A$ , niin  $b \leq a$ .

**Huomautus.** Ehto (1) sanoo, että  $A$  on alhaalta rajoitettu. Ehto (2) puolestaan sanoo, että jokainen  $A$ :n alaraja on korkeintaan  $a$ . Sovitaan siitä, että  $\inf A = -\infty$  jos  $A \subset \mathbf{R}$  ei ole alhaalta rajoitettu.

**Lemma 1.2.4.** Olkoon  $A \subset \mathbf{R}$  ja  $a \in \mathbf{R}$ . Tällöin  $a = \inf A$ , jos ja vain jos se toteuttaa ehdot (1) ja (2):

- (1)  $a$  on joukon  $A$  alaraja;
- (2) Kaikilla  $\varepsilon > 0$  on olemassa  $x \in A$ , jolle  $a + \varepsilon > x$ .

**Huomautus 1.2.5.** Määritelmistä seuraa helposti:

- (1) Jos joukolla  $A \subset \mathbf{R}$  on suurin alkio  $\max A$ , niin  $\sup A = \max A$ .
- (2) Jos joukolla  $A \subset \mathbf{R}$  on pienin alkio  $\min A$ , niin  $\inf A = \min A$ .

**Reaalilukujen täydellisyysaksioma** Jokaisella ylhäältä rajoitetulla joukolla  $A \subset \mathbf{R}$  on  $\sup A \in \mathbf{R}$  ja jokaisella alhaalta rajoitetulla joukolla  $A \subset \mathbf{R}$  on  $\inf A \in \mathbf{R}$ .

Täydellisyysaksiomasta seuraa raja-arvon määritelmien avulla:

**Lause 1.2.6.** Olkoon reaalilukujono  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  kasvava.

- (1) Jos  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  on ylhäältä rajoitettu, niin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{R}.$$

- (2) Jos  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  ei ole ylhäältä rajoitettu, niin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} = +\infty.$$

Luonnollisesti vastaava väite pätee vähenevälle jonolle ja infimumille.

**Esimerkki.** Olkoot  $A, B \subset \mathbf{R}$  epätyhjiä. Tällöin

- (1)  $\sup A \leq \sup B$  ja  $\inf A \geq \inf B$  jos  $A \subset B$ ;
- (2)  $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$  ja  $\inf(A + B) \geq \inf A + \inf B$ .

Todistetaan malliksi kohdan (1) supremumia koskeva väite. Voidaan olettaa, että  $B$  on ylhäältä rajoitettu. Tällöin myös  $A$  on ylhäältä rajoitettu. Olkoon  $a \in A$ . Koska  $a \in B$  (oletus) ja  $\sup B$  on eräs  $B$ :n yläraja, niin  $a \leq \sup B$ . Supremumin määritelmän ehdon (2) mukaan  $\sup A \leq \sup B$ .

Todistetaan malliksi kohdan (2) infimumia koskeva väite. Voidaan olettaa, että  $\inf A > -\infty$  ja  $\inf B > -\infty$ , ts. joukot  $A$  ja  $B$  ovat alhaalta rajoitettuja. Tällöin myös joukko

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

on alhaalta rajoitettu. Jos  $a \in A$  ja  $b \in B$ , niin  $\inf A \leq a$  ja  $\inf B \leq b$  koska infimum on aina ko. joukon alaraja. Siispä  $\inf A + \inf B \leq a + b$  kaikilla  $a \in A, b \in B$ . Näin ollen  $\inf A + \inf B$  on eräs joukon  $A + B$  alaraja. Tästä seuraa epäytälö  $\inf(A + B) \geq \inf A + \inf B$ .

### 1.3 Numeroituvat joukot

Numeroituvuudella on tärkeä rooli mittateoriassa!

**Määritelmä 1.3.1.** Joukko  $A$  on *numeroituva*, jos  $A = \emptyset$  tai on olemassa injektio  $f : A \rightarrow \mathbf{N}$  (ekvivalentisti: on olemassa surjektio  $g : \mathbf{N} \rightarrow A$ ). Joukko  $A$  on *ylinumeroituva*, jos se ei ole numeroituva.

**Huomautus 1.3.2.** Määritelmästä voidaan helposti päätellä:

(1) Joukko  $A$  on numeroituva jos ja vain jos  $A$  on äärellinen (mukaan luettuna  $\emptyset$ ) tai *numeroituvasti ääretön* (jolloin on olemassa bijektio  $f : A \rightarrow \mathbf{N}$ ).

(2) Jos  $A$  on numeroituva ja  $B \subset A$ , niin  $B$  on numeroituva.

(3) Jos  $A \neq \emptyset$  on numeroituva, kirjoitetaan  $A = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$  ja ymmärretään, että eri  $n$ :n arvoilla voidaan saada sama alkio. Erityisesti merkinnässä  $A = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$  joukko  $A$  voi olla äärellinen.

**Lause 1.3.3.** Jos joukot  $A_n$  ovat numeroituvia kaikilla  $n \in \mathbf{N}$ , niin yhdiste  $\cup_{n \in \mathbf{N}} A_n$  on numeroituva.

*Todistus.* Voidaan olettaa, että  $A_n \neq \emptyset$  kaikilla  $n$ . Tällöin  $A_n = \{x_{(m,n)} : m \in \mathbf{N}\}$ . Määritellään kuvaus  $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \cup_{n \in \mathbf{N}} A_n$  yhtälöllä

$$f(m, n) = x_{(m,n)}.$$

Tällöin  $f$  on surjektio. Mutta tunnetusti (ks. Johdantokurssi)  $\mathbf{N}$  ja  $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$  ovat yhtä mahtavat, joten on olemassa surjektio (itseasiassa bijektio)  $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ . Nyt kuvaus  $f \circ g : \mathbf{N} \rightarrow \cup_{n \in \mathbf{N}} A_n$  on surjektio, joten väite seuraa.  $\square$

**Seuraus 1.3.4.** Rationaalilukujen joukko  $\mathbf{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$  on numeroituva.

**Esimerkki.** Osoitetaan: Jos  $A$  on numeroituva, niin  $A$  on äärellinen tai on olemassa bijektio  $f : A \rightarrow \mathbf{N}$ .

Oletetaan, että  $A$  on numeroituva ja epätyhjä. Tällöin on olemassa injektio  $f : A \rightarrow \mathbf{N}$ , ts.  $f : A \rightarrow f(A)$  on bijektio. Jos  $f(A) \subset \mathbf{N}$  on rajoitettu, niin  $A$  on äärellinen. Jos  $f(A)$  ei ole rajoitettu, voidaan  $f(A)$ :n pienin alkio kuvata luvulle 1, toiseksi pienin alkio luvulle 2, jne. Näin tulee määritellyksi bijektio  $g : f(A) \rightarrow \mathbf{N}$ . Yhdistetty kuvaus  $g \circ f$  on tällöin bijektio  $A \rightarrow \mathbf{N}$ .

### 1.4 Avoimet ja suljetut joukot avaruudessa $\mathbf{R}^n$

Olkoon  $n \in \mathbf{N}$ . Tällöin euklidinen avaruus  $\mathbf{R}^n$  määritellään  $n$ -kertaisena karteesisena tulona

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}.$$

Avaruuden  $\mathbf{R}^n$  alkioita  $x = (x_1, \dots, x_n)$  kutsutaan *pisteeksi* tai *vektoriksi*. Avaruuden euklidinen *normi*  $|\cdot|$  määritellään yhtälöllä

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

ja euklidinen *metriikka* (*etäisyys*)  $d$  yhtälöllä

$$d(x, y) = |x - y|$$

kaikilla  $x, y \in \mathbf{R}^n$ .

Olkoon  $x \in \mathbf{R}^n$  ja  $r > 0$ . Joukko

$$B(x, r) = \{ y \in \mathbf{R}^n : |x - y| < r \}$$

on *avoin* ( $x$ -keskinen,  $r$ -säteinen) pallo ja joukko

$$\overline{B}(x, r) = \{ y \in \mathbf{R}^n : |x - y| \leq r \}$$

on *suljettu* ( $x$ -keskinen,  $r$ -säteinen) pallo.

**Määritelmä 1.4.1.** Joukko  $U \subset \mathbf{R}^n$  on *avoin*, jos jokaista  $x \in U$  vastaa  $r > 0$  siten, että  $B(x, r) \subset U$ . Joukko  $V$  on *suljettu*, jos  $\mathbf{R}^n \setminus V$  on avoin.

Määritelmästä seuraa välittömästi, että  $\mathbf{R}^n$  ja  $\emptyset$  ovat sekä avoimia että suljettuja! Tunnetusti avoin pallo  $B(x, r)$  on avoin joukko ja suljettu pallo  $\overline{B}(x, r)$  on suljettu joukko.

**Lemma 1.4.2.** Olkoon  $\mathcal{A}$  mielivaltainen indeksijoukko.

- (1) Jos  $U_\alpha$  on avoin kaikilla  $\alpha \in \mathcal{A}$ , niin  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$  on avoin.
- (2) Jos joukot  $U_1, \dots, U_k$  ovat avoimia, niin  $\bigcap_{i=1}^k U_i$  on avoin.
- (3) Jos  $V_\alpha$  on suljettu kaikilla  $\alpha \in \mathcal{A}$ , niin  $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$  on suljettu.
- (4) Jos joukot  $V_1, \dots, V_k$  ovat suljettuja, niin  $\bigcup_{i=1}^k V_i$  on suljettu.

**Esimerkki.** Todistetaan malliksi edellisen lemmän kohta (2): Jos joukot  $U_1, \dots, U_k$  ovat avoimia, niin  $\bigcap_{i=1}^k U_i$  on avoin.

Voidaan olettaa, että  $\bigcap_{i=1}^k U_i$  on epätyhjä. Olkoon  $x \in \bigcap_{i=1}^k U_i$ . Koska  $U_i$  on avoin, on olemassa  $r_i > 0$  siten, että  $B(x, r_i) \subset U_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Valitaan  $r = \min\{r_1, \dots, r_k\}$ . Tällöin  $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset U_i$  kaikilla  $i = 1, \dots, k$ , joten  $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^k U_i$ . Määritelmän mukaan  $\bigcap_{i=1}^k U_i$  on avoin.

Lemman kohta (1) päätellään vastaavasti yhdisteen määritelmän avulla. Kohdat (3) ja (4) seuraavat de Morganin laeista.

**Lause 1.4.3** (Heine-Borelin lause). Olkoon  $V \subset \mathbf{R}^n$  suljettu ja rajoitettu. Olkoon edelleen  $\mathcal{F} = \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$  kokoelma avoimia joukkoja ( $\mathcal{A}$  jokin indeksijoukko) siten, että

$$V \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha.$$

Tällöin on olemassa äärellinen osakokoelma  $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k} \in \mathcal{F}$  siten, että

$$V \subset \bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i}.$$

## 2 Lebesguen mitta euklidisessa avaruudessa

### 2.1 Ääretöntä koskevia sopimuksia

Mittateoriassa joudutaan usein tilanteeseen, jossa reaalityökalujen yhteen- ja kertolasku on laajennettava joukkoon  $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ . Merkitään lyhyesti  $+\infty = \infty$ . Seuraavat sopimukset ovat äärettömiä raja-arvoja koskevien laskulakien mukaiset:

- Kaikilla  $a \neq -\infty$  pätee  $a + \infty = \infty + a = \infty$ ;
- Kaikilla  $a \neq +\infty$  pätee  $a - \infty = -\infty + a = -\infty$ ;
- $-(+\infty) = -\infty$  ja  $-(-\infty) = \infty$ ;
- $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$ ;
- $(-\infty)\infty = \infty(-\infty) = -\infty$ ;
- $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$  kaikilla  $a > 0$ ;
- $\infty \cdot a = a \cdot \infty = -\infty$  kaikilla  $a < 0$ ;
- $(-\infty)a = a(-\infty) = -\infty$  kaikilla  $a > 0$ ;
- $(-\infty)a = a(-\infty) = \infty$  kaikilla  $a < 0$ ;
- Kaikilla  $a \in \mathbf{R}$  pätee  $\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$ .

Lisäksi sovitaan laskusäännöstä

- $0 \cdot \pm\infty = 0$ .

*Tähän ei päädytä äärettömien raja-arvojen tulkinnasta!*

**Huomautus.** Lausekkeet

$$\infty - \infty, \quad -\infty + \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

ovat määrittelemättömiä!

### 2.2 Johdanto

Jos  $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$  on rajoitettu väli, niin sen *pituus*  $\ell(I)$  on

$$\ell(I) = b - a.$$

Vastaavasti tasossa  $\mathbf{R}^2$  rajoitetun suorakulmion  $I = [a, b] \times [c, d]$  *pinta-ala*  $\ell(I)$  on

$$\ell(I) = (b - a)(d - c)$$

ja avaruuden  $\mathbf{R}^3$  "laatikon"  $I = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  *tilavuus*  $\ell(I)$  on

$$\ell(I) = (b - a)(d - c)(f - e).$$

Seuraavassa laajennetaan pituuden (vast. pinta-alan, tilavuuden) käsitteet mahdollisimman yleisille joukoille.



**Määritelmä 2.2.1.** Olkoon  $n \in \mathbf{N}$ . Joukko  $I \subset \mathbf{R}^n$  on  $n$ -väli jos se on muotoa

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n,$$

missä kukin  $I_i$  on rajoitettu väli (avoin, suljettu tai puoliavoin) joukossa  $\mathbf{R}$ . Jos välin  $I_i$  päätepisteet ovat  $a_i < b_i$ , niin  $n$ -välin  $I$  *geometrinen mitta*  $\ell(I)$  määritellään lukuna

$$\ell(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Luonnollisena tavoitteena on määritellä  $n$ -ulotteinen "mitta"  $m_n$  kuvauksena  $m_n : \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ , joka toteuttaa ehdot:

- (1)  $m_n(E)$  on määritelty kaikille  $E \subset \mathbf{R}^n$ ;
- (2) Jos  $I$  on  $n$ -väli, niin  $m_n(I) = \ell(I)$ ;
- (3) Jos  $(E_i)_{i \in \mathbf{N}}$  on jono erillisiä (ts.  $E_i \cap E_j = \emptyset$  aina kun  $i \neq j$ )  $\mathbf{R}^n$ :n joukkoja, niin

$$m_n(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m_n(E_i) \quad (\text{Numeroituva additiivisuus});$$

- (4)  $m_n$  on *siirtoinvariantti*, ts.

$$m_n(E + x) = m_n(E)$$

aina kun  $E \subset \mathbf{R}^n$  ja  $x \in \mathbf{R}^n$ . (Tässä  $E + x := \{x + y : y \in E\}$ )

Valitettavasti kaikkia vaatimuksia (1)–(4) ei voida samanaikaisesti toteuttaa. Lebesguen integrointiteoriassa on päädytty luopumaan ehdosta (1), sillä (kuten myöhemmin nähdään) mitta tulee joka tapauksessa määritellyksi riittävän suurelle määrälle joukkoja.

## 2.3 Lebesguen ulkomitta

Sanotaan, että  $n$ -väli  $I = I_1 \times \cdots \times I_n$  on *avoin*, jos  $I_i \subset \mathbf{R}$  on avoin väli kaikilla  $i$ . Edelleen  $n$ -väli  $I = I_1 \times \cdots \times I_n$  on *suljettu*, jos  $I_i \subset \mathbf{R}$  on suljettu kaikilla  $i$ .

Olkoon  $A \subset \mathbf{R}^n$  ja olkoon

$$\mathcal{F} = \{I_1, I_2, \dots\}$$

numeroituva joukko avoimia  $n$ -välejä. Tässä myös tapaus  $I_i = \emptyset$  sallitaan ja erityisesti  $\mathcal{F}$  voi koostua äärellisestä määrästä  $n$ -välejä. Jos lisäksi pätee

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,$$

sanotaan, että  $\mathcal{F}$  on joukon  $A$  *Lebesguen peite*.

**Määritelmä 2.3.1.** Joukon  $A \subset \mathbf{R}^n$   $n$ -ulotteinen (Lebesguen) ulkomitta  $m_n^*(A)$  on luku

$$m_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) : \mathcal{F} = \{I_1, I_2, \dots\} \text{ on joukon } A \text{ Lebesguen peite} \right\}.$$

**Merkintä.** Lyhyden vuoksi Määritelmän 2.3.1 yhteydessä merkitään myös

$$S(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i).$$

**Huomautus.** Tutkitaan Määritelmää 2.3.1:

(1) Merkitään  $J_i = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_k| < i \text{ kaikilla } k = 1, \dots, n\}$ , missä  $i = 1, 2, \dots$ . Selvästi pätee

$$\mathbf{R}^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i,$$

joten kaikilla  $A \subset \mathbf{R}^n$  on ainakin Lebesguen peite  $\mathcal{F} = \{J_i : i \in \mathbf{N}\}$ .

(2) Jos  $I_i$  on avoin  $n$ -väli, niin  $0 \leq \ell(I_i) < \infty$ . Näin ollen Määritelmän 2.3.1 sarjan  $\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i)$  osasummat muodostavat kasvavan jonon. Lauseen 1.2.6 nojalla  $\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i)$  on olemassa reaalilukuna tai lukuna  $+\infty$ .

(3) Kohdista (1) ja (2) seuraa, että kaikilla  $A \subset \mathbf{R}^n$  ulkomitta  $m_n^*(A)$  on olemassa joko ei-negatiivisena reaalilukuna tai lukuna  $+\infty$ .

(4) Infimumin määritelmästä seuraa: Kaikilla  $A \subset \mathbf{R}^n$  ja  $\varepsilon > 0$  on olemassa  $A$ :n Lebesguen peite  $\mathcal{F}$ , jolle

$$S(\mathcal{F}) \leq m_n^*(A) + \varepsilon.$$

(Tässä epäyhtälö on aito jos  $m_n^*(A) < +\infty$ .) Sen sijaan välttämättä ei ole olemassa Lebesguen peitettä  $\mathcal{F}$  siten, että

$$S(\mathcal{F}) = m_n^*(A).$$

**Esimerkki.** (1) Olkoon  $A \subset \mathbf{R}^n$  rajoitettu joukko. Määritelmän mukaan on olemassa  $R > 0$  siten, että  $A \subset B(0, R)$ . Tällöin  $A \subset I$ , missä

$$I = ]-R, R[ \times \dots \times ]-R, R[ \subset \mathbf{R}^n.$$

Saadaan arvio

$$m_n^*(A) \leq \ell(I) = (2R)^n.$$

(2) Olkoon  $n = 2$  ja olkoon  $A = \{(x, 0) : a \leq x \leq b\} \subset \mathbf{R}^2$ , ts.  $A$  on suljettu jana tasossa. Väite:  $m_2^*(A) = 0$ .

*Todistus.* Olkoon  $\varepsilon > 0$  ja  $I_\varepsilon = ]a - \varepsilon, b + \varepsilon[ \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset \mathbf{R}^2$  avoin 2-väli. Nyt  $A \subset I_\varepsilon$ , joten

$$0 \leq m_2^*(A) \leq \ell(I_\varepsilon) = 2\varepsilon(b - a + 2\varepsilon).$$

Koska epsilon on mielivaltainen, on välttämättä  $m_2^*(A) = 0$  (seuraa kuristusperiaatteesta kun  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ).

(3) Olkoon  $n = 1$ . Tarkastellaan rationaalilukujen joukkoa  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ .

Väite:  $m_1^*(\mathbf{Q}) = 0$ .

*Todistus.*  $\mathbf{Q}$  on numeroituva, joten  $\mathbf{Q} = \{q_i : i \in \mathbf{N}\}$ . Olkoon  $\varepsilon > 0$  ja olkoon

$$I_i = ]q_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, q_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}[ \subset \mathbf{R}$$

kaikilla  $i \in \mathbf{N}$ . Tällöin  $\ell(I_i) = \frac{2\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{2^i}$ . Nyt  $\mathbf{Q} \subset \cup_{i \in \mathbf{N}} I_i$  (ts. välit  $I_i$  muodostavat  $\mathbf{Q}$ :n Lebesguen peitteen). Koska

$$0 \leq m_1^*(\mathbf{Q}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \varepsilon$$

ja  $\varepsilon > 0$  on mielivaltainen, on  $m_1^*(\mathbf{Q}) = 0$ .

(4) Olkoon  $A \subset \mathbf{R}^n$  numeroituva. Olennaisesti samalla tavoin kuin kohdassa (2) todetaan, että  $m_n^*(A) = 0$ .

**Lause 2.3.2.** Ulkomitalla on perusominaisuudet:

- (1)  $m_n^*(\emptyset) = 0$ ;
- (2) Jos  $A \subset B \subset \mathbf{R}^n$ , niin  $m_n^*(A) \leq m_n^*(B)$ ; (Monotonisuus)
- (3) Jos  $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$  on jono  $\mathbf{R}^n$  osajoukkoja, niin

$$m_n^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_n^*(A_i). \quad (\text{Subadditiivisuus})$$

(1) Triviaali.

(2) Olkoon  $\mathcal{F}$  mv. joukon  $B$  Lebesguen peite. Koska  $A \subset B$ ,  $\mathcal{F}$  on myös joukon  $A$  Lebesguen peite. Joukon  $A$  ulkomitan määritelmän mukaan

$$m_n^*(A) \leq S(\mathcal{F}).$$

Siispä  $m_n^*(A)$  on eräs alaraja joukolle, joka esiintyy  $B$ :n ulkomitan määritelmässä. Infimumin määritelmän mukaan

$$m_n^*(A) \leq m_n^*(B).$$

(3) Merkitään  $A = \cup_{i \in \mathbf{N}} A_i$ . Olkoon  $\varepsilon > 0$ . Kullakin  $i$  valitaan joukon  $A_i$  Lebesguen peite  $\mathcal{F}_i = \{I_{i1}, I_{i2}, \dots\}$  siten, että

$$S(\mathcal{F}_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{ij}) \leq m_n^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Nyt  $\mathcal{F} = \cup_{i \in \mathbf{N}} \mathcal{F}_i$  on eräs yhdisteen  $A$  Lebesguen peite (Lause 1.3.3), joten

$$\begin{aligned} m_n^*(A) &\leq \sum_{(i,j)} \ell(I_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (m_n^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} m_n^*(A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} m_n^*(A_i) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Yhtälössä  $\sum_{(i,j)} \ell(I_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{ij})$  käytettiin hyväksi Lemmaa 2.3.3.

**Esimerkki.** Lauseesta 2.3.2 seuraa aiemman esimerkin avulla, että  $m_2^*(A) = 0$  joukolle  $A = \mathbf{R} \times \{0\}$ . Aiemman esimerkin perusteella  $m_2^*(A_i) = 0$  joukolle  $A_i = [-i, i] \times \{0\}$ . Toisaalta  $A = \cup_{i \in \mathbf{N}} A_i$ , joten subadditiivisuuden perusteella

$$0 \leq m_2^*(A) \leq \sum_{i \in \mathbf{N}} m_2^*(A_i) = 0.$$

Lemman 2.3.3 todistamiseksi laajennetaan summan määritelmää.

**Yleinen summan määritelmä.** Määritellään ei-negatiivisten lukujen (ääretön sallitaan) yleinen summaus seuraavasti: Jos  $\mathcal{A}$  on mielivaltainen indeksijoukko ja  $b_i \in [0, +\infty]$  kaikilla  $i \in \mathcal{A}$ , asetetaan

$$\sum_{i \in \mathcal{A}} b_i = \sup \left\{ \sum_{i \in I} b_i : I \subset \mathcal{A} \text{ äärellinen} \right\}.$$

**Lemma 2.3.3.** Olkoon  $a_{ij} \in [0, +\infty]$  jokaisella  $(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ . Tällöin

$$\sum_{(i,j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}} a_{ij} = \sum_{i \in \mathbf{N}} \sum_{j \in \mathbf{N}} a_{ij} = \sum_{j \in \mathbf{N}} \sum_{i \in \mathbf{N}} a_{ij}.$$

*Todistus.* Tarkastellaan lemmän vasemmanpuoleista väitettä. Summausmääritelmän mukaan

$$\sum_{(i,j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}} a_{ij} = \sup \left\{ \sum_{(i,j) \in I} a_{ij} : I \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N} \text{ on äärellinen} \right\}.$$

Olkoon  $I \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$  äärellinen. Tällöin  $I = I_1 \times I_2$ , missä  $I_1, I_2 \subset \mathbf{N}$  ovat äärellisiä. Koska summaus on äärellinen, voidaan kirjoittaa

$$\sum_{(i,j) \in I_1 \times I_2} a_{ij} = \sum_{i \in I_1} \sum_{j \in I_2} a_{ij} \leq \sum_{i \in I_1} \sum_{j \in \mathbf{N}} a_{ij} \leq \sum_{i \in \mathbf{N}} \sum_{j \in \mathbf{N}} a_{ij}.$$

Ottamalla supremum yli kaikkien äärellisten joukkojen  $I = I_1 \times I_2$  saadaan

$$\sum_{(i,j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}} a_{ij} \leq \sum_{i \in \mathbf{N}} \sum_{j \in \mathbf{N}} a_{ij}.$$

Käänteinen epäyhtälö todistetaan vastaavaan tapaan.  $\square$

**Lause 2.3.4.** Jos  $I \subset \mathbf{R}^n$  on  $n$ -väli, niin

$$m_n^*(I) = \ell(I),$$

ts.  $n$ -välin geometrinen mitta yhtyy ulkomittaan.

*Todistus.* Olkoon aluksi  $I$  suljettu  $n$ -väli. Epäyhtälö  $m_n^*(I) \leq \ell(I)$  jätetään harjoitustehtäväksi. Väitteen  $m_n^*(I) \geq \ell(I)$  todistamiseksi olkoon  $\mathcal{F} = (I_i)_{i \in \mathbf{N}}$  välin  $I$  Lebesguen

peite. Koska  $I$  on suljettu ja rajoitettu (eli kompakti), Heine-Borelin lauseen mukaan on olemassa äärellinen osapeite, so. joillekin  $I_{i_1}, \dots, I_{i_k} \in \mathcal{F}$  pätee

$$I \subset \bigcup_{j=1}^k I_{i_j}.$$

Lemman 2.3.5 nojalla

$$\ell(I) \leq \sum_{j=1}^k \ell(I_{i_j}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{i_j}) = S(\mathcal{F}).$$

Ottamalla infimum yli kaikkien välin  $I$  Lebesguen peitteiden  $\mathcal{F}$  saadaan haluttu epäyhtälö  $\ell(I) \leq m_n^*(I)$ .

Oletetaan lopuksi, että  $I$  ei ole suljettu. Olkoon  $\varepsilon > 0$ . Tällöin on olemassa suljettu  $n$ -väli  $J \subset I$  siten, että  $\ell(J) > \ell(I) - \varepsilon$ . Ulkomitan monotonisuuden ja todistuksen alkuosan nojalla

$$m_n^*(I) \geq m_n^*(J) = \ell(J) > \ell(I) - \varepsilon.$$

Koska  $\varepsilon > 0$  on mielivaltainen, saadaan  $m_n^*(I) \geq \ell(I)$ .  $\square$

Lauseen 2.3.4 todistus perustui seuraavaan intuitiivisesti ilmeiseen aputulokseen. Sivuumme aputuloksen todistuksen.

**Lemma 2.3.5.** Olkoot  $I$  ja  $I_1, \dots, I_k$   $n$ -välejä siten, että  $I \subset \bigcup_{j=1}^k I_j$ . Tällöin

$$\ell(I) \leq \sum_{j=1}^k \ell(I_j).$$

Oletetaan lisäksi, että leikkauksilla  $I_i \cap I_j$ ,  $i \neq j$ , ei ole sisäpisteitä, ts.  $I_i \cap I_j$  ei sisällä yhtään avointa palloa, ja että  $I = \bigcup_{j=1}^k I_j$ . Tällöin

$$\ell(I) = \sum_{j=1}^k \ell(I_j).$$

**Esimerkki.** Olkoon  $I = I_1 \times \dots \times I_n$  rajoittamaton  $n$ -dimensionaalinen väli, ts. jokin väleistä  $I_i \subset \mathbf{R}$  on rajoittamaton. Tällöin ulkomitan monotonisuudesta seuraa, että  $m_n^*(I) = +\infty$ . Esimerkiksi, jos  $n = 1$  ja  $I = [0, +\infty]$ , niin välit  $I_i = [0, i]$  ovat välin  $I$  osajoukkoja ja siten

$$m_1^*(I) \geq m_1^*(I_i) = i$$

kaikilla  $i \in \mathbf{N}$ . Tällöin välttämättä  $m_1^*(I) = +\infty$ . Sama idea toimii yleisessä tapauksessa.

## 2.4 Mitalliset joukot

Oletetaan, että dimensio  $n$  on kiinnitetty ja merkitään lyhyemmin  $m^*(A) = m_n^*(A)$ . Seuraavan määritelmän ominaisuutta kutsutaan *Caratheodory'n ehdoksi*.

**Määritelmä 2.4.1.** Joukko  $E \subset \mathbf{R}^n$  on (*Lebesgue*) *mitallinen*, jos

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

kaikilla  $A \subset \mathbf{R}^n$ .

**Huomautus.** Olkoon  $E \subset \mathbf{R}^n$ . Koska kaikilla  $A \subset \mathbf{R}^n$  pätee  $A = (A \cap E) \cup (A \setminus E)$ , niin ulkomitan subadditiivisuudesta seuraa

$$m^*(A) = m^*((A \cap E) \cup (A \setminus E)) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Siis epäyhtälö  $\leq$  Määritelmässä 2.4.1 pätee vaikka  $E$  ei olisi mitallinen. Mitallisuuden todistamiseksi riittää siis osoittaa, että

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

kaikilla  $A \subset \mathbf{R}^n$ . Edelleen voidaan olettaa, että  $m^*(A) < +\infty$ .

**Merkintä.** Jos joukko  $E$  on mitallinen, merkitään  $m(E) := m^*(E)$ .

**Huomautus.** Kaikki joukot eivät ole mitallisia! Sivuuutamme tämän perustelun, sillä esimerkit ei-mitallisista joukoista ovat hieman teknisiä, ks. esimerkiksi Royden: *Real analysis* (1988), luku 3.4.

Jatkossa nähdään, että Lebesguen ulkomitta toteuttaa mitallisten joukkojen luokassa kaikki luvussa 2.2 esitetyt vaatimukset (2)–(4). Näin ollen Lebesguen ulkomitta on mitallisten joukkojen luokassa "järkevä" mitta edellyttäen, että mitallisten joukkojen luokka todetaan tarpeeksi kattavaksi. Seuraavaksi tutkitaankin sitä, mitkä joukot ovat mitallisia.

**Lemma 2.4.2.** Jos joukolle  $E \subset \mathbf{R}^n$  pätee  $m^*(E) = 0$ , niin  $E$  on mitallinen.

*Todistus.* Oletetaan, että  $m^*(E) = 0$ . Olkoon  $A \subset \mathbf{R}^n$  mv. testijoukko. Koska  $A \cap E \subset E$ , niin monotonisuuden nojalla  $m^*(A \cap E) = 0$ . Toisaalta  $A \setminus E \subset A$ , joten monotonisuuden nojalla

$$m^*(A) \geq m^*(A \setminus E) = m^*(A \setminus E) + m^*(A \cap E).$$

Näin ollen  $E$  on mitallinen.  $\square$

**Nimitys.** Jos joukolle  $E \subset \mathbf{R}^n$  pätee  $m^*(E) = 0$ , joukkoa  $E$  sanotaan *nollamittaiseksi*.

Jatkossa käytetään lyhyden vuoksi myös merkintää  $E^c$  joukon  $E$  komplementille  $\mathbf{R}^n \setminus E$ .

**Lemma 2.4.3.** Jos  $E \subset \mathbf{R}^n$  on mitallinen, niin  $E^c = \mathbf{R}^n \setminus E$  on mitallinen.

*Todistus.* Olkoon  $E$  mitallinen ja  $A \subset \mathbf{R}^n$ . Koska  $A \setminus E = A \cap E^c$ , saadaan

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap (E^c)^c) + m^*(A \cap E^c).$$

Testijoukko  $A$  on mielivaltainen, joten  $E^c$  on mitallinen.  $\square$

Seuraavana tavoitteena on osoittaa, että mitallisten joukkojen numeroituvat leikkaukset ja yhdisteet ovat mitallisia. Tähän päästään vaiheittain aputulosten kautta.

**Lemma 2.4.4.** Olkoot  $E_1, \dots, E_k \subset \mathbf{R}^n$  mitallisia. Tällöin joukot  $\cup_{i=1}^k E_i$  ja  $\cap_{i=1}^k E_i$  ovat mitallisia.

**Lemma 2.4.5.** Olkoot  $E_1, \dots, E_k \subset \mathbf{R}^n$  mitallisia ja erillisiä (ts. pareittain pistevieraita eli  $E_i \cap E_j = \emptyset$  aina kun  $i \neq j$ ). Tällöin kaikilla  $A \subset \mathbf{R}^n$  pätee

$$m^*(A \cap (\cup_{i=1}^k E_i)) = \sum_{i=1}^k m^*(A \cap E_i).$$

**Kirjallinen harjoitustehtävä.** Todista kirjallisuutta hyödyntäen lemmat 2.4.4 ja 2.4.5, ks. esimerkiksi Royden: Real Analysis (1988), s. 59-60.

**Lemma 2.4.6.** Olkoot  $E_i$  mitallisia kaikilla  $i \in \mathbf{N}$  ja olkoon  $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ . Tällöin on olemassa erilliset ja mitalliset joukot  $F_i \subset E_i$  siten, että

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

*Todistus.* Harjoitustehtävä.  $\square$

**Lause 2.4.7.** Olkoot  $E_i$  mitallisia kaikilla  $i \in \mathbf{N}$ . Tällöin joukot

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{ja} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

ovat mitallisia. Lisäksi, jos joukot  $E_i$  ovat erillisiä, niin

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i). \quad (\text{Numeroituva additiivisuus})$$

*Todistus.* Lemman 2.4.6 nojalla

$$S := \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,$$

missä joukot  $F_i$  ovat erillisiä ja mitallisia. Olkoon

$$S_k = \bigcup_{i=1}^k F_i, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Tällöin  $S_k \subset S$  ja Lemman 2.4.4 nojalla joukot  $S_k$  ovat mitallisia. Olkoon  $A \subset \mathbf{R}^n$  mv. Mitallisuuden määritelmän, monotonisuuden ja Lemman 2.4.5 seurauksena saadaan

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap S_k) + m^*(A \setminus S_k) \geq m^*(A \cap S_k) + m^*(A \setminus S) \\ &= \sum_{i=1}^k m^*(A \cap F_i) + m^*(A \setminus S) \end{aligned}$$

kaikilla  $k \in \mathbf{N}$ . Antamalla  $k \rightarrow \infty$  saadaan subadditiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap F_i) + m^*(A \setminus S) \\ &\geq m^*(\cup_{i=1}^{\infty} (A \cap F_i)) + m^*(A \setminus S) \\ &= m^*(A \cap S) + m^*(A \setminus S). \end{aligned} \tag{1}$$

Koska  $A$  on mielivaltainen, on todistettu että  $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$  on mitallinen. Näin ollen (De Morgan ja Lemma 2.4.3) myös

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c \right)^c$$

on mitallinen.

Jos joukot  $E_i$  ovat erillisiä, voidaan edellä  $F_i$  korvata joukolla  $E_i$ . Valitsemalla  $A = S$  epäyhtälön (1) ensimmäisellä rivillä saadaan subadditiivisuuden nojalla

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \geq m(S) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S \cap E_i) + m^*(S \setminus S) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i).$$

Väite seuraa.  $\square$

Tähän mennessä tiedämme mitallisista joukoista eksplisiittisesti vain sen, että nollamittaiset joukot ovat mitallisia. Seuraavana tavoitteena on osoittaa, että kaikki avoimet (ja siten myös suljetut) joukot ovat mitallisia.

**Lause 2.4.8.** Jos  $I$  on  $n$ -väli, niin  $I$  on mitallinen ja

$$m(I) = \ell(I).$$

*Todistus.* Riittää osoittaa (Lause 2.3.4), että  $I$  on mitallinen. Todistetaan väite tapauksessa  $n = 1$ ; yleisen tapauksen idea sama (ks. esim. Lehto: Differentiaali- ja integraalilaskenta III).

Olkoon  $A \subset \mathbf{R}$  testijoukko. On osoitettava, että

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I).$$

Voidaan olettaa, että  $m^*(A) < +\infty$ . Tällöin jokaista lukua  $\varepsilon > 0$  vastaa joukon  $A$  Lebesguen peite  $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, \dots\}$  (avoimilla väleillä) siten, että

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

Merkitään  $I'_j := I_j \setminus I$  ja  $I''_j := I_j \cap I$ . Tällöin  $I''_j$  on joko tyhjä joukko tai väli ja  $I'_j$  on joko tyhjä joukko, väli tai kahden pistevieraan välin yhdiste. Merkitään edelleen  $I'_j := I'_{j1} \cup I'_{j2}$ , missä  $I'_{jk}$  on joko väli tai tyhjä joukko ja  $I'_{j1} \cap I'_{j2} = \emptyset$ . Lemman 2.3.5 ja Lauseen 2.3.4 nojalla (käyttäen sopimusta  $\ell(\emptyset) = 0$ ) voidaan kirjoittaa

$$\ell(I_j) = \ell(I''_j) + \ell(I'_{j1}) + \ell(I'_{j2}) = m^*(I''_j) + m^*(I'_{j1}) + m^*(I'_{j2}).$$

Summaamalla yli indeksien  $j$  ja käyttämällä subadditiivisuutta ja monotonisuutta saadaan

$$\begin{aligned} m^*(A) + \varepsilon &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(I''_j) + \sum_{j=1}^{\infty} m^*(I'_{j1}) + \sum_{j=1}^{\infty} m^*(I'_{j2}) \\ &\geq m^*\left(\bigcup_{j \in \mathbf{N}} I''_j\right) + m^*\left(\bigcup_{j \in \mathbf{N}} I'_{j1} \cup \bigcup_{j \in \mathbf{N}} I'_{j2}\right) \\ &\geq m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I). \end{aligned}$$

Koska  $\varepsilon > 0$  on mv., niin  $m^*(A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I)$ , ts.  $I$  on mitallinen.  $\square$



**Lemma 2.4.9** (Lindelöfin lause). Olkoon  $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  mielivaltainen kokoelma avoimia joukkoja. Tällöin on olemassa numeroituva indeksijoukko  $\{\alpha_i \in \mathcal{A} : i \in \mathbf{N}\}$  jolle

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} U_{\alpha_i}.$$

*Todistus.* Harjoitustehtävä.  $\square$

**Lause 2.4.10.** Avaruuden  $\mathbf{R}^n$  avoimet ja suljetut joukot ovat mitallisia.

*Todistus.* Olkoon  $U \subset \mathbf{R}^n$  avoin. Jokaista  $x \in U$  vastaa avoimen joukon määritelmän nojalla avoin pallo  $B(x, r_x)$  siten, että  $B(x, r_x) \subset U$ . Edelleen löydetään avoin  $n$ -väli  $I(x)$ , jolle  $x \in I(x) \subset B(x, r_x)$ . Tällöin kokoelma

$$\mathcal{F} = \{I(x) : x \in U\}$$

on joukon  $U$  avoin peite ja Lindelöfin lauseen nojalla  $\mathcal{F}$  sisältää numeroituvan osakokoelman

$$\mathcal{F}' := \{I(x_1), I(x_2), \dots\},$$

jolle pätee

$$U \subset \bigcup_{i \in \mathbf{N}} I(x_i) \subset U.$$

Siis  $U = \cup_{i \in \mathbf{N}} I(x_i)$  on mitallinen lauseiden 2.4.7 ja 2.4.8 nojalla.

Jos  $V \subset \mathbf{R}^n$  on suljettu, niin  $V^c$  on avoin ja siten  $V^c$  on mitallinen. Edelleen  $V = (V^c)^c$  on mitallinen Lemman 2.4.3 nojalla.  $\square$

**Määritelmä 2.4.11.** Olkoon  $X$  joukko. Kokoelma  $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$  on joukon  $X$   $\sigma$ -algebra, jos  $\Gamma$  toteuttaa ehdot (1)–(3):

- (1)  $\emptyset \in \Gamma$ ;
- (2) Jos  $A \in \Gamma$ , niin  $X \setminus A \in \Gamma$ ;
- (3) Jos  $A_i \in \Gamma$  kaikilla  $i \in \mathbf{N}$ , niin  $\cup_{i \in \mathbf{N}} A_i \in \Gamma$ .

**Huomautus 2.4.12.** (1) Edellä on osoitettu, että avaruuden  $\mathbf{R}^n$  mitalliset joukot muodostavat joukon  $\mathbf{R}^n$   $\sigma$ -algebran.

(2) Jos  $\Gamma$  on joukon  $X$   $\sigma$ -algebra ja  $A_i \in \Gamma$  kaikilla  $i \in \mathbf{N}$ , niin myös  $\cap_{i \in \mathbf{N}} A_i \in \Gamma$ . Tämä seuraa määritelmästä de Morganin lain avulla, sillä

$$\bigcap_{i \in \mathbf{N}} A_i = \bigcap_{i \in \mathbf{N}} (A_i^c)^c = \left( \bigcup_{i \in \mathbf{N}} A_i^c \right)^c \in \Gamma.$$

(3) Jokaisella joukolla  $X$  on ainakin  $\sigma$ -algebrat  $\Gamma_1 = \mathcal{P}(X)$  ja  $\Gamma_2 = \{\emptyset, X\}$ . Edelleen, jos  $A \subset X$ , niin  $\Gamma_3 = \{\emptyset, X, A, X \setminus A\}$  on  $X$ :n  $\sigma$ -algebra.

**Määritelmä 2.4.13.** Borel-joukkojen kokoelma  $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$  on avaruuden  $\mathbf{R}^n$  suppein  $\sigma$ -algebra, joka sisältää avoimet joukot.

**Huomautus.** Määritelmän 2.4.13 mielekkyyden toteamiseksi tarkastellaan perhettä

$$\mathcal{A} = \bigcap \{ \Gamma : \Gamma \in S(\mathcal{O}) \},$$

missä  $S(\mathcal{O})$  tarkoittaa niiden  $\sigma$ -algebroiden  $\subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$  joukkoa, jotka sisältävät  $\mathbf{R}^n$ :n avoimet joukot.

Riittää osoittaa, että  $\mathcal{A}$  on  $\sigma$ -algebra, sillä määritelmästä johtuen  $\mathcal{A}$  on tällöin suppein  $S(\mathcal{O})$ :n joukkoperhe.

(1)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ , sillä  $\emptyset \in \Gamma$  kaikilla  $\Gamma \in S(\mathcal{O})$ .

(2) Jos  $A \in \mathcal{A}$ , niin  $A \in \Gamma$  kaikille  $\Gamma \in S(\mathcal{O})$ . Edelleen  $A^c \in \Gamma$  kaikille  $\Gamma \in S(\mathcal{O})$  koska  $\Gamma$  on  $\sigma$ -algebra. Siis  $A^c \in \mathcal{A}$ .

(3) Jos  $A_i \in \mathcal{A}$ , niin  $A_i \in \Gamma$  kaikille  $\Gamma \in S(\mathcal{O})$ ,  $i \in \mathbf{N}$ . Edelleen  $\cup_{i \in \mathbf{N}} A_i \in \Gamma$  kaikille  $\Gamma \in S(\mathcal{O})$  koska  $\Gamma$  on  $\sigma$ -algebra. Siis  $\cup_{i \in \mathbf{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .

**Huomautus 2.4.14.** (a) Olkoon  $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$  avaruuden  $\mathbf{R}^n$  mitallisten joukkojen kokoelma. Edellä on osoitettu, että

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{M}(\mathbf{R}^n),$$

ts. Borelin joukkojen  $\sigma$ -algebra sisältyy Lebesgue-mitallisten joukkojen  $\sigma$ -algebraan.

(b) Jokaisella  $\mathbf{R}^n$ :n joukolla  $A$  on *mitallinen peite*, so. on olemassa mitallinen joukko  $B \subset \mathbf{R}^n$ , jolle  $A \subset B$  ja  $m^*(A) = m(B)$  (harjoitustehtävä). Yleisessä mittateoriassa ulkomittaa, jolla on vastaava ominaisuus, nimitetään *säännölliseksi*.

(c) Luokka  $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$  on laajin  $\mathbf{R}^n$ :n  $\sigma$ -algebra, johon rajoitettuna ulkomitta  $m^*$  on additiivinen joukkofunktio. Tämän todistamiseksi olkoon  $\Gamma \supset \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$   $\sigma$ -algebra siten, että

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2)$$

aina kun  $E_1, E_2 \in \Gamma$  ja  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ .

Olkoon edelleen  $E \in \Gamma$  sekä  $A \subset \mathbf{R}^n$  mielivaltainen. Kohdan (b) nojalla on olemassa mitallinen  $B \subset \mathbf{R}^n$ , jolle  $m^*(A) = m(B)$ . Koska  $B \cap E \in \Gamma$  ja  $B \cap E^c \in \Gamma$  ( $\Gamma$   $\sigma$ -algebra), niin

$$m^*(A) = m^*(B) = m^*(B \cap E) + m^*(B \setminus E) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Näin ollen  $E$  on mitallinen ja siis  $\Gamma \subset \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ .

## 2.5 Mitan konvergenssi

Lebesguen integrointiteoriassa keskeiset konvergenssilauseet perustuvat seuraaviin kahden mitan konvergenssilauseeseen.

**Lause 2.5.1.** Olkoon  $(A_j)_{j \in \mathbf{N}}$  kasvava jono (ts.  $A_i \subset A_j$  kaikilla  $i < j$ )  $\mathbf{R}^n$ :n mitallisia joukkoja. Tällöin

$$m \left( \bigcup_{j \in \mathbf{N}} A_j \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} m(A_j).$$

*Todistus.* Huomaa, että  $\bigcup_{j \in \mathbf{N}} A_j$  on mitallinen. Väite seuraa helposti, kun esitetään yhdiste muodossa

$$\bigcup_{j \in \mathbf{N}} A_j = \bigcup_{j \in \mathbf{N}} (A_j \setminus A_{j-1}),$$

missä  $A_0 := \emptyset$ . Nyt mitan additiivisuuden (Lause 2.4.7) nojalla voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{j \in \mathbf{N}} A_j\right) &= m\left(\bigcup_{j \in \mathbf{N}} (A_j \setminus A_{j-1})\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j \setminus A_{j-1}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k m(A_j \setminus A_{j-1}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{j=1}^k (A_j \setminus A_{j-1})\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k), \end{aligned}$$

sillä  $A_k = \bigcup_{j=1}^k (A_j \setminus A_{j-1})$ .  $\square$

**Lause 2.5.2.** Olkoon  $(A_j)_{j \in \mathbf{N}}$  vähenevä jono (ts.  $A_i \subset A_j$  kaikilla  $i > j$ )  $\mathbf{R}^n$ :n mitallisia joukkoja. Jos lisäksi  $m(A_k) < +\infty$  jollakin  $k \in \mathbf{N}$ , niin

$$m\left(\bigcap_{j \in \mathbf{N}} A_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} m(A_j).$$

*Todistus.* Huomaa, että  $\bigcap_{j \in \mathbf{N}} A_j$  on mitallinen. Voidaan olettaa, että  $m(A_1) < +\infty$ , sillä äärellisellä määrällä jonon alkupään termejä ei ole merkitystä väitteen kannalta. Merkitään

$$A := \bigcap_{j \in \mathbf{N}} A_j \quad \text{ja} \quad B_j := A_1 \setminus A_j.$$

Tällöin  $(B_j)_{j \in \mathbf{N}}$  on kasvava jono mitallisia joukkoja, joten Lauseen 2.5.1 mukaan

$$m\left(\bigcup_{j \in \mathbf{N}} B_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} m(B_j).$$

Esitetään joukko  $A_1$  kahden joukon erillisenä yhdisteenä muodossa

$$A_1 = A_j \cup (A_1 \setminus A_j) \quad \text{ja} \quad A_1 = A \cup (A_1 \setminus A).$$

Mitan additiivisuuden perusteella saadaan yhtälöt

$$m(A_1) = m(A_j) + m(B_j) \quad \text{ja} \quad m(A_1) = m(A) + m(A_1 \setminus A).$$

Koska  $m(A_1) < +\infty$ , voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
 m(A) &= m(A_1) - m(A_1 \setminus A) \\
 &= m(A_1) - m\left(\bigcup_{j \in \mathbf{N}} B_j\right) \\
 &= m(A_1) - \lim_{j \rightarrow \infty} m(B_j) \\
 &= m(A_1) - \lim_{j \rightarrow \infty} (m(A_1) - m(A_j)) \\
 &= \lim_{j \rightarrow \infty} m(A_j).
 \end{aligned}$$

□

**Esimerkki.** Ehto  $m(A_k) < +\infty$  Lauseessa 2.5.2 on välttämätön. Esimerkiksi, jos valitaan

$$A_j = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > j\},$$

niin joukot  $A_j$  muodostavat vähenevän jonon, jolle  $m_2(A_j) = +\infty$  kaikilla  $j$ , mutta  $\bigcap_{j \in \mathbf{N}} A_j = \emptyset$ , ja siis  $m_2(\bigcap_{j \in \mathbf{N}} A_j) = 0$ .

## 2.6 Mitalliset funktiot

Merkitään  $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ .

**Määritelmä 2.6.1.** Olkoon  $A \subset \mathbf{R}^n$ . Kuvaus  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$  on *mitallinen*, jos  $f^{-1}(U)$  on mitallinen kaikille avoimille joukoille  $U \subset \mathbf{R}^m$ . Edelleen, funktio  $f : A \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  on mitallinen, jos se toteuttaa ehdot (1)–(3):

- (1)  $f^{-1}(U)$  on mitallinen kaikille avoimille joukoille  $U \subset \mathbf{R}$ ;
- (2)  $f^{-1}(+\infty)$  on mitallinen;
- (3)  $f^{-1}(-\infty)$  on mitallinen.

**Huomautus.** Määritelmä 2.6.1 pitää sisällään oletuksen joukon  $A$  mitallisuudesta, sillä tapauksessa  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$  pätee

$$A = f^{-1}(\mathbf{R}^m)$$

ja tapauksessa  $f : A \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  pätee

$$A = f^{-1}(\mathbf{R}) \cup f^{-1}(+\infty) \cup f^{-1}(-\infty).$$

**Huomautus 2.6.2.** Olkoon  $G \subset \mathbf{R}^n$  avoin. Palautetaan mieleen, että kuvaus  $f : G \rightarrow \mathbf{R}^m$  on *jatkuva pisteessä*  $x \in G$  jos jokaista  $\varepsilon > 0$  vastaa  $\delta > 0$  siten, että  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  aina kun  $|x - y| < \delta$ . Kuvaus  $f : G \rightarrow \mathbf{R}^m$  on *jatkuva* jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä  $x \in G$ .

Tunnetusti kuvaus  $f : G \rightarrow \mathbf{R}^m$  on jatkuva (tässä  $G \subset \mathbf{R}^n$  on avoin) jos ja vain jos  $f^{-1}(U)$  on avoin kaikille avoimille joukoille  $U \subset \mathbf{R}^m$ . Koska Borelin joukot ovat mitallisia, jatkuva kuvaus  $f : G \rightarrow \mathbf{R}^m$  on mitallinen.

Yleisemmin pätee: Jos  $A \subset \mathbf{R}^n$  on mielivaltainen joukko, niin kuvaus  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$  on jatkuva jos ja vain jos  $f^{-1}(U)$  on  $A$ :n relatiivitopologiassa avoin kaikille avoimille joukoille  $U \subset \mathbf{R}^m$ . Joukko  $V \subset A$  on  $A$ :n relatiivitopologiassa avoin jos ja vain jos  $V = A \cap G$  jollekin avoimelle joukolle  $G \subset \mathbf{R}^n$ .

**Lemma 2.6.3.** Olkoon  $A \subset \mathbf{R}^n$  mitallinen ja kuvaus  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$  jatkuva. Tällöin  $f$  on mitallinen.

*Todistus.* Jos  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$  on jatkuva ( $A \subset \mathbf{R}^n$  mitallinen), niin (Huomautus 2.6.2) kaikille avoimille  $U \subset \mathbf{R}^m$  pätee  $f^{-1}(U) = A \cap G$ , missä  $G \subset \mathbf{R}^n$  on avoin. Tällöin  $f^{-1}(U)$  on mitallisten joukkojen yhdisteenä mitallinen ja siis  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$  on mitallinen.  $\square$

**Lemma 2.6.4.** Olkoon  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$  mitallinen,  $A \subset \mathbf{R}^n$ , ja olkoon  $g : B \rightarrow \mathbf{R}^k$  jatkuva siten, että  $f(A) \subset B \subset \mathbf{R}^m$ . Tällöin yhdistetty kuvaus  $g \circ f$  on mitallinen.

*Todistus.* Harjoitustehtävä.  $\square$

**Esimerkki.** (a) Olkoon  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$  vakiofunktio mitallisessa joukossa  $A \subset \mathbf{R}^n$ , ts.  $f(x) = c \in \mathbf{R}^m$  kaikilla  $x \in A$ . Tällöin  $f$  on mitallinen, sillä kaikilla avoimilla joukoilla  $U \subset \mathbf{R}^m$

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} A, & \text{jos } c \in U, \\ \emptyset, & \text{jos } c \notin U. \end{cases}$$

Yhtä lailla vakiofunktiot  $f : A \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  mitallisessa joukossa  $A \subset \mathbf{R}^n$  ovat mitallisia.

(b) Olkoon  $E \subset \mathbf{R}^n$  ja  $\chi_E : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  joukon  $E$  karakteristinen funktio

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in E, \\ 0, & \text{kun } x \notin E. \end{cases}$$

Väite:  $\chi_E$  on mitallinen funktio jos ja vain jos  $E$  on mitallinen joukko.

Perustelu: Jos  $\chi_E$  on mitallinen, niin  $E = \chi_E^{-1}(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  on mitallinen.

Olkoon kääntäen  $E$  mitallinen ja  $G \subset \mathbf{R}$  avoin. Tällöin

$$\chi_E^{-1}(G) = \begin{cases} \mathbf{R}^n, & \text{jos } \{0, 1\} \subset G, \\ \emptyset, & \text{jos } \{0, 1\} \cap G = \emptyset, \\ E, & \text{jos } \{0, 1\} \cap G = \{1\}, \\ E^c, & \text{jos } \{0, 1\} \cap G = \{0\}. \end{cases}$$

Koska kaikki mahdolliset alkukuvajoukot  $\chi_E^{-1}(G)$  ovat mitallisia,  $\chi_E$  on mitallinen funktio.

Esimerkiksi funktio  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}^n, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{Q}^n, \end{cases}$$

on mitallinen, sillä  $\mathbf{Q}^n$  on numeroituva ja siten nollamittaisena mitallinen. Huomaa, että funktio  $f$  ei ole jatkuva yhdessäkään pisteessä.

Jatkossa tarkastellaan pääasiassa (laajennetusti) reaaliarvoisia funktioita. Näiden mitallisuus voidaan karakterisoida seuraavasti.

**Lause 2.6.5.** Olkoon  $A \subset \mathbf{R}^n$  mitallinen ja olkoon  $f : A \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ . Tällöin ehdot (1)–(5) ovat ekvivalentteja:

- (1)  $\{x \in A : f(x) > \alpha\}$  on mitallinen kaikille  $\alpha \in \mathbf{R}$ ;
- (2)  $\{x \in A : f(x) \geq \alpha\}$  on mitallinen kaikille  $\alpha \in \mathbf{R}$ ;
- (3)  $\{x \in A : f(x) < \alpha\}$  on mitallinen kaikille  $\alpha \in \mathbf{R}$ ;
- (4)  $\{x \in A : f(x) \leq \alpha\}$  on mitallinen kaikille  $\alpha \in \mathbf{R}$ ;
- (5)  $f$  on mitallinen.

*Todistus.* Todistetaan ensin implikaatioketju

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1).$$

(1)  $\Rightarrow$  (2) : Olkoon (1) voimassa ja olkoon  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Kirjoittamalla

$$\{x \in A : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) > \alpha - \frac{1}{i}\}$$

huomataan, että oikeanpuoleinen leikkaus on mitallisten joukkojen numeroituvana leikkauksena mitallinen. Siis (2) pätee.

(2)  $\Rightarrow$  (3) : Olkoon (2) voimassa ja olkoon  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Kirjoittamalla

$$\{x \in A : f(x) < \alpha\} = A \setminus \{x \in A : f(x) \geq \alpha\}$$

huomataan, että oikeanpuoleinen joukko on mitallisen joukon komplementtina mitallinen. Siis (3) pätee.

Implikaatioiden (3)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (1) todistukset ovat analogisia edellä olevien kanssa.

Lopuksi todistetaan, että ehto (5) on ekvivalentti ehdon (1) kanssa.

Oletetaan, että (5) pätee, eli  $f$  on mitallinen. Olkoon  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Tällöin

$$\{x \in A : f(x) > \alpha\} = f^{-1}(] \alpha, +\infty[) \cup f^{-1}(\infty)$$

on mitallinen, joten (1) pätee.

Oletetaan kääntäen, että (1) pätee. Tällöin myös ehdot (2), (3) ja (4) ovat voimassa todistuksen alkuosan nojalla. Olkoon  $G \subset \mathbf{R}$  avoin. Tällöin  $G = \cup_{j \in \mathbf{N}} I_j$ , missä  $I_j = ]a_j, b_j[$  on avoin rajoitettu väli. Nimittäin jokaista  $x \in G$  kohti löydetään avoimen joukon määritelmän nojalla  $x$ -keskinen rajoitettu avoin väli  $I_x \subset G$ , jolloin

$$G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subset \bigcup_{x \in G} \{I_x\} \subset G.$$

Siis  $(I_x)_{x \in G}$  on joukon  $G$  avoin peite ja Lindelöfin lauseen nojalla voidaan poimia numeroituva osapeite  $(I_j)_{j \in \mathbf{N}}$ . Nyt

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{j \in \mathbf{N}} f^{-1}(I_j),$$

missä

$$f^{-1}(I_j) = \{x \in A : a_j < f(x) < b_j\} = \{x \in A : a_j < f(x)\} \cap \{x \in A : f(x) < b_j\}$$

on mitallinen mitallisten joukkojen leikkauksena (ehdot (1) ja (3)). Siispä  $f^{-1}(G)$  on mitallinen mitallisten joukkojen numeroituvana yhdisteenä. Toisaalta

$$f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{j \in \mathbf{N}} \{x \in A : f(x) > j\} \quad \text{ja} \quad f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{j \in \mathbf{N}} \{x \in A : f(x) < -j\}$$

ovat mitallisia. Yhdistämällä ehdot todetaan, että  $f$  on mitallinen.  $\square$

**Esimerkki.** Olkoon  $A \subset \mathbf{R}^n$  ja  $f : A \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  mitallinen. Osoitetaan, että  $f^2$  on mitallinen.

Olkoon  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Jos  $\alpha \geq 0$ , niin

$$\{x \in A : f^2(x) > \alpha\} = \{x \in A : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in A : f(x) < -\sqrt{\alpha}\}.$$

Koska oikeanpuolen joukot ovat mitallisia Lauseen 2.6.5 nojalla, myös vasemmanpuolen joukko on mitallinen. Toisaalta, jos  $\alpha < 0$ , niin

$$\{x \in A : f^2(x) > \alpha\} = A$$

ja siis mitallinen. Lauseen 2.6.5 mukaan  $f^2$  on mitallinen.

**Lause 2.6.6.** Olkoot  $f, g : A \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  mitallisia ja  $c \in \mathbf{R}$ . Tällöin  $f + g$ ,  $fg$ ,  $cf$  ja  $f - g$  ovat mitallisia.

*Todistus.* Todistetaan väitteet yksinkertaisuuden vuoksi vain kuvauksille  $f, g : A \rightarrow \mathbf{R}$ . Osoitetaan ensin, että  $cf$  on mitallinen kaikilla  $c \in \mathbf{R}$ . Olkoon  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Jos  $c = 0$ , niin  $cf$  on vakiofunktiona mitallinen. Jos taas  $c \neq 0$ , niin kaikilla  $\alpha \in \mathbf{R}$  pätee

$$\{x \in A : cf(x) < \alpha\} = \begin{cases} \{x \in A : f(x) < \frac{\alpha}{c}\}, & \text{jos } c > 0, \\ \{x \in A : f(x) > \frac{\alpha}{c}\}, & \text{jos } c < 0. \end{cases}$$

Koska oikeanpuolen joukot ovat Lauseen 2.6.5 ja  $f$ :n mitallisuuden nojalla mitallisia, funktio  $cf$  on Lauseen 2.6.5 nojalla mitallinen.

Funktion  $f + g$  mitallisuuden toteamiseksi olkoon  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Tällöin

$$\begin{aligned} \{x \in A : f(x) + g(x) < \alpha\} &= \{x \in A : f(x) < \alpha - g(x)\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} \{x \in A : f(x) < r\} \cap \{x \in A : \alpha - g(x) > r\}. \end{aligned}$$

Koska oikeanpuolen joukot ovat mitallisia Lauseen 2.6.5 nojalla, myös vasen puoli on mitallinen. Lauseen 2.6.5 mukaan  $f + g$  on mitallinen.

Funktion  $f - g$  mitallisuus seuraa edelläolevasta, sillä valitsemalla  $c = -1$  havaitaan  $-g$  mitalliseksi ja  $f - g = f + (-g)$  on mitallisten summana mitallinen.

Lopuksi funktion  $fg$  mitallisuus seuraa yhtälöstä

$$fg = \frac{1}{2} ((f + g)^2 - f^2 - g^2),$$

sillä  $f^2$  on mitallinen edellisen esimerkin nojalla.  $\square$

## Limes superior ja limes inferior

**Huomautus 2.6.7.** Olkoon  $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$  lukujono laajennetussa reaalilukujoukossa  $\overline{\mathbf{R}}$ . Merkitään

$$b_k = \sup\{a_i : i \geq k\}, \quad c_k = \inf\{a_i : i \geq k\}$$

kaikilla  $k \in \mathbf{N}$ . Koska

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$$

ja

$$c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \dots,$$

so. jono  $(b_k)$  on vähenevä ja jono  $(c_k)$  on kasvava, Lauseen 1.2.6 nojalla on olemassa reaaliset tai äärettömät raja-arvot

$$\beta := \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \inf_{k \in \mathbf{N}} b_k$$

ja

$$\gamma := \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \sup_{k \in \mathbf{N}} c_k.$$

Merkitään

$$\beta = \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i \quad (\text{yläraja-arvo eli } \textit{limes superior})$$

ja

$$\gamma = \liminf_{i \rightarrow \infty} a_i \quad (\text{aläraja-arvo eli } \textit{limes inferior}).$$

**Esimerkki.** (a) Olkoon  $(a_i)$  vuorotteleva lukujono  $a_i = (-1)^i$ , ts. jono  $-1, 1, -1, 1, \dots$ . Tällöin  $b_k = 1$  ja  $c_k = -1$  kaikilla  $k \in \mathbf{N}$ . Näin ollen

$$\beta = \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 1 \quad \text{ja} \quad \gamma = \liminf_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = -1.$$

(b) Olkoon  $(a_i)$  lukujono  $1, 2, 3, 4, \dots$ . Tällöin  $b_k = \infty$  ja  $c_k = k$  kaikilla  $k \in \mathbf{N}$ . Näin ollen

$$\beta = \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \infty \quad \text{ja} \quad \gamma = \liminf_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \infty.$$

**Lemma 2.6.8.** Olkoon  $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$  lukujono joukossa  $\overline{\mathbf{R}}$ . Tällöin

- (1)  $\liminf_{i \rightarrow \infty} a_i \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i$ ;
- (2) Jos  $a_i \leq M$  kaikille  $i \geq i_0$  jollekin  $M \in \overline{\mathbf{R}}$ , niin  $\limsup_{i \rightarrow \infty} a_i \leq M$ ;
- (3) Jos  $a_i \geq m$  kaikille  $i \geq i_0$  jollekin  $m \in \overline{\mathbf{R}}$ , niin  $\liminf_{i \rightarrow \infty} a_i \geq m$ .

*Todistus.* Todistukset perustuvat epäyhtälön säilymiseen raja-arvoissa: Jos  $a_i \leq b_i$  kaikilla  $i \geq i_0$ , niin  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i \leq \lim_{i \rightarrow \infty} b_i$  jos raja-arvot ovat olemassa äärellisenä tai äärettömänä.

Epäyhtälön säilymisperiaatteen perustelu lyhyesti: Jos tehdään antiteesi  $a := \lim_{i \rightarrow \infty} a_i > \lim_{i \rightarrow \infty} b_i =: b$ , niin raja-arvon määritelmää käyttäen löydetään kaikissa tapauksissa indeksi  $i_1 \geq i_0$ , jolle  $a_i > b_i$  kaikilla  $i \geq i_1$ . Ristiriita.



(1) Koska

$$b_k = \sup\{a_i : i \geq k\}, \quad c_k = \inf\{a_i : i \geq k\},$$

niin kaikilla  $k$  pätee  $b_k \geq c_k$ . Ey:n säilymisen seurauksena

$$\beta = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k \geq \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \gamma.$$

(2) Jos  $a_i \leq M$  kaikilla  $i \geq i_0$ , niin  $b_k = \sup\{a_i : i \geq k\} \leq M$  kaikilla  $k \geq i_0$ . Ey:n säilymisen seurauksena  $\beta = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k \leq M$ .

(3) Jos  $a_i \geq m$  kaikilla  $i \geq i_0$ , niin  $c_k = \inf\{a_i : i \geq k\} \geq m$  kaikilla  $k \geq i_0$ . Ey:n säilymisen seurauksena  $\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k \geq m$ .  $\square$

Seuraava lause kertoo ylä- ja alaraja-arvojen yhteyden raja-arvoon.

**Lause 2.6.9.** Olkoon  $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$  lukujono joukossa  $\overline{\mathbf{R}}$ . Tällöin raja-arvo  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i \in \overline{\mathbf{R}}$  on olemassa jos ja vain jos  $\liminf_{i \rightarrow \infty} a_i = \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i$ . Tässä tapauksessa

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \liminf_{i \rightarrow \infty} a_i = \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i.$$

*Todistus.* Oletetaan, että on olemassa  $a := \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$ . Oletetaan ensin, että  $a \in \mathbf{R}$ . Tällöin kaikilla  $\varepsilon > 0$  on olemassa  $i_0$  siten, että  $a - \varepsilon < a_i < a + \varepsilon$  kaikilla  $i \geq i_0$ . Näin ollen

$$a - \varepsilon \leq c_{i_0} \leq \gamma \leq \beta \leq b_{i_0} \leq a + \varepsilon.$$

Koska tämä pätee kaikilla  $\varepsilon > 0$ , on välttämättä  $\gamma = \beta = a$ .

Olkoon seuraavaksi  $a = \infty$ . Tällöin kaikilla  $M > 0$  on olemassa  $i_0$  siten, että  $a_i > M$  kun  $i \geq i_0$ . Lemman 2.6.8 (3) mukaan  $M \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} a_i \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i$ . Koska  $M > 0$  on mielivaltainen, on  $\gamma = \beta = \infty$ . Tapaus  $a = -\infty$  käsitellään vastaavasti.

Käänteinen väite harjoitustehtävä.  $\square$

Integroimisteorian konvergenssituloksien kannalta on tarpeellista tietää, että mitallisten funktioiden rajafunktiot ovat mitallisia:

**Lause 2.6.10.** Olkoot funktiot  $f_j : A \rightarrow \mathbf{R}$  mitallisia, missä  $j \in \mathbf{N}$  ja  $A \subset \mathbf{R}^n$ . Tällöin funktiot

$$\sup_{j \in \mathbf{N}} f_j, \quad \inf_{j \in \mathbf{N}} f_j, \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j, \quad \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j$$

ovat mitallisia. Erityisesti, jos rajafunktio  $f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$  on olemassa, se on mitallinen.

*Todistus.* Olkoon  $g(x) = \sup_{j \in \mathbf{N}} f_j(x)$ , missä  $x \in A$ . Tällöin kaikilla  $\alpha \in \mathbf{R}$  pätee

$$\{x \in A : g(x) > \alpha\} = \bigcup_{j \in \mathbf{N}} \{x \in A : f_j(x) > \alpha\}. \quad (2)$$

Perustelu: Jos  $g(x) = \sup\{f_j(x) : j \in \mathbf{N}\} > \alpha$ , niin jollekin  $j$  pätee  $f_j(x) > \alpha$ . Kääntäen, jos  $f_j(x) > \alpha$  jollekin  $j$ , niin  $g(x) \geq f_j(x) > \alpha$ .

Yhtälössä (2) oikeanpuoleinen joukko on mitallisten joukkojen yhdisteenä mitallinen, joten  $g$  on mitallinen (Lause 2.6.5).

Funktion  $\inf_{j \in \mathbf{N}} f_j(x)$  mitallisuus päätellään vastaavasti tai vaihtoehtoisesti yhtälöstä

$$\inf_{j \in \mathbf{N}} f_j = -\sup_{j \in \mathbf{N}} (-f_j).$$

Funktiot

$$g_k = \sup_{j \geq k} f_j \quad \text{ja} \quad h_k = \inf_{j \geq k} f_j$$

ovat alkuosan nojalla mitallisia kaikilla  $k \in \mathbf{N}$  ja siten edelleen funktiot

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} f_j = \inf_{k \in \mathbf{N}} (\sup_{j \geq k} f_j) = \inf_{k \in \mathbf{N}} g_k$$

ja

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = \sup_{k \in \mathbf{N}} (\inf_{j \geq k} f_j) = \sup_{k \in \mathbf{N}} h_k$$

ovat mitallisia.  $\square$

**Huomautus 2.6.11.** (a) Lauseessa 2.6.10 funktiot  $\sup_{j \in \mathbf{N}} f_j$ ,  $\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j$  etc. määritellään pisteittäin, ts.

$$(\sup_{j \in \mathbf{N}} f_j)(x) := \sup_{j \in \mathbf{N}} f_j(x)$$

ja

$$(\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j)(x) := \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$$

kaikilla  $x \in A$ .

(b) Lause 2.6.10 sanoo erityisesti sen, että  $\max(f_1, \dots, f_k)$  ja  $\min(f_1, \dots, f_k)$  ovat mitallisia jos  $f_i : A \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  on mitallinen kun  $i = 1, \dots, k$ .

**Esimerkki.** Olkoon  $I \subset \mathbf{R}$  avoin väli ja  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  funktio, jolla on olemassa derivaatta  $f'(x)$  kaikilla  $x \in I$ . Tällöin  $f'$  on mitallinen.

Perustelu: Olkoon  $g_n : I \rightarrow \mathbf{R}$  funktio

$$g_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}},$$

jolloin  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$  kaikilla  $x \in I$ . Koska  $f$  on derivoituva, se on jatkuva ja siis mitallinen. Koska kuvaus

$$x \mapsto x + \frac{1}{n} \mapsto f(x + \frac{1}{n})$$

on kahden jatkuvan funktion yhdistettynä funktiona mitallinen (Lemma 2.6.4), on  $g_n$  mitallinen Lauseen 2.6.6 mukaan. Siis  $f'$  on mitallinen Lauseen 2.6.10 mukaan.

**Sanonta.** Sanomme, että ominaisuus pätee *melkein kaikkialla* (lyhyesti m.k.) jos se pätee nollamittaisen joukon ulkopuolella.

Esimerkiksi, funktio  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}^n, \\ x, & \text{kun } x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{Q}^n \end{cases}$$

on äärellinen melkein kaikkialla (joukossa  $\mathbf{R}^n$ ), sillä  $m(\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = \pm\infty\}) = 0$ .

Nollamittaiset joukot ovat integrointiteoriassa monessa mielessä merkityksettömiä. Ensimmäisenä esimerkkinä tästä todistetaan lause, jonka mukaan mitallista funktiota voidaan nollamittaisessa joukossa muuttaa mielivaltaisesti mitallisuutta menettämättä.

**Lause 2.6.12.** Olkoot  $f, g : A \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  funktioita siten, että  $f = g$  m.k. joukossa  $A \subset \mathbf{R}^n$ . Tällöin  $g$  on mitallinen jos  $f$  on mitallinen.

*Todistus.* Olkoon  $f$  mitallinen ja  $A_0 := \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ . Oletuksen mukaan  $m(A_0) = 0$ . Olkoon  $\alpha \in \mathbf{R}$  ja merkitään

$$E_\alpha = \{x \in A : f(x) < \alpha\}, \quad F_\alpha = \{x \in A : g(x) < \alpha\}.$$

Riittää osoittaa, että  $F_\alpha$  on mitallinen. Nyt

$$F_\alpha = (F_\alpha \cap A_0) \cup (F_\alpha \setminus A_0).$$

Tässä  $m^*(F_\alpha \cap A_0) \leq m^*(A_0) = 0$ , joten  $F_\alpha \cap A_0$  on mitallinen. Toisaalta

$$F_\alpha \setminus A_0 = E_\alpha \setminus A_0$$

on mitallinen, sillä  $E_\alpha$  ja  $A_0$  ovat mitallisia oletusten perusteella. Väite seuraa.  $\square$

## 3 Lebesguen integraali

### 3.1 Yksinkertaiset funktiot

**Määritelmä 3.1.1.** Funktio  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  on *yksinkertainen*, jos

- (1)  $f$  on mitallinen;
- (2)  $f$  on ei-negatiivinen ( $f(x) \geq 0$  kaikilla  $x \in \mathbf{R}^n$ );
- (3)  $f$  saa vain äärellisen monta arvoa.

Merkitään  $\mathcal{Y} := \{f \mid f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+ \text{ yksinkertainen}\}$ .

**Huomautus 3.1.2.** Jos  $f, g \in \mathcal{Y}$ , niin  $f + g, fg \in \mathcal{Y}$ . Nimittäin  $f + g$  ja  $fg$  ovat reaaliarvoisia, ei-negatiivisia, mitallisia (Lause 2.6.6) ja ne saavat vain äärellisen määrän eri arvoja.

**Nimitys.** Joukot  $E_1, \dots, E_k$  muodostavat joukon  $E \subset \mathbf{R}^n$  *osituksen*, jos joukot  $E_i$  ovat pareittain pistevieraita ja  $E = \cup_{i=1}^k E_i$ .

Olkoon  $f \in \mathcal{Y}$  ja olkoot  $a_1, \dots, a_k \in \mathbf{R}$  funktion  $f$  saamat eri arvot. Tällöin joukot  $A_i := f^{-1}(a_i)$  ovat mitallisia (ks. harjoitustehtävä) ja ne muodostavat avaruuden  $\mathbf{R}^n$  osituksen. Edelleen pätee

$$f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}. \quad (*)$$

Kääntäen jokainen muotoa (\*) oleva funktio  $f$ , missä  $A_i$ :t muodostavat  $\mathbf{R}^n$ :n osituksen, on yksinkertainen.

**Määritelmä 3.1.3.** Olkoon  $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i} \in \mathcal{Y}$ , missä joukot  $A_i$  muodostavat  $\mathbf{R}^n$ :n osituksen ja  $a_i \in \mathbf{R}_+$  kaikilla  $i = 1, \dots, k$ . Tällöin funktion  $f$  *integraali (yli joukon  $\mathbf{R}^n$ )* on luku

$$\int f \, dm = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i).$$

**Huomautus** Määritelmässä sovelletaan sääntöä  $0 \cdot \infty = 0$  mikäli  $a_i = 0$  ja  $m(A_i) = \infty$ . Huomaa, että  $\int f \, dm = \infty$  jos  $a_i > 0$  ja  $m(A_i) = \infty$  jollekin  $i$ .

**Esimerkki.** Funktio  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}^n, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{Q}^n, \end{cases}$$

on yksinkertainen, sillä  $\mathbf{Q}^n$  on numeroituvana mitallinen.

Yleisesti  $\chi_E$  on yksinkertainen jos  $E \subset \mathbf{R}^n$  on mitallinen. Esityksestä

$$\chi_E = 1 \cdot \chi_E + 0 \cdot \chi_{\mathbf{R}^n \setminus E}$$

saadaan

$$\int \chi_E \, dm = 1 \cdot m(E) + 0 \cdot m(\mathbf{R}^n \setminus E) = m(E).$$

**Huomautus 3.1.4.** Osoitetaan, että yksinkertaisen funktion  $f$  integraali ei riipu  $f$ :n esityksestä. Olkoon

$$f = \sum_{i=1}^l a_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j},$$

missä  $a_i, b_j \in \mathbf{R}_+$ , joukot  $A_i$  muodostavat  $\mathbf{R}^n$ :n osituksen ja joukot  $B_j$  muodostavat  $\mathbf{R}^n$ :n osituksen. Huomaa, että tällainen  $f$ :n esitys ei ole yksikäsitteinen!

Kaikilla  $i$  voidaan muodostaa joukon  $A_i$  ositus

$$A_i = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$$

ja lisäksi  $a_i \chi_{A_i}(x) = b_j \chi_{B_j}(x)$  aina kun  $x \in A_i \cap B_j$ . Siis  $a_i = b_j$  mikäli  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ . Mitan additiivisuuden (ks. Lause 2.4.7) perusteella

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l a_i m(A_i) &= \sum_{i=1}^l a_i \sum_{j=1}^m m(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m a_i m(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l a_i m(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l b_j m(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m b_j \sum_{i=1}^l m(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m b_j m(B_j). \end{aligned}$$

Tässä viimeinen yhtäsuuruus seuraa mitan additiivisuudesta, sillä  $B_j = \bigcup_{i=1}^l (A_i \cap B_j)$  on pistevieras yhdiste. Siis integraalin arvo ei riipu valitusta esityksestä.

**Määritelmä 3.1.5.** Olkoon  $f \in \mathcal{Y}$ . Tällöin funktion  $f$  integraali yli mitallisen joukon  $E \subset \mathbf{R}^n$  on luku

$$\int_E f \, dm = \int f \chi_E \, dm.$$

**Lemma 3.1.6.** Olkoon  $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i} \in \mathcal{Y}$ , missä joukot  $A_i$  muodostavat  $\mathbf{R}^n$ :n osituksen ja  $a_i \in \mathbf{R}_+$  kaikilla  $i = 1, \dots, k$ . Tällöin kaikille mitallisille joukoille  $E \subset \mathbf{R}^n$  pätee

$$\int_E f \, dm = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E).$$

*Todistus.* Suoralla laskulla saadaan

$$f \chi_E = \chi_E \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i} = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i} \chi_E = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i \cap E}.$$

Merkitimällä  $A'_i = A_i \cap E$  ja  $a'_i = a_i$  kaikilla  $i = 1, \dots, k$  sekä lisäämällä indeksi  $k+1$ , jolle  $a'_{k+1} = 0$  ja  $A'_{k+1} = \mathbf{R}^n \setminus E$  saadaan esitys

$$f \chi_E = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i \cap E} = \sum_{i=1}^{k+1} a'_i \chi_{A'_i},$$

missä summaus ymmärretään yli epätyhjien joukkojen  $A'_i$ . Tällöin oikealla puolella joukot  $A'_i$  muodostavat  $\mathbf{R}^n$ :n osituksen, joten

$$\int_E f \, dm = \int f \chi_E \, dm = \sum_{i=1}^{k+1} a'_i m(A'_i) = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E).$$

Tässä käytettiin hyväksi tietoa  $a'_{k+1} m(A'_{k+1}) = 0$ .  $\square$

**Esimerkki.** Olkoon  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  suljetulla välillä jatkuva funktio. Muodostetaan välin  $[a, b]$  jako  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$  osaväleihin, joita on  $k$  kappaletta. Riemannin integraalin määritelmässä lukua  $\int_a^b f(x) \, dx$  approksimoidaan alasummilla

$$\sum_{i=1}^k \min f([x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Nämä voidaan tulkita yksinkertaisen funktion integraaleiksi, sillä jatkuvuuden seurauksena alasumma voidaan kirjoittaa esimerkiksi muodossa

$$\sum_{i=1}^k \min f([x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^k \inf f([x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) + f(b) \cdot 0,$$

jolloin oikealla puolella esiintyy Lemman 3.1.6 mukainen yksinkertaisen funktion integraali.

Seuraavassa integraalin keskeiset ominaisuudet (additiivisuus, lineaarisuus ja monotonisuus) todistetaan ensin yksinkertaisille funktioille.

**Lemma 3.1.7.** Olkoot  $E_j \subset \mathbf{R}^n$ ,  $j \in \mathbf{N}$ , mitallisia ja pareittain pistevieraita. Tällöin kaikilla  $f \in \mathcal{Y}$  pätee

$$\int_{\cup_{j \in \mathbf{N}} E_j} f \, dm = \sum_{j \in \mathbf{N}} \int_{E_j} f \, dm.$$

*Todistus.* Olkoon  $E = \cup_{j \in \mathbf{N}} E_j$  ja olkoon

$$f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i},$$

missä  $a_i \in \mathbf{R}_+$  ja joukot  $A_i$  muodostavat  $\mathbf{R}^n$ :n osituksen. Lemman 3.1.6 mukaan

$$\int_E f \, dm = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E).$$

Koska

$$A_i \cap E = \bigcup_{j \in \mathbf{N}} (A_i \cap E_j)$$

ja oikealla puolella yhdiste on pareittain pistevieras, mitan numeroituvasta additiivisuudesta seuraa (ks. Lause 2.4.7), että

$$m(A_i \cap E) = \sum_{j \in \mathbf{N}} m(A_i \cap E_j), \quad i = 1, \dots, k.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\int_E f \, dm &= \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^k a_i \sum_{j \in \mathbf{N}} m(A_i \cap E_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j \in \mathbf{N}} a_i m(A_i \cap E_j) \\ &= \sum_{j \in \mathbf{N}} \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E_j) = \sum_{j \in \mathbf{N}} \int_{E_j} f \, dm\end{aligned}$$

Lemman 2.3.3 nojalla.  $\square$

**Lemma 3.1.8.** Olkoot  $f, g \in \mathcal{Y}$  ja  $E \subset \mathbf{R}^n$  mitallinen. Tällöin

- (1)  $\int_E (f + g) \, dm = \int_E f \, dm + \int_E g \, dm$ ;
- (2)  $\int_E \alpha f \, dm = \alpha \int_E f \, dm$  kaikilla  $\alpha \in \mathbf{R}_+$ .

*Todistus.* (1) Olkoon aluksi  $E = \mathbf{R}^n$ . Merkitään

$$f = \sum_{i=1}^l a_i \chi_{A_i} \quad \text{ja} \quad g = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j},$$

missä  $a_i, b_j \in \mathbf{R}_+$ , joukot  $A_i$  muodostavat  $\mathbf{R}^n$ :n osituksen ja joukot  $B_j$  muodostavat  $\mathbf{R}^n$ :n osituksen. Muodostamalla ositus joukoilla  $A_i \cap B_j$  yli indeksien  $i$  ja  $j$  saadaan summalle esitys

$$f + g = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\int (f + g) \, dm &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m (a_i + b_j) m(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m a_i m(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l b_j m(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^l a_i \sum_{j=1}^m m(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m b_j \sum_{i=1}^l m(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^l a_i m(A_i) + \sum_{j=1}^m b_j m(B_j) = \int f \, dm + \int g \, dm.\end{aligned}$$

Tässä toiseksi viimeinen yhtälö perustuu mitan additiivisuuteen sillä  $A_i = \cup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$  ja  $B_j = \cup_{i=1}^l (A_i \cap B_j)$  (erilliset yhdisteet).

Jos  $E \subset \mathbf{R}^n$  on mielivaltainen mitallinen, niin alkuosan nojalla

$$\begin{aligned}\int_E (f + g) \, dm &= \int (f + g) \chi_E \, dm = \int (f \chi_E + g \chi_E) \, dm \\ &= \int f \chi_E \, dm + \int g \chi_E \, dm = \int_E f \, dm + \int_E g \, dm.\end{aligned}$$

(2) Harjoitustehtävä.  $\square$

**Merkintä.** Jatkossa merkitään esimerkiksi  $f \leq g$  (vast.  $f \leq g$  m.k.) jos funktiot ovat määriteltyjä samassa joukossa ja kaikille (vast. melkein kaikille) määrittelyjoukon pisteille  $x$  pätee  $f(x) \leq g(x)$ .

**Lemma 3.1.9.** Olkoot  $f, g \in \mathcal{Y}$  ja olkoot  $E, F \subset \mathbf{R}^n$  mitallisia. Tällöin

- (1)  $\int_E f \, dm \leq \int_E g \, dm$  aina kun  $f \leq g$  joukossa  $E$ ;
- (2)  $\int_E f \, dm \leq \int_F f \, dm$  aina kun  $E \subset F$ ;
- (3)  $\int_E f \, dm = 0$  aina kun  $m(E) = 0$ .

*Todistus.* (1) Kirjoittamalla  $g = f + (g - f)$  saadaan (koska  $g - f \in \mathcal{Y}$  ja yksinkertaisen funktion integraali on ei-negatiivinen) Lemman 3.1.8 nojalla

$$\int_E g \, dm = \int_E f + (g - f) \, dm = \int_E f \, dm + \int_E (g - f) \geq \int_E f \, dm.$$

(2) Koska  $E \subset F$ , niin  $\chi_E \leq \chi_F$ , ja edelleen  $f\chi_E \leq f\chi_F$ . Kohdan (1) nojalla

$$\int_E f \, dm = \int f\chi_E \, dm \leq \int f\chi_F \, dm = \int_F f \, dm.$$

(3) Olkoon

$$f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i},$$

missä  $a_i \in \mathbf{R}_+$  ja joukot  $A_i$  muodostavat  $\mathbf{R}^n$ :n osituksen. Lemman 3.1.6 nojalla

$$\int_E f \, dm = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E) = 0,$$

sillä  $A_i \cap E \subset E$  ja  $m(E) = 0$ .  $\square$

## 3.2 Ei-negatiivisen funktion integraali

Seuraavaksi yleistämme integraalin määritelmän kaikille mitallisille funktioille. Tarkastellaan ensin ei-negatiivisia funktioita.

**Määritelmä 3.2.1.** Jos funktio  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  on mitallinen, sen integraali määritellään lukuna

$$\int f \, dm = \sup \left\{ \int \phi \, dm \mid \phi \in \mathcal{Y} \text{ ja } \phi \leq f \right\}.$$

Mitallisen funktion  $f : E \rightarrow [0, +\infty]$  integraali yli mitallisen joukon  $E \subset \mathbf{R}^n$  määritellään lukuna

$$\int_E f \, dm = \int f\chi_E \, dm.$$



Tässä ja jatkossa aina  $f\chi_E$  on funktion  $f$  nollajatko, ts.  $f$ :n arvoiksi joukossa  $\mathbf{R}^n \setminus E$  asetetaan 0. Mitallista funktiota  $f : E \rightarrow [0, +\infty]$  sanotaan *integroituvaksi joukossa*  $E \subset \mathbf{R}^n$ , jos

$$\int_E f \, dm < \infty.$$

**Huomautus.** (a) On helppo osoittaa, että nollajatko  $f\chi_E : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  on mitallinen, jos  $E \subset \mathbf{R}^n$  ja  $f : E \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  mitallinen (harjoitustehtävä).

(b) Integraali  $\int_E f \, dm \in [0, +\infty]$  on siis olemassa jokaiselle mitalliselle funktiolle  $f : E \rightarrow [0, +\infty]$ , missä  $E \subset \mathbf{R}^n$ .

**Sopimus.** Jatkossa puhuttaessa integraalista (tai integroituvuudesta) oletetaan ilman mainintaa, että tarkasteltavat joukot ja funktiot ovat mitallisia.

**Lemma 3.2.2.** Olkoon  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  mitallinen. Tällöin on olemassa kasvava jono  $(\phi_i)_{i \in \mathbf{N}}$  yksinkertaisia funktioita siten, että  $f = \lim_{i \rightarrow \infty} \phi_i$ .

*Todistus.* Määritellään funktiot  $\phi_j : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  seuraavasti: Jaetaan  $[0, j)$  erillisiin puoliavoimiin väleihin

$$I_i = [(i-1)2^{-j}, i2^{-j}), \quad i = 1, \dots, j2^j,$$

ja määritellään

$$\phi_j(x) = \begin{cases} (i-1)2^{-j}, & \text{kun } x \in f^{-1}(I_i), \\ j, & \text{kun } x \in f^{-1}([j, +\infty]). \end{cases}$$

Tällöin  $\phi_j \in \mathcal{Y}$ , jono  $(\phi_j)$  on kasvava ja  $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j(x)$ , ks. Ilkka Holopainen: Mitta ja integraali, Helsingin yliopisto (2002), s.48.  $\square$

**Sopimus.** Ellei erikseen muuta mainita, merkintä  $f := \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$  tarkoittaa aina pisteittäistä rajafunktiota, so.  $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$  kaikille määrittelyjoukon pisteille  $x$ .

**Lause 3.2.3.** Olkoon  $E \subset \mathbf{R}^n$  mitallinen ja olkoot  $f, g : E \rightarrow [0, +\infty]$  mitallisia. Tällöin

- (1)  $\int_E f \, dm \leq \int_E g \, dm$  aina kun  $f \leq g$  joukossa  $E$ ;
- (2)  $\int_{E'} f \, dm \leq \int_E f \, dm$  aina kun  $E' \subset E$  on mitallinen;
- (3)  $\int_E f \, dm = 0$  aina kun  $m(E) = 0$ ;
- (4)  $\int_E af \, dm = a \int_E f \, dm$  kaikilla  $a \in \mathbf{R}_+$ .

*Todistus.* (1) Olkoon aluksi  $E = \mathbf{R}^n$  ja  $\phi \in \mathcal{Y}$ ,  $\phi \leq f$ . Tällöin  $\phi \leq g$  oletuksen seurauksena, joten

$$\int \phi \, dm \leq \int g \, dm,$$

sillä kaikki  $\int f \, dm$ :n "testifunktiot" ovat  $\int g \, dm$ :n "testifunktioita". Koska

$$\int f \, dm = \sup \left\{ \int \phi \, dm \mid \phi \in \mathcal{Y} \text{ ja } \phi \leq f \right\},$$

supremumin määritelmästä seuraa, että  $\int f \, dm \leq \int g \, dm$ .

Olkoon  $E \subset \mathbf{R}^n$  mielivaltainen. Koska  $f\chi_E \leq g\chi_E$  joukossa  $\mathbf{R}^n$ , niin alkuosan nojalla

$$\int_E f \, dm = \int f\chi_E \, dm \leq \int g\chi_E \, dm = \int_E g \, dm.$$

(2) Jos  $E' \subset E$ , niin  $f\chi_{E'} \leq f\chi_E$  ja siten kohdan (1) nojalla

$$\int_{E'} f \, dm = \int f\chi_{E'} \, dm \leq \int f\chi_E \, dm = \int_E f \, dm.$$

(3) Olkoon  $\phi \in \mathcal{Y}$ ,  $\phi \leq f\chi_E$ . Tällöin  $\phi = 0$  joukossa  $\mathbf{R}^n \setminus E$ , joten  $\phi = \phi\chi_E$ . Lemman 3.1.9 (3) nojalla

$$\int \phi \, dm = \int \phi\chi_E \, dm = \int_E \phi \, dm = 0.$$

Näin ollen

$$\int_E f = \sup \left\{ \int \phi \, dm \mid \phi \in \mathcal{Y} \text{ ja } \phi \leq f\chi_E \right\} = \sup\{0\} = 0.$$

(4) Jos  $a = 0$ , väite pätee koska kummatkin puolet ovat  $= 0$ . Olkoon  $a > 0$ ,  $\phi \in \mathcal{Y}$ ,  $\phi \leq f\chi_E$ . Tällöin  $a\phi \leq af\chi_E$  ja  $a\phi \in \mathcal{Y}$ , joten (Lemma 3.1.8 (2))

$$\int_E af \, dm \geq \int a\phi \, dm = a \int \phi \, dm.$$

Supremumin määritelmän nojalla

$$\frac{1}{a} \int_E af \, dm \geq \int_E f \, dm \quad \text{eli} \quad a \int_E f \, dm \leq \int_E af \, dm.$$

Toisaalta  $f = \frac{1}{a}(af)$ , joten alkuosan nojalla

$$\int_E f = \int_E \frac{1}{a}(af) \, dm \geq \frac{1}{a} \int_E af \, dm.$$

Näin ollen  $\int_E af \, dm \leq a \int_E f \, dm$ .  $\square$

Lebesguen integroimisteorian toimivuus kiteytyy tyylikkäissä konvergenssilauseissa. Ensimmäisenä konvergenssilauseena todistetaan monotonisen konvergenssin lause.

**Lause 3.2.4** (Monotonisen konvergenssin lause). Olkoon  $f_i : E \rightarrow [0, +\infty]$  kasvava jono mitallisia funktioita (ts.  $f_i \leq f_{i+1}$  kaikilla  $i \in \mathbf{N}$ ) joukossa  $E \subset \mathbf{R}^n$ . Tällöin

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i \, dm = \int_E \lim_{i \rightarrow \infty} f_i \, dm.$$

Lauseen 3.2.4 todistamiseksi tarvitaan seuraava yksinkertaisia funktioita koskeva aputullos:

**Lemma 3.2.5.** Olkoon  $f \in \mathcal{Y}$  ja olkoon  $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset \mathbf{R}^n$  kasvava jono mitallisia joukkoja. Tällöin

$$\int_{\cup_{i \in \mathbf{N}} E_i} f \, dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{E_i} f \, dm.$$

*Todistus.* Harjoitustehtävä.  $\square$

*Todistus.* (Lause 3.2.4) Koska  $f_i \leq f_{i+1}$ , niin (Lause 3.2.3 (1))  $\int_E f_i \, dm \leq \int_E f_{i+1} \, dm$  kaikilla  $i \in \mathbf{N}$ . Näin ollen raja-arvo

$$a := \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i \, dm \in [0, +\infty]$$

on olemassa (Lause 1.2.6). Samoin on olemassa mitallinen raja-funktio  $f := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$  (Lause 2.6.10). Koska  $f_i \leq f$ , niin  $\int_E f_i \, dm \leq \int_E f \, dm$ , ja siten

$$a \leq \int_E f \, dm.$$

Osoitetaan, että  $\int_E f \, dm \leq a$ . Korvaamalla  $f, f_i$  funktioilla  $f\chi_E, f_i\chi_E$  voidaan olettaa, että  $E = \mathbf{R}^n$ . Olkoon  $0 < b < 1$  ja  $\phi \in \mathcal{Y}$ ,  $\phi \leq f$ . Merkitään

$$E_i = \{x \in \mathbf{R}^n : f_i(x) \geq b\phi(x)\} = \{x \in \mathbf{R}^n : f_i(x) - b\phi(x) \geq 0\}.$$

Joukko  $E_i$  on mitallinen Lauseen 2.6.5 nojalla. Toisaalta  $E_i \subset E_{i+1}$ , sillä  $f_i(x) \leq f_{i+1}(x)$  kaikilla  $x \in \mathbf{R}^n$ .

Osoitetaan, että

$$\mathbf{R}^n = \cup_{i=1}^{\infty} E_i. \quad (*)$$

Olkoon  $x \in \mathbf{R}^n$ . Jos  $\phi(x) = 0$ , niin  $x \in E_1$ . Voidaan siis olettaa, että  $\phi(x) > 0$ . Tällöin  $b\phi < \phi(x) \leq f(x)$ , sillä  $\phi(x) < \infty$ . Raja-arvon määritelmästä seuraa, että jollekin  $i_b \in \mathbf{N}$  pätee  $b\phi(x) \leq f_{i_b}(x)$ . Siis  $x \in E_{i_b}$ , joten (\*) pätee.

Koska  $f_i \geq f_i\chi_{E_i} \geq b\phi\chi_{E_i}$ , niin (Lause 3.2.3)

$$\int_{\mathbf{R}^n} f_i \, dm \geq \int_{\mathbf{R}^n} b\phi\chi_{E_i} \, dm = b \int_{E_i} \phi \, dm.$$

Lemman 3.2.5 mukaan (jono  $(E_i)$  on kasvava)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} b \int_{E_i} \phi \, dm = b \int_{\cup_{i=1}^{\infty} E_i} \phi \, dm = b \int_{\mathbf{R}^n} \phi \, dm.$$

Koska epäyhtälö säilyy raja-arvossa, niin

$$a = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_i \, dm \geq b \int_{\mathbf{R}^n} \phi \, dm$$

kaikilla  $\phi \in \mathcal{Y}$ ,  $\phi \leq f$ . Ottamalla supremum yli funktioiden  $\phi$ , saadaan

$$a \geq \int_{\mathbf{R}^n} f \, dm.$$

Väite

$$a \geq \int_{\mathbf{R}^n} f \, dm$$

seuraa antamalla  $b \rightarrow 1^-$ .  $\square$

Lause 3.2.4 sanoo siis, että kasvavan ja ei-negatiivisen jonon tapauksessa *integraalien raja-arvo on aina rajafunktion integraali*.

**Huomautus.** Huomaa, että Lauseessa 3.2.4 raja-arvo  $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) \in [0, +\infty]$  on aina olemassa Lauseen 1.2.6 nojalla.

**Esimerkki.** Monotonisen konvergenssin ideaa ei voi soveltaa väheneville funktiojonoille!

Olkoon  $f_i = \chi_{[i, \infty[}$ . Tällöin  $(f_i)$  on vähenevä jono yksinkertaisia funktioita ja

$$\int f_i \, dm = m([i, \infty[) = \infty$$

kaikilla  $i \in \mathbf{N}$ . Toisaalta  $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = 0$  kaikilla  $x \in \mathbf{R}$ , joten

$$\int \lim_{i \rightarrow \infty} f_i \, dm = 0.$$

**Huomautus 3.2.6.** (a) Voidaan osoittaa, että jos rajoitettu funktio  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$  on Riemann-integroituva, niin se on Lebesgue-integroituva joukossa  $[a, b]$  ja integraalien arvot ovat samat, Rudin: Principles of Mathematical Analysis, 3rd edition, s. 322–324 (Kirjallinen harjoitustehtävä 2).

(b) Tunnetusti funktio  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

ei ole Riemann-integroituva yli minkään välin  $[a, b] \subset \mathbf{R}$ . Sen sijaan Lebesguen integraalille pätee  $\int_{[a, b]} f \, dm = 0$  kaikilla (ks. esimerkki).

Siis Lebesguen integroituvuuden käsite on yleisempi kuin Riemannin-integroituvuuden käsite.

**Lause 3.2.7.** Olkoon  $E \subset \mathbf{R}^n$  mitallinen ja olkoot  $f_1, \dots, f_k : E \rightarrow [0, +\infty]$  mitallisia. Tällöin

$$\int_E \sum_{i=1}^k f_i \, dm = \sum_{i=1}^k \int_E f_i \, dm.$$

*Todistus.* Korvaamalla funktiot  $f_i$  funktioilla  $f_i \chi_E$  voidaan olettaa, että  $E = \mathbf{R}^n$ . Edelleen voidaan olettaa, että  $k = 2$ , sillä yleistys saadaan induktiolla. Lemman 3.2.2 nojalla on olemassa kasvavat jonot  $(\phi_i)$  ja  $(\psi_i)$  yksinkertaisia funktioita siten, että

$$f_1 = \lim_{i \rightarrow \infty} \phi_i \quad \text{ja} \quad f_2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \psi_i.$$

Lemman 3.1.8 (1) mukaan

$$\int \phi_i + \psi_i \, dm = \int \phi_i \, dm + \int \psi_i \, dm.$$

Monotonisen konvergenssin lauseen mukaan

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int \phi_i dm = \int f_1 dm \quad \text{ja} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int \psi_i dm = \int f_2 dm.$$

Vastaavasti  $\lim_{i \rightarrow \infty} (\phi_i + \psi_i) = f_1 + f_2$  ja siten monotonisen konvergenssin lauseen mukaan

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int \phi_i + \psi_i dm = \int f_1 + f_2 dm.$$

Väite

$$\int f_1 + f_2 dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int \phi_i + \psi_i dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int \phi_i dm + \lim_{i \rightarrow \infty} \int \psi_i dm = \int f_1 dm + \int f_2 dm$$

saadaan yhdistämällä yhtälöt.  $\square$

Lauseen 3.2.7 ja monotonisen konvergenssin lauseen seurauksena saadaan helposti ns. *Beppo Levin lause*:

**Seuraus 3.2.8.** Olkoon  $E \subset \mathbf{R}^n$  mitallinen ja olkoot  $f_i : E \rightarrow [0, +\infty]$  mitallisia kaikilla  $i \in \mathbf{N}$ . Tällöin

$$\int_E \sum_{i=1}^{\infty} f_i dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E f_i dm,$$

ts. positiivitermisen sarjan voi integroida termeittäin.

*Todistus.* Harjoitustehtävä.  $\square$

Seuraava konvergenssitulos on myös erittäin keskeinen:

**Lause 3.2.9** (Fatoun lemma). Olkoon  $E \subset \mathbf{R}^n$  ja  $f_i : E \rightarrow [0, \infty]$  mitallisia,  $i \in \mathbf{N}$ . Tällöin

$$\int_E \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i dm \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i dm.$$

*Todistus.* Olkoon  $g_k : E \rightarrow [0, +\infty]$  funktio

$$g_k(x) := \inf_{i \geq k} f_i(x), \quad x \in E.$$

Tällöin  $(g_k)$  on kasvava jono mitallisia funktioita (Lause 2.6.10). Lisäksi  $g_k \leq f_k$  joukossa  $E$  ja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i.$$

Monotonisen konvergenssin lauseen mukaan

$$\begin{aligned} \int_E \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i dm &= \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} g_k dm = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k dm \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k dm \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k dm. \end{aligned}$$

Tässä kolmas yhtälö perustuu Lauseeseen 2.6.9.  $\square$

**Huomautus.** Toisaalta monotonisen konvergenssin lause seuraa helposti Fatoun lem-  
masta. Jos nimittäin  $(f_i)$  on monotonisen konvergenssin lauseessa esiintyvä kasvava ei-  
negatiivinen funktiojono, niin kasvavuuden perusteella  $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i$  ja  $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i dm$  ovat  
olemassa. Lauseen 2.6.9 ja Fatoun lemmän mukaan

$$\int_E \lim_{i \rightarrow \infty} f_i dm = \int_E \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i dm \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i dm.$$

Näin monotonisen konvergenssin lauseen ei-triviaali epäyhtälö on saatu perusteltua Fa-  
toun lemmän avulla.

**Esimerkki.** Olkoon  $f_i = \chi_{[i, 2i]}$ . Tällöin (Lause 2.6.9)

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = 0$$

kaikilla  $x \in \mathbf{R}$  ja siten

$$\int \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i dm = 0.$$

Toisaalta

$$\int f_i dm = m([i, 2i]) = i,$$

joten (Lause 2.6.9)

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \int f_i dm = \liminf_{i \rightarrow \infty} i = \infty.$$

Siis Fatoun lemma pätee muodossa  $0 \leq \infty$ .

**Lause 3.2.10.** Olkoot joukot  $E_i \subset \mathbf{R}^n$  mitallisia ja pareittain pistevieraita sekä olkoon  
 $f : \cup_{i=1}^{\infty} E_i \rightarrow [0, +\infty]$  mitallinen. Tällöin

$$\int_{\cup_{i=1}^{\infty} E_i} f dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f dm.$$

*Todistus.* Olkoon  $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ . Epäyhtälö

$$\int_E f dm \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f dm$$

jätetään harjoitustehtäväksi. Siis lauseen väite pätee jos  $\int_E f dm = +\infty$ .

Todistetaan käänteinen epäyhtälö olettaen, että  $\int_E f dm < \infty$ . Supremumin määritelmän  
seurauksena kaikilla  $\varepsilon > 0$  ja  $k \in \mathbf{N}$  on olemassa  $\phi_i \leq f \chi_{E_i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , siten, että

$$\int_{E_i} f dm - \frac{\varepsilon}{k} \leq \int_{E_i} \phi_i dm.$$

Olkoon  $\phi'_k := \max\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ , jolloin  $\phi'_k$  on yksinkertainen funktio. Koska  $\phi_i \leq \phi'_k$   
kaikilla  $i = 1, \dots, k$ , niin

$$\int_{E_i} f dm - \frac{\varepsilon}{k} \leq \int_{E_i} \phi'_k dm \quad (*)$$

kaikilla  $i = 1, \dots, k$ . Koska  $\phi'_k \leq f \chi_{\cup_{i=1}^k E_i}$ , niin Lauseen 3.2.3 (2) ja Lemman 3.1.7 nojalla

$$\int_E f \, dm \geq \int_{\cup_{i=1}^k E_i} f \, dm \geq \int_{\cup_{i=1}^k E_i} \phi'_k \, dm = \sum_{i=1}^k \int_{E_i} \phi'_k \, dm.$$

Yhdistämällä saatu epäyhtälö (\*) :n kanssa saadaan

$$\int_E f \, dm \geq \sum_{i=1}^k \int_{E_i} \phi'_k \, dm \geq \sum_{i=1}^k \int_{E_i} f \, dm - \varepsilon.$$

Tämä pätee kaikille  $k \in \mathbf{N}$ , joten ottamalla raja-arvot puolittain ( $k \rightarrow \infty$ ) saadaan

$$\int_E f \, dm \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f \, dm - \varepsilon.$$

Väite

$$\int_E f \, dm \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f \, dm$$

seuraa antamalla  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .  $\square$

**Seuraus 3.2.11.** Olkoon  $E \subset \mathbf{R}^n$  ja olkoot  $f, g : E \rightarrow [0, +\infty]$  mitallisia. Jos  $f = g$  m.k. joukossa  $E$ , niin

$$\int_E f \, dm = \int_E g \, dm.$$

*Todistus.* Harjoitustehtävä.  $\square$

**Seuraus 3.2.12.** Olkoon  $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset \mathbf{R}^n$  kasvava jono mitallisia joukkoja sekä olkoon  $f : \cup_{i=1}^{\infty} E_i \rightarrow [0, +\infty]$  mitallinen. Tällöin

$$\int_{\cup_{i \in \mathbf{N}} E_i} f \, dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{E_i} f \, dm.$$

*Todistus.* Väite seuraa Lauseesta 3.2.10 aivan kuten Lemma 3.2.5 seuraa Lemmasta 3.1.7, ks. harjoitustehtävä.  $\square$

### 3.3 Lebesguen integraali vaihtuvamerkkiselle funktiolle

Lopuksi yleistämme integraalin määritelmän kaikille mitallisille funktioille.

Olkoon  $E \subset \mathbf{R}^n$  ja olkoon  $f : E \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ . Merkitään

$$f^+ = \max(f, 0) \quad \text{ja} \quad f^- = -\min(f, 0).$$

Tällöin  $f^+$  ja  $f^-$  ovat ei-negatiivisia. Lisäksi pätee

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \quad \text{ja} \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f),$$

eli toisin sanoen

$$f = f^+ - f^- \quad \text{ja} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

**Esimerkki.** Perustellaan malliksi yhtälö

$$f^- = \frac{1}{2}(|f| - f). \quad (*)$$

1) Jos  $f(x) \geq 0$ , niin  $|f(x)| = f(x)$  ja

$$f^-(x) = -\min(f(x), 0) = -0 = 0, \quad \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) - f(x)) = 0.$$

2)  $f(x) < 0$ , niin  $|f(x)| = -f(x)$  ja

$$f^-(x) = -\min(f(x), 0) = -f(x), \quad \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)) = \frac{1}{2}(-f(x) - f(x)) = -f(x).$$

Yhtälö

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \quad (**)$$

perustellaan samalla tavoin. Yhtälöt

$$f = f^+ - f^- \quad \text{ja} \quad |f| = f^+ + f^-$$

saadaan yhtälöistä (\*) ja (\*\*) vähentämällä puolittain ja laskemalla puolittain yhteen.

**Määritelmä 3.3.1.** Jos  $E \subset \mathbf{R}^n$  ja  $f : E \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  on mitallinen, niin funktio  $f$  on *integroituva* joukossa  $E$  mikäli  $\int_E f^+ dm < \infty$  ja  $\int_E f^- dm < \infty$ . Tällöin funktion  $f$  *integraali yli joukon*  $E$  on luku

$$\int_E f dm := \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm.$$

**Huomautus.** (a) Määritelmästä on selvää, että jos  $f$  on integroituva joukossa  $E$ , niin  $f$  on integroituva jokaisessa  $E$ :n mitallisessa osajoukossa (Lause 3.2.3(2)).

(b) Jos  $f$  on integroituva joukossa  $E$ , niin  $|f(x)| < \infty$  m.k. joukossa  $E$ . Nimittäin ei-negatiivisille funktioille  $f^+$  ja  $f^-$  ko. väite pätee harjoitustehtävän nojalla. Toisaalta

$$\begin{aligned} \{x \in E : |f(x)| = \infty\} &= \{x \in E : f^+(x) + f^-(x) = \infty\} \\ &= \{x \in E : f^+(x) = \infty\} \cup \{x \in E : f^-(x) = \infty\}, \end{aligned}$$

joten väite seuraa mitan subadditiivisuudesta.

**Lause 3.3.2.** Olkoon  $E \subset \mathbf{R}^n$  ja  $f : E \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  funktio. Tällöin  $f$  on integroituva joukossa  $E$  jos ja vain jos  $f$  on mitallinen joukossa  $E$  ja  $|f|$  on integroituva joukossa  $E$ . Edelleen

$$\left| \int_E f dm \right| \leq \int_E |f| dm,$$

jos  $f$  on integroituva joukossa  $E$ .



*Todistus.* Jos  $f$  on integroituva joukossa  $E$ , se on määritelmän mukaan mitallinen. Koska  $|f| = f^+ + f^-$ , niin Lauseen 3.2.7 nojalla

$$\int_E |f| dm = \int_E f^+ dm + \int_E f^- dm < \infty.$$

Siis  $|f|$  on integroituva joukossa  $E$ .

Käänteinen väite ja epäyhtälö harjoitustehtäviä.  $\square$

**Lemma 3.3.3** (Majoranttiperiaate). Olkoon  $E \subset \mathbf{R}^n$  ja  $f : E \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  mitallinen. Jos  $|f| \leq g$  joukossa  $E$  ja  $g$  on integroituva joukossa  $E$ , niin  $f$  on integroituva joukossa  $E$ .

*Todistus.* Lauseen 3.2.3 (1) mukaan

$$\int_E |f| dm \leq \int_E g dm < \infty.$$

Siis  $|f|$  on integroituva ja Lauseen 3.3.2 mukaan  $f$  on integroituva.  $\square$

**Huomautus 3.3.4.** Lemmassa 3.3.3 riittää olettaa, että  $|f| \leq g$  m.k. joukossa  $E$ . Jos nimittäin

$$A = \{x \in E : |f(x)| > g(x)\}$$

ja  $m(A) = 0$ , niin

$$\int_E |f| dm = \int_{E \setminus A} |f| dm + \int_A |f| dm = \int_{E \setminus A} |f| dm,$$

sillä  $\int_A |f| dm = 0$  (Lause 3.2.3 (3)). Lemmaa 3.3.3 voi nyt soveltaa joukossa  $E \setminus A$ .

**Huomautus 3.3.5.** (a) Jos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  on rajoitettu Riemann-integroituva funktio rajoitetulla välillä  $[a, b]$ , niin  $f$  on Lebesgue-integroituva joukossa  $[a, b]$  ja

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f dm.$$

Tässä vasemmalla puolella on Riemann-integraali ja oikealla puolella on Lebesgue-integraali.

Jos nimittäin  $f$  on rajoitettu Riemann-integroituva funktio välillä  $[a, b]$ , niin tunnetusti  $f^+$  ja  $f^-$  ovat Riemann-integroituvia välillä  $[a, b]$ . Huomautuksen 3.2.6 nojalla  $f^+$  ja  $f^-$  ovat Lebesgue-integroituvia ja niiden Riemannin integraalien arvot yhtyvät Lebesguen integraalien arvoon. Näin ollen

$$\int_{[a,b]} f dm = \int_{[a,b]} f^+ dm - \int_{[a,b]} f^- dm = \int_a^b f^+(x) dx - \int_a^b f^-(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Kirjallisuudessa merkintää  $\int_a^b f(x) dx$  käytetään yleisesti myös Lebesguen integraalille!

(b) Riemann-integroituva rajoitettu funktio  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  on siis aina Lebesgue-integroituva. Tämä kuitenkin pätee epäoleelliselle Riemannin integraalille vain ei-negatiivisessa tapauksessa, so. tapauksessa, jossa funktio ei vaihda merkkiään.

Olkoon esimerkiksi  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = x^{-1} \sin x,$$

missä  $E = [1, \infty)$ . Osoitetaan, että  $f$  ei ole Lebesgue-integroituva joukossa  $E$ . Lauseiden 3.2.3 ja 3.2.10 sekä kohdan (a) nojalla

$$\begin{aligned} \int_E |f| dm &= \int_{[1, \pi[} |f| dm + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[k\pi, (k+1)\pi[} |f| dm \\ &= \int_1^{\pi} |f(x)| dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|} dx \\ &\geq \int_1^{\pi} |f(x)| dx + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}, \end{aligned}$$

sillä sinin jaksollisuuden perusteella

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|} dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Koska  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty$ , funktio  $|f|$  ei ole integroituva joukossa  $E$ .

Sen toteaminen, että epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

suppenee, sivuutetaan tässä.

**Esimerkki.** Olkoon  $E = [1, \infty)$  ja  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  funktio  $f(x) = x^{-2}$ . Koska  $f$  on jatkuva, se on mitallinen. Toisaalta jatkuva funktio on Riemann-integroituva, joten (Huomautus 3.2.6)

$$\begin{aligned} \int_E f dm &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{[1, i]} f dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_1^i f(x) dx \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_1^i x^{-2} dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{i} + 1\right) = 1. \end{aligned}$$

Ensimmäisen yhtälön perustelee Seuraus 3.2.12 tai monotonisen konvergenssin lause, kun

$$f_i(x) = f(x)\chi_{[1, i]}, \quad i \in \mathbf{N}.$$

Olkoon edelleen  $E = [1, \infty)$  ja  $g : E \rightarrow \mathbf{R}$  funktio  $g(x) = x^{-2} \sin x$ . Myös  $g$  on mitallinen jatkuvana. Koska

$$|g(x)| \leq f(x), \quad x \in E,$$

$g$  on integroituva joukossa  $E$  majoranttiperiaatteen nojalla.

Luvussa 3.2 esitettyjen integraalin perusominaisuuksien laajentaminen Määritelmän 3.3.1 tilanteeseen on rutiininomaista. Ensimmäisenä esimerkkinä tästä tarkastellaan additiivisuutta integroimisjoukon suhteen.

**Lause 3.3.6.** Olkoot  $E_i \subset \mathbf{R}^n$  mitallisia ja pareittain pistevieraita, kun  $i \in \mathbf{N}$ . Jos  $f$  on integroitava joukossa  $E := \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ , niin  $f$  on integroitava jokaisessa joukossa  $E_i$  ja

$$\int_E f \, dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f \, dm. \quad (*)$$

Kääntäen, jos  $f$  on integroitava joukossa  $E_i$  kaikilla  $i \in \mathbf{N}$  ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} |f| \, dm < \infty,$$

niin  $f$  on integroitava joukossa  $E$  ja kaava (\*) pätee.

*Todistus.* Jos  $f$  on integroitava joukossa  $E$ , niin  $f^+$  ja  $f^-$  ovat integroituvia joukossa  $E$  (Määritelmä 3.3.1). Lauseen 3.2.10 mukaan

$$\int_E f^+ \, dm = \sum_{i \in \mathbf{N}} \int_{E_i} f^+ \, dm \quad \text{ja} \quad \int_E f^- \, dm = \sum_{i \in \mathbf{N}} \int_{E_i} f^- \, dm.$$

Toisaalta Lauseen 3.2.3 (2) nojalla

$$\int_{E_i} f^+ \, dm \leq \int_E f^+ \, dm < \infty$$

kaikilla  $i \in \mathbf{N}$  ja vastaavasti  $\int_{E_i} f^- \, dm < \infty$  kaikilla  $i \in \mathbf{N}$ . Siis  $f$  on integroitava jokaisessa joukossa  $E_i$  ja

$$\begin{aligned} \int_E f \, dm &= \int_E f^+ \, dm - \int_E f^- \, dm = \sum_{i \in \mathbf{N}} \int_{E_i} f^+ \, dm - \sum_{i \in \mathbf{N}} \int_{E_i} f^- \, dm \\ &= \sum_{i \in \mathbf{N}} \left( \int_{E_i} f^+ \, dm - \int_{E_i} f^- \, dm \right) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \int_{E_i} f \, dm. \end{aligned}$$

Toiseksi viimeinen yhtälö pätee sillä sarjojen summat ovat äärellisiä.

Kääntäen, olkoon  $f$  integroitava joukossa  $E_i$  kaikilla  $i \in \mathbf{N}$ . Koska  $f$  on mitallinen joukossa  $E_i$  kaikilla  $i \in \mathbf{N}$ , niin  $f$  on mitallinen yhdisteessä  $E$ . Nimittäin kaikilla  $\alpha \in \mathbf{R}$  pätee

$$\{x \in E : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \{x \in E_i : f(x) > \alpha\}.$$

Lauseen 3.2.10 mukaan

$$\int_E |f| \, dm = \sum_{i \in \mathbf{N}} \int_{E_i} |f| \, dm.$$

Oletuksen mukaan oikeanpuoleinen summa on äärellinen, joten  $|f|$  on integroitava joukossa  $E$ . Siis myös  $f$  on integroitava joukossa  $E$  ja kaava (\*) pätee.  $\square$

Seuraava lause sisältää muut integraalin perusominaisuudet yleisessä tapauksessa:

**Lause 3.3.7.** Olkoon  $E \subset \mathbf{R}^n$  ja olkoot  $f, g : E \rightarrow \mathbf{R}$  integroituvia joukossa  $E$ . Tällöin

(1) funktio  $f + g$  on integroitava joukossa  $E$  ja

$$\int_E f + g \, dm = \int_E f \, dm + \int_E g \, dm;$$

(2) funktio  $\lambda f$  on integroitava joukossa  $E$  kaikilla  $\lambda \in \mathbf{R}$  ja

$$\int_E \lambda f \, dm = \lambda \int_E f \, dm;$$

(3)  $\int_E f \, dm \leq \int_E g \, dm$  aina kun  $f \leq g$  joukossa  $E$ ;

(4)  $\int_E f \, dm = 0$  aina kun  $m(E) = 0$ ;

(5)  $\int_E f \, dm = \int_E g \, dm$  aina kun  $f = g$  m.k. joukossa  $E$ .

*Todistus.* (1) Koska  $f$  ja  $g$  ovat integroituvia joukossa  $E$ , niin  $|f| < \infty$  m.k. joukossa  $E$  ja  $|g| < \infty$  m.k. joukossa. Erityisesti summa  $h := f + g$  on määritelty m.k. joukossa  $E$  (ainoastaan nollamittaisessa joukossa summa voi olla muotoa  $\infty - \infty$ ). Laajennetaan  $h$  nollana joukkoon, jossa se ei a priori ole määritelty. Tällöin

$$|h| \leq |f| + |g| \quad \text{joukossa } E,$$

joten (Lause 3.2.3 (1) ja Lause 3.2.7)

$$\int_E |h| \, dm \leq \int_E |f| + |g| \, dm = \int_E |f| \, dm + \int_E |g| \, dm < \infty.$$

Siis  $h$  on integroitava Lemman 3.3.3 nojalla. Toisaalta m.k. joukossa  $E$  (so. joukossa, jossa  $f + g$  on määritelty) pätee

$$h = h^+ - h^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Näin ollen m.k. joukossa  $E$

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

Integroimalla puolittain ja käyttämällä Lausetta 3.2.7 saadaan

$$\int_E h^+ \, dm + \int_E f^- \, dm + \int_E g^- \, dm = \int_E h^- \, dm + \int_E f^+ \, dm + \int_E g^+ \, dm.$$

Koska kaikki integraalit ovat äärellisiä, niin

$$\int_E h^+ \, dm - \int_E h^- \, dm = \int_E f^+ \, dm - \int_E f^- \, dm + \int_E g^+ \, dm - \int_E g^- \, dm.$$

Määritelmän 3.3.1 mukaan

$$\int_E h \, dm = \int_E f \, dm + \int_E g \, dm.$$

(2) i) Olkoon  $\lambda \geq 0$ . Tällöin  $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$  ja  $(\lambda f)^- = \lambda f^-$ , joten

$$\begin{aligned}\int_E \lambda f \, dm &= \int_E (\lambda f)^+ \, dm - \int_E (\lambda f)^- \, dm = \int_E \lambda f^+ \, dm - \int_E \lambda f^- \, dm \\ &= \lambda \left( \int_E f^+ \, dm - \int_E f^- \, dm \right) = \lambda \int_E f \, dm.\end{aligned}$$

ii) Olkoon  $\lambda < 0$ . Tällöin  $(\lambda f)^+ = (-\lambda) f^-$  ja  $(\lambda f)^- = (-\lambda) f^+$ , joten

$$\begin{aligned}\int_E \lambda f \, dm &= \int_E (\lambda f)^+ \, dm - \int_E (\lambda f)^- \, dm = \int_E (-\lambda f^-) \, dm - \int_E (-\lambda f^+) \, dm \\ &= \lambda \left( \int_E f^+ \, dm - \int_E f^- \, dm \right) = \lambda \int_E f \, dm.\end{aligned}$$

(3) Kohtien (1) ja (2) nojalla  $g - f$  on integroitava ja

$$\int_E g \, dm = \int_E f + (g - f) \, dm = \int_E f + \int_E g - f \, dm \geq \int_E f,$$

sillä  $g - f \geq 0$  joukossa  $E$ .

(4) Koska  $m(E) = 0$ , niin Lauseen 3.2.3 (3) nojalla  $\int_E f^+ \, dm = 0$  ja  $\int_E f^- \, dm = 0$ . Siispä

$$\int_E f \, dm = \int_E f^+ \, dm - \int_E f^- \, dm = 0.$$

(5) Jos  $f = g$  m.k. joukossa  $E$ , niin  $f^+ = g^+$  m.k. joukossa  $E$  ja  $f^- = g^-$  m.k. joukossa  $E$ . Harjoitustehtävän nojalla

$$\int_E f^+ \, dm = \int_E g^+ \, dm \quad \text{ja} \quad \int_E f^- \, dm = \int_E g^- \, dm.$$

Väite seuraa Määritelmästä 3.3.1.  $\square$

Yleisessä tapauksessa konvergenssilauseiden kirjo laajenee. Seuraava *dominoidun konvergenssin lause* on keskeinen.

**Lause 3.3.8.** [Dominoidun konvergenssin lause] Olkoon  $E \subset \mathbf{R}^n$  ja olkoot  $f_i : E \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  mitallisia funktioita siten, että

$$f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x)$$

m.k.  $x \in E$ . Jos on olemassa joukossa  $E$  integroitava funktio  $g$  siten, että

$$\sup_{i \in \mathbf{N}} |f_i(x)| \leq g(x)$$

m.k.  $x \in E$ , niin  $f$  on integroitava joukossa  $E$  ja

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_E |f - f_i| \, dm = 0.$$

Erityisesti pätee

$$\int_E f \, dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i \, dm.$$

*Todistus.* Määrittelemällä  $f_i, f$  ja  $g$  esimerkiksi nollana sopivasti valitussa nollamittaisessa joukossa voidaan olettaa, että

$$f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x)$$

kaikilla  $x \in E$  ja

$$\sup_{i \in \mathbf{N}} |f_i(x)| \leq g(x)$$

kaikilla  $x \in E$ . Koska epäyhtälö säilyy raja-arvossa, on

$$|f(x)| \leq g(x)$$

kaikilla  $x \in E$ . Näin ollen

$$|f(x) - f_i(x)| \leq |f(x)| + |f_i(x)| \leq 2g(x)$$

kaikilla  $x \in E$ .

Koska  $g$  on integroituva joukossa  $E$ , majoranttiperiaatteen nojalla  $|f|, |f - f_i|$  ja  $f$  ovat integroituvia joukossa  $E$ . Soveltamalla Fatoun lemmaa ei-negatiiviseen funktiojonoon  $2g - |f - f_i|$ , jonka rajafunktio on  $2g$ , saadaan

$$\begin{aligned} \int_E 2g \, dm &= \int_E \liminf_{i \rightarrow \infty} (2g - |f - f_i|) \, dm \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_E (2g - |f - f_i|) \, dm \\ &= \liminf_{i \rightarrow \infty} \left( \int_E 2g \, dm - \int_E |f - f_i| \, dm \right) \\ &= \int_E 2g \, dm - \limsup_{i \rightarrow \infty} \int_E |f - f_i| \, dm. \end{aligned} \tag{3}$$

Tässä toiseksi viimeinen yhtälö pätee Lauseen 3.3.7 nojalla ja viimeinen yhtälö perustuu ominaisuuteen

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} (a - a_i) = a - \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i,$$

mikä pätee kaikille  $a, a_i \in \mathbf{R}$  (harjoitustehtävä).

Epäyhtälössä (3)  $\int_E 2g \, dm$  voidaan supistaa, joten Lemman 2.6.8 nojalla

$$0 \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_E |f - f_i| \, dm \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \int_E |f - f_i| \, dm \leq 0.$$

Lauseen 2.6.9 nojalla

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_E |f - f_i| \, dm = 0.$$

Väite

$$\int_E f \, dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i \, dm$$

seuraa epäyhtälöstä (ks. lauseet 3.3.2 ja 3.3.7)

$$\left| \int_E f \, dm - \int_E f_i \, dm \right| = \left| \int_E (f - f_i) \, dm \right| \leq \int_E |f - f_i| \, dm$$

ottamalla raja-arvot  $i \rightarrow \infty$  puolittain.  $\square$

**Esimerkki.** (a) Määrätään

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 ix^{-\frac{3}{2}} \sin \frac{x}{i} dx.$$

Tässä (ja muissa esimerkeissä) integraali tulkitaan Lebesguen mielessä ellei erikseen muuta mainita. Olkoon  $E = ]0, 1[$  ja merkitään

$$f_i(x) = ix^{-\frac{3}{2}} \sin \frac{x}{i} = x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{x}{i}}{\frac{x}{i}}, \quad i \in \mathbf{N}.$$

Tällöin

$$f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = x^{-\frac{1}{2}}.$$

Edelleen

$$\sup_{x \in E} \left| \frac{\sin \frac{x}{i}}{\frac{x}{i}} \right| \leq \sup_{x \in E} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \max_{x \in [0,1]} |g(x)| =: M,$$

sillä funktio  $g(x) = \frac{\sin x}{x}$  on jatkuva myös origossa jos asetetaan  $g(0) = 1$ . Siis

$$|f_i(x)| \leq M f(x)$$

kaikilla  $x \in E$  ja  $i \in \mathbf{N}$ .

Toisaalta monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{k}}^1 f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} (2 - 2\sqrt{\frac{1}{k}}) = 2.$$

Toiseksi viimeisessä yhtälössä integraali on laskettu analyysin peruslauseen avulla Huomautukseen 3.3.5 nojaten.

Dominoidun konvergenssin lauseen mukaan

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 f_i(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 2.$$

(b) Olkoon  $f$  integroitava joukossa  $[-1, 1]$  ja olkoon

$$g(x) = \int_{-1}^1 f(t) \sin xt dt, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Määrätään  $g'(x)$ . Olkoon  $x \in \mathbf{R}$  ja olkoon  $(h_i)$  jono positiivisia reaalilukuja siten, että  $\lim_{i \rightarrow \infty} h_i = 0$ . Lauseen 3.3.7 nojalla

$$\begin{aligned} \frac{g(x+h_i) - g(x)}{h_i} &= \frac{1}{h_i} \left( \int_{-1}^1 f(t) \sin(x+h_i)t dt - \int_{-1}^1 f(t) \sin xt dt \right) \\ &= \int_{-1}^1 \frac{f(t) \sin(x+h_i)t - f(t) \sin xt}{h_i} dt \\ &= \int_{-1}^1 f(t) \left( \frac{\sin(x+h_i)t - \sin xt}{h_i} \right) dt. \end{aligned}$$

Väliarvolauseen nojalla

$$\frac{\sin(x + h_i)t - \sin xt}{h_i} = \frac{\cos \xi \cdot h_i t}{h_i} = t \cos \xi.$$

Näin ollen

$$\left| \frac{\sin(x + h_i)t - \sin xt}{h_i} \right| \leq 1$$

kaikilla  $i$  ja  $t \in [-1, 1]$ , joten funktiolla  $|f(t) \left( \frac{\sin(x+h_i)t - \sin xt}{h_i} \right)|$  on integroitava majorantti  $|f(t)|$ . Koska

$$\lim_{i \rightarrow \infty} tf(t) \left( \frac{\sin(x + h_i)t - \sin xt}{th_i} \right) = tf(t) \cos xt$$

kaikilla  $t \in [-1, 1]$ ,  $t \neq 0$ , niin dominoidun konvergenssin lauseen mukaan

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{g(x + h_i) - g(x)}{h_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 tf(t) \left( \frac{\sin(x + h_i)t - \sin xt}{th_i} \right) dt = \int_{-1}^1 tf(t) \cos xt dt.$$

Tämä pätee kaikille jonoille  $h_i \rightarrow 0^+$ , joten oikeanpuoleiselle derivaatalle pätee

$$g'_+(x) = \int_{-1}^1 tf(t) \cos xt dt$$

kaikilla  $x \in \mathbf{R}$ . Nimittäin jos vastoin väitettä luku  $a := \int_{-1}^1 f(t) \cos xt dt$  ei ole  $g$ :n oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä  $x$ , niin on olemassa  $\varepsilon > 0$  ja jono  $h_i \rightarrow 0^+$  siten, että

$$\frac{g(x + h_i) - g(x)}{h_i} \notin ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

Tämä on ristiriidassa edellä todetun kanssa.

Vasemmanpuoleinen derivaatta käsitellään samalla tavalla.

Dominoidun konvergenssin lauseen erikoistapauksena todistetaan *tasaisesti rajoitetun konvergenssin lause*:

**Lause 3.3.9.** [Tasaisesti rajoitetun konvergenssin lause] Olkoon  $m(E) < \infty$  ja olkoon  $f_i : E \rightarrow \mathbf{R}$  jono joukossa  $E$  integroituvia funktioita siten, että

$$f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x)$$

m.k.  $x \in E$ . Jos on olemassa reaaliluku  $M > 0$  siten, että

$$\sup_{i \in \mathbf{N}} |f_i(x)| \leq M$$

kaikilla  $x \in E$ , niin

$$\int_E f dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i dm.$$



*Todistus.* Olkoon  $g = M$  joukossa  $E$ . Tällöin oletuksen  $m(E) < \infty$  nojalla

$$\int_E g \, dm = Mm(E) < \infty.$$

Siis  $g$  on integroitava joukossa  $E$  ja väite seuraa dominoidun konvergenssin lauseesta.  $\square$

Tarkastellaan lopuksi paria esimerkkiä Lebesguen integrointiteorian yhteydestä Riemannin-integraaleihin.

**Seuraus 3.3.10.** Olkoon  $m(E) < \infty$  ja olkoon  $(f_i)$  jono joukossa  $E \subset \mathbf{R}^n$  integroitavia funktioita siten, että  $f_i \rightarrow f$  tasaisesti joukossa  $E$ . Tällöin  $f$  on integroitava ja

$$\int_E f \, dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i \, dm.$$

*Todistus.* Harjoitustehtävä.  $\square$

**Huomautus.** Esimerkiksi Taylorin sarjojen tarkastelu perustuu Seurausta 3.3.10 vastaavaan tasaisen konvergenssin tulokseen kun  $E = [a, b]$  ja  $(f_i)$  on jono Riemannin mielessä integroitavia funktioita välillä  $[a, b]$ . Riemannin integrointiteoriassa joudutaan oletamaan myös rajafunktion Riemann-integroitavuus.

Tasaisesti rajoitetun konvergenssin avulla saadaan helposti seuraava Riemannin integraalia koskeva tulos.

**Seuraus 3.3.11.** Olkoon  $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  jono välillä  $[a, b]$  Riemann-integroitavia funktioita siten, että

- (i)  $|f_i(x)| \leq M$  kaikilla  $i \in \mathbf{N}$  ja  $x \in [a, b]$  jollekin  $M \in \mathbf{R}_+$ ;
- (ii) Kaikilla  $x \in [a, b]$  on olemassa  $f(x) := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x)$ ;
- (iii) Raja-funktio  $f$  on Riemann-integroitava välillä  $[a, b]$ .

Tällöin

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b f_i(x) \, dx.$$

*Todistus.* Koska funktiot  $f$  ja  $f_i$  ovat rajoitettuja ja Riemann-integroitavia, niin Huomautuksen 3.3.5 nojalla ne ovat Lebesgue-integroitavia välillä  $[a, b]$  ja

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, dm$$

sekä

$$\int_a^b f_i(x) \, dx = \int_{[a,b]} f_i \, dm$$

kaikilla  $i \in \mathbf{N}$ . Lauseen 3.3.9 mukaan

$$\int_{[a,b]} f \, dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_i \, dm,$$

joten väite seuraa.  $\square$

**Huomautus.** Seurauksen 3.3.11 todistaminen ilman Lebesguen integrointiteoriaa on hankalaa.

**Lisätieto: Yleisen mittateorian idea.** Olkoon  $X \neq \emptyset$  mielivaltainen joukko ja  $\Gamma$  joukon  $X$   $\sigma$ -algebra. Kokoelman  $\Gamma$  joukkoja sanotaan *mitallisiksi joukoiksi*.

Funktio  $\mu : \Gamma \rightarrow [0, +\infty]$  on *mitta joukossa  $X$* , jos

(i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;

(ii)  $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$  aina kun joukot  $A_i \in \Gamma$  ovat pareittain pistevieraita.

Jos lisäksi  $\mu(X) = 1$ , mittaa  $\mu$  sanotaan *todennäköisyysmitaksi*. Kolmikko  $(X, \Gamma, \mu)$  on *mitta-avaruus*, jos  $\Gamma$  on  $\sigma$ -algebra joukossa  $X$  ja  $\mu$  on mitta joukossa  $X$ .

**Huomautus.** (a) Ehdosta (ii) seuraa heti, että  $\mu$  on monotoninen, ts.  $\mu(A) \leq \mu(B)$  jos  $A, B \in \Gamma$  ja  $A \subset B$ . Nimittäin tällöin  $A$  ja  $B \setminus A \in \Gamma$  ovat erillisiä, joten

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

(b) Useimmiten (esim.  $\mathbf{R}^n$ :n osajoukoille) lähtökohtana on  $\sigma$ -algebra  $\Gamma$ , joka sisältää Borelin  $\sigma$ -algebran.

Mitallisten joukkojen avulla mitalliset funktiot  $f : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  ja integraali määritellään aivan kuten edellä.

*Kaikki kurssilla esitetyt mitallisten funktioiden ja integraalin ominaisuudet (lukuun ottamatta yhteyksiä Riemannin integraaliin) voidaan todistaa olennaisesti samalla tavalla yleisen mitta-avaruuden tilanteessa!*