Mitta- ja integroimisteoria a

Luentomoniste (2008): Visa Latvala

Kevät 2019

Sisältö

Lukijalle

Lebesguen integrointiteoriaa voi pitää modernin analyysin tutkimuksen kulmakivenä. Teoriassa integroituvuuden käsite on laajempi kuin vanhemmassa Riemannin integraalin tapauksessa. Tämän seurauksena voidaan mm. täsmälleen karakterisoida niiden funktioiden luokka, joille analyysin peruslause on voimassa. Edelleen erilaiset konvergenssilauseet voidaan esittää yleisessä käyttökelpoisessa muodossa.

Kurssin tarkoituksena on esittää huolella Lebesguen integrointiteorian perusteet avaruudessa $\mathbf{R}^n$. Varsinainen kurssi alkaa luvusta 2; lukuun 1 on koottu keskeiset taustatiedot, jotka voidaan pitää tunnettuna aiemmilta kursseilta. Tämän vuoksi luvun 1 väitteitä on perusteltu vain esimerkin omaisesti.

1 Kertausta: merkintöjä, käsitteitä ja aputuloksia

1.1 Joukkokokoelmat

Olkoon X mielivaltainen joukko. Tällöin

$$\mathcal{P}(X) = \{ A : A \subset X \}$$

on X:n *potenssijoukko*. Joukon X *joukkoperhe (joukkokokoelma)* $\mathcal{F}$ on mikä tahansa $\mathcal{P}(X)$:n osajoukko, ts. $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Perheen $\mathcal{F}$ *yhdiste* on

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{ x \in X : x \in A \text{ jollekin } A \in \mathcal{F} \}$$

ja *leikkaus* on

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{ x \in X : x \in A \text{ kaikilla } A \in \mathcal{F} \}.$$

Olkoon edelleen $\mathcal{A}$ *indeksijoukko* ja oletetaan, että jokaista $\alpha \in \mathcal{A}$ vastaa yksikäsitteinen X:n osajoukko $V_\alpha \subset X$. Tällöin kokoelma

$$\mathcal{F} = \{ V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A} \}$$

on X:n *indeksöity joukkoperhe.* Indeksimerkintää käyttäen yhdiste ja leikkaus ovat

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = \{ x \in X : x \in V_\alpha \text{ jollekin } \alpha \in \mathcal{A} \}$$

ja

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = \{ x \in X : x \in V_\alpha \text{ kaikilla } \alpha \in \mathcal{A} \}.$$

Jos indeksijoukko on tiedossa, se jätetään usein pois. Siis esimerkiksi merkitään $\cup_\alpha V_\alpha$.

Lemma 1.1.1. Olkoon $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ joukon X joukkoperhe. Tällöin ovat voimassa *de Morganin lait*

$$X \setminus \bigcup_\alpha V_\alpha = \bigcap_\alpha (X \setminus V_\alpha)$$

ja

$$X \setminus \bigcap_\alpha V_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus V_\alpha).$$

Edelleen, jos $E \subset X$, niin yhdisteelle ja leikkaukselle ovat voimassa *distributiivisuuslait*

$$E \cap (\bigcup_\alpha V_\alpha) = \bigcup_\alpha (E \cap V_\alpha)$$

ja

$$E \cup (\bigcap_\alpha V_\alpha) = \bigcap_\alpha (E \cup V_\alpha).$$

Esimerkki. Tarkastellaan malliksi ensimmäistä de Morganin lakia

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \setminus V_\alpha).$$

Jos $x \in X \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$, niin $x \notin \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$. Yhdisteen määritelmän mukaan kaikilla $\alpha \in \mathcal{A}$ pätee $x \notin V_\alpha$, joten kaikilla $\alpha \in \mathcal{A}$ pätee $x \in X \setminus V_\alpha$. Leikkauksen määritelmän mukaan $x \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \setminus V_\alpha)$.

Käänteinen implikaatio nähdään edellisestä päättelemällä toiseen suuntaan.

1.2 Supremum ja infimum

Määritelmä 1.2.1. Olkoon $A \subset \mathbf{R}$. Luku $a \in \mathbf{R}$ on joukon A *pienin yläraja*, merkitään $a = \sup A$, jos se toteuttaa ehdot (1) ja (2):

(1) a on joukon A yläraja eli $x \le a$ kaikilla $x \in A$;

(2) Jos $b \in \mathbf{R}$ ja $x \le b$ kaikilla $x \in A$, niin $a \le b$.

Huomautus. Ehto (1) sanoo, että A on ylhäältä rajoitettu. Ehto (2) puolestaan sanoo, että jokainen A:n yläraja on vähintään a. Sovitaan siitä, että $\sup A = +\infty$ jos $A \subset \mathbf{R}$ ei ole ylhäältä rajoitettu.

Lemma 1.2.2. Olkoon $A \subset \mathbf{R}$ ja $a \in \mathbf{R}$. Tällöin $a = \sup A$, jos ja vain jos a toteuttaa ehdot (1) ja (2):

(1) a on joukon A yläraja;

(2) Kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $x \in A$, jolle $a - \varepsilon < x$.

Määritelmä 1.2.3. Olkoon $A \subset \mathbf{R}$. Luku $a \in \mathbf{R}$ on joukon A *suurin alaraja*, merkitään $a = \inf A$, jos se toteuttaa ehdot (1) ja (2):

(1) a on joukon A alaraja eli $a \leq x$ kaikilla $x \in A$;

(2) Jos $b \in \mathbf{R}$ ja $b \leq x$ kaikilla $x \in A$, niin $b \leq a$.

Huomautus. Ehto (1) sanoo, että A on alhaalta rajoitettu. Ehto (2) puolestaan sanoo, että jokainen A:n alaraja on korkeintaan a. Sovitaan siitä, että $\inf A = -\infty$ jos $A \subset \mathbf{R}$ ei ole alhaalta rajoitettu.

Lemma 1.2.4. Olkoon $A \subset \mathbf{R}$ ja $a \in \mathbf{R}$. Tällöin $a = \inf A$, jos ja vain jos se toteuttaa ehdot (1) ja (2):

(1) a on joukon A alaraja;

(2) Kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $x \in A$, jolle $a + \varepsilon > x$.

Huomautus 1.2.5. Määritelmistä seuraa helposti:

(1) Jos joukolla $A \subset \mathbf{R}$ on suurin alkio $\max A$, niin $\sup A = \max A$.

(2) Jos joukolla $A \subset \mathbf{R}$ on pienin alkio $\min A$, niin $\inf A = \min A$.

Reaalilukujen täydellisyysaksioma Jokaisella ylhäältä rajoitetulla joukolla $A \subset \mathbf{R}$ on $\sup A \in \mathbf{R}$ ja jokaisella alhaalta rajoitetulla joukolla $A \subset \mathbf{R}$ on $\inf A \in \mathbf{R}$.

Täydellisyysaksiomasta seuraa raja-arvon määritelmien avulla:

Lause 1.2.6. Olkoon reaalilukujono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ kasvava.

(1) Jos $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on ylhäältä rajoitettu, niin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{\, x_n \mid n \in \mathbf{N} \,\} \in \mathbf{R}.$$

(2) Jos $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ei ole ylhäältä rajoitettu, niin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{\, x_n \mid n \in \mathbf{N} \,\} = +\infty.$$

Luonnollisesti vastaava väite pätee vähenevälle jonolle ja infimumille.

Esimerkki. Olkoot $A, B \subset \mathbf{R}$ epätyhjiä. Tällöin

(1) $\sup A \leq \sup B$ ja $\inf A \geq \inf B$ jos $A \subset B$;

(2) $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$ ja $\inf(A + B) \geq \inf A + \inf B$.

Todistetaan malliksi kohdan (1) supremumia koskeva väite. Voidaan olettaa, että B on ylhäältä rajoitettu. Tällöin myös A on ylhäältä rajoitettu. Olkoon $a \in A$. Koska $a \in B$ (oletus) ja $\sup B$ on eräs B:n yläraja, niin $a \leq \sup B$. Supremumin määritelmän ehdon (2) mukaan $\sup A \leq \sup B$.

Todistetaan malliksi kohdan (2) infimumia koskeva väite. Voidaan olettaa, että $\inf A > -\infty$ ja $\inf B > -\infty$, ts. joukot A ja B ovat alhaalta rajoitettuja. Tällöin myös joukko

$$A + B := \{\, a + b : a \in A,\ b \in B \,\}$$

on alhaalta rajoitettu. Jos $a \in A$ ja $b \in B$, niin $\inf A \leq a$ ja $\inf B \leq b$ koska infimum on aina ko. joukon alaraja. Siispä $\inf A + \inf B \leq a + b$ kaikilla $a \in A$, $b \in B$. Näin ollen $\inf A + \inf B$ on eräs joukon $A + B$ alaraja. Tästä seuraa epäyhtälö $\inf(A + B) \geq \inf A + \inf B$.

1.3 Numeroituvat joukot

Numeroituvuudella on tärkeä rooli mittateoriassa!

Määritelmä 1.3.1. Joukko A on *numeroituva*, jos $A = \emptyset$ tai on olemassa injektio $f : A \to \mathbf{N}$ (ekvivalentisti: on olemassa surjektio $g : \mathbf{N} \to A$). Joukko A on *ylinumeroituva*, jos se ei ole numeroituva.

Huomautus 1.3.2. Määritelmästä voidaan helposti päätellä:

(1) Joukko A on numeroituva jos ja vain jos A on äärellinen (mukaan luettuna $\emptyset$) tai *numeroituvasti ääretön* (jolloin on olemassa bijektio $f : A \to \mathbf{N}$).

(2) Jos A on numeroituva ja $B \subset A$, niin B on numeroituva.

(3) Jos $A \neq \emptyset$ on numeroituva, kirjoitetaan $A = \{ x_n : n \in \mathbf{N} \}$ ja ymmärretään, että eri n:n arvoilla voidaan saada sama alkio. Erityisesti merkinnässä $A = \{ x_n : n \in \mathbf{N} \}$ joukko A voi olla äärellinen.

Lause 1.3.3. Jos joukot A_n ovat numeroituvia kaikilla $n \in \mathbf{N}$, niin yhdiste $\cup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ on numeroituva.

Todistus. Voidaan olettaa, että $A_n \neq \emptyset$ kaikilla n. Tällöin $A_n = \{ x_{(m,n)} : m \in \mathbf{N} \}$. Määritellään kuvaus $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \cup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ yhtälöllä

$$f(m, n) = x_{(m,n)}.$$

Tällöin f on surjektio. Mutta tunnetusti (ks. Johdantokurssi) $\mathbf{N}$ ja $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ovat yhtä mahtavat, joten on olemassa surjektio (itseasiassa bijektio) $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Nyt kuvaus $f \circ g : \mathbf{N} \to \cup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ on surjektio, joten väite seuraa. $\square$

Seuraus 1.3.4. Rationaalilukujen joukko $\mathbf{Q} = \{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0 \}$ on numeroituva.

Esimerkki. Osoitetaan: Jos A on numeroituva, niin A on äärellinen tai on olemassa bijektio $f : A \to \mathbf{N}$.

Oletetaan, että A on numeroituva ja epätyhjä. Tällöin on olemassa injektio $f : A \to \mathbf{N}$, ts. $f : A \to f(A)$ on bijektio. Jos $f(A) \subset \mathbf{N}$ on rajoitettu, niin A on äärellinen. Jos $f(A)$ ei ole rajoitettu, voidaan $f(A)$:n pienin alkio kuvata luvulle 1, toiseksi pienin alkio luvulle 2, jne. Näin tulee määritellyksi bijektio $g : f(A) \to \mathbf{N}$. Yhdistetty kuvaus $g \circ f$ on tällöin bijektio $A \to \mathbf{N}$.

1.4 Avoimet ja suljetut joukot avaruudessa $\mathbf{R}^n$

Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Tällöin euklidinen avaruus $\mathbf{R}^n$ määritellään n-kertaisena karteesisena tulona

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}.$$

Avaruuden $\mathbf{R}^n$ alkiota $x = (x_1, \ldots, x_n)$ kutsutaan *pisteeksi* tai *vektoriksi*. Avaruuden euklidinen *normi* $| \cdot |$ määritellään yhtälöllä

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}$$

ja euklidinen *metriikka (etäisyys)* d yhtälöllä

$$d(x,y) = |x-y|$$

kaikilla $x, y \in \mathbf{R}^n$.

Olkoon $x \in \mathbf{R}^n$ ja $r > 0$. Joukko

$$B(x,r) = \{\, y \in \mathbf{R}^n : |x-y| < r \,\}$$

on *avoin (x-keskinen, r-säteinen) pallo* ja joukko

$$\overline{B}(x,r) = \{\, y \in \mathbf{R}^n : |x-y| \le r \,\}$$

on *suljettu (x-keskinen, r-säteinen) pallo.*

Määritelmä 1.4.1. Joukko $U \subset \mathbf{R}^n$ on *avoin*, jos jokaista $x \in U$ vastaa $r > 0$ siten, että $B(x,r) \subset U$. Joukko V on *suljettu*, jos $\mathbf{R}^n \setminus V$ on avoin.

Määritelmästä seuraa välittömästi, että $\mathbf{R}^n$ ja $\emptyset$ ovat sekä avoimia että suljettuja! Tunnetusti avoin pallo $B(x,r)$ on avoin joukko ja suljettu pallo $\overline{B}(x,r)$ on suljettu joukko.

Lemma 1.4.2. Olkoon $\mathcal{A}$ mielivaltainen indeksijoukko.

(1) Jos U_α on avoin kaikilla $\alpha \in \mathcal{A}$, niin $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$ on avoin.

(2) Jos joukot $U_1, \dots U_k$ ovat avoimia, niin $\bigcap_{i=1}^k U_i$ on avoin.

(3) Jos V_α on suljettu kaikilla $\alpha \in \mathcal{A}$, niin $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha$ on suljettu.

(4) Jos joukot $V_1, \dots V_k$ ovat suljettuja, niin $\bigcup_{i=1}^k V_i$ on suljettu.

Esimerkki. Todistetaan malliksi edellisen lemman kohta (2): Jos joukot $U_1, \dots U_k$ ovat avoimia, niin $\bigcap_{i=1}^k U_i$ on avoin.

Voidaan olettaa, että $\bigcap_{i=1}^k U_i$ on epätyhjä. Olkoon $x \in \bigcap_{i=1}^k U_i$. Koska U_i on avoin, on olemassa $r_i > 0$ siten, että $B(x, r_i) \subset U_i$, $i = 1, \dots, k$. Valitaan $r = \min\{\, r_1, \dots, r_k \,\}$. Tällöin $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset U_i$ kaikilla $i = 1, \dots, k$, joten $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^k U_i$. Määritelmän mukaan $\bigcap_{i=1}^k U_i$ on avoin.

Lemman kohta (1) päätellään vastaavasti yhdisteen määritelmän avulla. Kohdat (3) ja (4) seuraavat de Morganin laeista.

Lause 1.4.3 (Heine-Borelin lause)**.** Olkoon $V \subset \mathbf{R}^n$ suljettu ja rajoitettu. Olkoon edelleen $\mathcal{F} = \{\, U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A} \,\}$ kokoelma avoimia joukkoja ($\mathcal{A}$ jokin indeksijoukko) siten, että

$$V \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha.$$

Tällöin on olemassa äärellinen osakokoelma $U_{\alpha_1}, \dots U_{\alpha_k} \in \mathcal{F}$ siten, että

$$V \subset \bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i}.$$

2 Lebesguen mitta euklidisessa avaruudessa

2.1 Ääretöntä koskevia sopimuksia

Mittateoriassa joudutaan usein tilanteeseen, jossa reaalilukujen yhteen- ja kertolasku on laajennettava joukkoon $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Merkitään lyhyesti $+\infty = \infty$. Seuraavat sopimukset ovat äärettömiä raja-arvoja koskevien laskulakien mukaiset:

- Kaikilla $a \neq -\infty$ pätee $a + \infty = \infty + a = \infty$:
- Kaikilla $a \neq +\infty$ pätee $a - \infty = -\infty + a = -\infty$;
- $-(+\infty) = -\infty$ ja $-(-\infty) = \infty$;
- $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$;
- $(-\infty)\infty = \infty(-\infty) = -\infty$;
- $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$ kaikilla $a > 0$;
- $\infty \cdot a = a \cdot \infty = -\infty$ kaikilla $a < 0$;
- $(-\infty)a = a(-\infty) = -\infty$ kaikilla $a > 0$;
- $(-\infty)a = a(-\infty) = \infty$ kaikilla $a < 0$;
- Kaikilla $a \in \mathbf{R}$ pätee $\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$.

Lisäksi sovitaan laskusäännöstä

- $0 \cdot \pm\infty = 0$.

Tähän ei päädytä äärettömien raja-arvojen tulkinnasta!

Huomautus. Lausekkeet

$$\infty - \infty, \quad -\infty + \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

ovat määrittelemättömiä!

2.2 Johdanto

Jos $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ on rajoitettu väli, niin sen *pituus* $\ell(I)$ on

$$\ell(I) = b - a.$$

Vastaavasti tasossa $\mathbf{R}^2$ rajoitetun suorakulmion $I = [a, b] \times [c, d]$ *pinta-ala* $\ell(I)$ on

$$\ell(I) = (b - a)(d - c)$$

ja avaruuden $\mathbf{R}^3$ "laatikon"$I = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ *tilavuus* $\ell(I)$ on

$$\ell(I) = (b - a)(d - c)(f - e).$$

Seuraavassa laajennetaan pituuden (vast. pinta-alan, tilavuuden) käsitteet mahdollisimman yleisille joukoille.

Määritelmä 2.2.1. Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Joukko $I \subset \mathbf{R}^n$ on *n-väli* jos se on muotoa

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n,$$

missä kukin I_i on rajoitettu väli (avoin, suljettu tai puoliavoin) joukossa $\mathbf{R}$. Jos välin I_i päätepisteet ovat $a_i < b_i$, niin n-välin I *geometrinen mitta* $\ell(I)$ määritellään lukuna

$$\ell(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Luonnollisena tavoitteena on määritellä n-ulotteinen "mitta"m_n kuvauksena $m_n : \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \to [0, +\infty]$, joka toteuttaa ehdot:

(1) $m_n(E)$ on määritelty kaikille $E \subset \mathbf{R}^n$;

(2) Jos I on n-väli, niin $m_n(I) = \ell(I)$;

(3) Jos $(E_i)_{i \in \mathbf{N}}$ on jono erillisiä (ts. $E_i \cap E_j = \emptyset$ aina kun $i \neq j$) $\mathbf{R}^n$:n joukkoja, niin

$$m_n\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m_n(E_i) \quad \text{(Numeroituva additiivisuus);}$$

(4) m_n on *siirtoinvariantti*, ts.

$$m_n(E + x) = m_n(E)$$

aina kun $E \subset \mathbf{R}^n$ ja $x \in \mathbf{R}^n$. (Tässä $E + x := \{ x + y : y \in E \}$)

Valitettavasti kaikkia vaatimuksia (1)–(4) ei voida samanaikaisesti toteuttaa. Lebesguen integrointiteoriassa on päädytty luopumaan ehdosta (1), sillä (kuten myöhemmin nähdään) mitta tulee joka tapauksessa määritellyksi riittävän suurelle määrälle joukkoja.

2.3 Lebesguen ulkomitta

Sanotaan, että n-väli $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ on *avoin*, jos $I_i \subset \mathbf{R}$ on avoin väli kaikilla i. Edelleen n-väli $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ on *suljettu*, jos $I_i \subset \mathbf{R}$ on suljettu kaikilla i.

Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ ja olkoon

$$\mathcal{F} = \{ I_1, I_2, \dots \}$$

numeroituva joukko avoimia n-välejä. Tässä myös tapaus $I_i = \emptyset$ sallitaan ja erityisesti $\mathcal{F}$ voi koostua äärellisestä määrästä n-välejä. Jos lisäksi pätee

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,$$

sanotaan, että $\mathcal{F}$ on joukon A *Lebesguen peite*.

Määritelmä 2.3.1. Joukon $A \subset \mathbf{R}^n$ *n-ulotteinen (Lebesguen) ulkomitta* $m_n^*(A)$ on luku

$$m_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) : \mathcal{F} = \{ I_1, I_2, \dots \} \text{ on joukon } A \text{ Lebesguen peite} \right\}.$$

Merkintä. Lyhyyden vuoksi Määritelmän 2.3.1 yhteydessä merkitään myös

$$S(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i).$$

Huomautus. Tutkitaan Määritelmää 2.3.1:

(1) Merkitään $J_i = \{ x \in \mathbf{R}^n : |x_k| < i \text{ kaikilla } k = 1, \dots, n \}$, missä $i = 1, 2, \dots$. Selvästi pätee

$$\mathbf{R}^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i,$$

joten kaikilla $A \subset \mathbf{R}^n$ on ainakin Lebesguen peite $\mathcal{F} = \{ J_i : i \in \mathbf{N} \}$.

(2) Jos I_i on avoin n-väli, niin $0 \le \ell(I_i) < \infty$. Näin ollen Määritelmän 2.3.1 sarjan $\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i)$ osasummat muodostavat kasvavan jonon. Lauseen 1.2.6 nojalla $\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i)$ on olemassa reaalilukuna tai lukuna $+\infty$.

(3) Kohdista (1) ja (2) seuraa, että kaikilla $A \subset \mathbf{R}^n$ ulkomitta $m_n^*(A)$ on olemassa joko ei-negatiivisena reaalilukuna tai lukuna $+\infty$.

(4) Infimumin määritelmästä seuraa: Kaikilla $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $\varepsilon > 0$ on olemassa A:n Lebesguen peite $\mathcal{F}$, jolle

$$S(\mathcal{F}) \le m_n^*(A) + \varepsilon.$$

(Tässä epäyhtälö on aito jos $m_n^*(A) < +\infty$.) Sen sijaan *välttämättä ei ole olemassa* Lebesguen peitettä $\mathcal{F}$ siten, että

$$S(\mathcal{F}) = m_n^*(A).$$

Esimerkki. (1) Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ rajoitettu joukko. Määritelmän mukaan on olemassa $R > 0$ siten, että $A \subset B(0, R)$. Tällöin $A \subset I$, missä

$$I =]-R, R[\times \cdots \times]-R, R[\subset \mathbf{R}^n.$$

Saadaan arvio

$$m_n^*(A) \le \ell(I) = (2R)^n.$$

(2) Olkoon $n = 2$ ja olkoon $A = \{ (x, 0) : a \le x \le b \} \subset \mathbf{R}^2$, ts. A on suljettu jana tasossa.

Väite: $m_2^*(A) = 0$.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $I_\varepsilon =]a - \varepsilon, b + \varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbf{R}^2$ avoin 2-väli. Nyt $A \subset I_\varepsilon$, joten

$$0 \le m_2^*(A) \le \ell(I_\varepsilon) = 2\varepsilon(b - a + 2\varepsilon).$$

Koska epsilon on mielivaltainen, on välttämättä $m_2^*(A) = 0$ (seuraa kuristusperiaatteesta kun $\varepsilon \to 0^+$).

(3) Olkoon $n = 1$. Tarkastellaan rationaalilukujen joukkoa $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Väite: $m_1^*(\mathbf{Q}) = 0$.

Todistus. $\mathbf{Q}$ on numeroituva, joten $\mathbf{Q} = \{\, q_i : i \in \mathbf{N} \,\}$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon

$$I_i =]q_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, q_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}[\subset \mathbf{R}$$

kaikilla $i \in \mathbf{N}$. Tällöin $\ell(I_i) = \frac{2\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{2^i}$. Nyt $\mathbf{Q} \subset \cup_{i \in \mathbf{N}} I_i$ (ts. välit I_i muodostavat $\mathbf{Q}$:n Lebesguen peitteen). Koska

$$0 \le m_1^*(Q) \le \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \varepsilon$$

ja $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, on $m_1^*(\mathbf{Q}) = 0$.

(4) Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ numeroituva. Olennaisesti samalla tavoin kuin kohdassa (2) todetaan, että $m_n^*(A) = 0$.

Lause 2.3.2. Ulkomitalla on perusominaisuudet:

(1) $m_n^*(\emptyset) = 0$;

(2) Jos $A \subset B \subset \mathbf{R}^n$, niin $m_n^*(A) \le m_n^*(B)$; (Monotonisuus)

(3) Jos $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ on jono $\mathbf{R}^n$ osajoukkoja, niin

$$m_n^*\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} m_n^*(A_i). \quad \text{(Subadditiivisuus)}$$

(1) Triviaali.

(2) Olkoon $\mathcal{F}$ mv. joukon B Lebesguen peite. Koska $A \subset B$, $\mathcal{F}$ on myös joukon A Lebesguen peite. Joukon A ulkomitan määritelmän mukaan

$$m_n^*(A) \le S(\mathcal{F}).$$

Siispä $m_n^*(A)$ on eräs alaraja joukolle, joka esiintyy B:n ulkomitan määritelmässä. Infimumin määritelmän mukaan

$$m_n^*(A) \le m_n^*(B).$$

(3) Merkitään $A = \cup_{i \in \mathbf{N}} A_i$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Kullakin i valitaan joukon A_i Lebesguen peite $\mathcal{F}_i = \{\, I_{i1}, I_{i2}, \dots \,\}$ siten, että

$$S(\mathcal{F}_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{ij}) \le m_n^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Nyt $\mathcal{F} = \cup_{i \in \mathbf{N}} \mathcal{F}_i$ on eräs yhdisteen A Lebesguen peite (Lause 1.3.3), joten

$$\begin{aligned} m_n^*(A) &\le \sum_{(i,j)} \ell(I_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{ij}) \le \sum_{i=1}^{\infty} (m_n^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}) \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} m_n^*(A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} m_n^*(A_i) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Yhtälössä $\sum_{(i,j)} \ell(I_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{ij})$ käytettiin hyväksi Lemmaa 2.3.3.

Esimerkki. Lauseesta 2.3.2 seuraa aiemman esimerkin avulla, että $m_2^*(A) = 0$ joukolle $A = \mathbf{R} \times \{0\}$. Aiemman esimerkin perusteella $m_2^*(A_i) = 0$ joukolle $A_i = [-i, i] \times \{0\}$. Toisaalta $A = \cup_{i \in \mathbf{N}} A_i$, joten subadditiivisuuden perusteella

$$0 \leq m_2^*(A) \leq \sum_{i \in \mathbf{N}} m_2^*(A_i) = 0.$$

Lemman 2.3.3 todistamiseksi laajennetaan summan määritelmää.

Yleinen summan määritelmä. Määritellään ei-negatiivisten lukujen (ääretön sallitaan) yleinen summaus seuraavasti: Jos $\mathcal{A}$ on mielivaltainen indeksijoukko ja $b_i \in [0, +\infty]$ kaikilla $i \in \mathcal{A}$, asetetaan

$$\sum_{i \in \mathcal{A}} b_i = \sup \left\{ \sum_{i \in I} b_i : I \subset \mathcal{A} \text{ äärellinen} \right\}.$$

Lemma 2.3.3. Olkoon $a_{ij} \in [0, +\infty]$ jokaisella $(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Tällöin

$$\sum_{(i,j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}} a_{ij} = \sum_{i \in \mathbf{N}} \sum_{j \in \mathbf{N}} a_{ij} = \sum_{j \in \mathbf{N}} \sum_{i \in \mathbf{N}} a_{ij}.$$

Todistus. Tarkastellaan lemman vasemmanpuoleista väitettä. Summausmääritelmän mukaan

$$\sum_{(i,j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}} a_{ij} = \sup \left\{ \sum_{(i,j) \in I} a_{ij} : I \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N} \text{ on äärellinen} \right\}.$$

Olkoon $I \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ äärellinen. Tällöin $I \subset I_1 \times I_2$, missä $I_1, I_2 \subset \mathbf{N}$ ovat äärellisiä. Koska summaus on äärellinen, voidaan kirjoittaa

$$\sum_{(i,j) \in I} a_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in I_1 \times I_2} a_{ij} = \sum_{i \in I_1} \sum_{j \in I_2} a_{ij} \leq \sum_{i \in I_1} \sum_{j \in \mathbf{N}} a_{ij} \leq \sum_{i \in \mathbf{N}} \sum_{j \in \mathbf{N}} a_{ij}.$$

Ottamalla supremum yli kaikkien äärellisten joukkojen I saadaan

$$\sum_{(i,j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}} a_{ij} \leq \sum_{i \in \mathbf{N}} \sum_{j \in \mathbf{N}} a_{ij}.$$

Käänteinen epäyhtälö todistetaan vastaavaan tapaan. □

Lause 2.3.4. Jos $I \subset \mathbf{R}^n$ on n-väli, niin

$$m_n^*(I) = \ell(I),$$

ts. n-välin geometrinen mitta yhtyy ulkomittaan.

Todistus. Olkoon aluksi I suljettu n-väli. Epäyhtälö $m_n^*(I) \leq \ell(I)$ jätetään harjoitustehtäväksi. Väitteen $m_n^*(I) \geq \ell(I)$ todistamiseksi olkoon $\mathcal{F} = (I_i)_{i \in \mathbf{N}}$ välin I Lebesguen peite. Koska I on suljettu ja rajoitettu (eli kompakti), Heine-Borelin lauseen mukaan on olemassa äärellinen osapeite, so. joillekin $I_{i1}, \ldots, I_{ik} \in \mathcal{F}$ pätee

$$I \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_{ij}.$$

Lemman 2.3.5 nojalla

$$\ell(I) \leq \sum_{j=1}^{k} \ell(I_{ij}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_i) = S(\mathcal{F}).$$

Ottamalla infimum yli kaikkien välin I Lebesguen peitteiden $\mathcal{F}$ saadaan haluttu epäyhtälö $\ell(I) \leq m_n^*(I)$.

Oletetaan lopuksi, että I ei ole suljettu. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa suljettu n-väli $J \subset I$ siten, että $\ell(J) > \ell(I) - \varepsilon$. Ulkomitan monotonisuuden ja todistuksen alkuosan nojalla

$$m_n^*(I) \geq m_n^*(J) = \ell(J) > \ell(I) - \varepsilon.$$

Koska $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, saadaan $m_n^*(I) \geq \ell(I)$. $\square$

Lauseen 2.3.4 todistus perustui seuraavaan intuitiivisesti ilmeiseen aputulokseen. Sivuutamme aputuloksen todistuksen.

Lemma 2.3.5. Olkoot I ja $I_1, \ldots, I_k$ n-välejä siten, että $I \subset \cup_{j=1}^{k} I_j$. Tällöin

$$\ell(I) \leq \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j).$$

Oletetaan lisäksi, että leikkauksilla $I_i \cap I_j$, $i \neq j$, ei ole sisäpisteitä, ts. $I_i \cap I_j$ ei sisällä yhtään avointa palloa, ja että $I = \cup_{j=1}^{k} I_j$. Tällöin

$$\ell(I) = \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j).$$

Esimerkki. Olkoon $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ rajoittamaton n-dimensionaalinen väli, ts. jokin väleistä $I_i \subset \mathbf{R}$ on rajoittamaton. Tällöin ulkomitan monotonisuudesta seuraa, että $m_n^*(I) = +\infty$. Esimerkiksi, jos $n = 1$ ja $I = [0, +\infty]$, niin välit $I_i = [0, i]$ ovat välin I osajoukkoja ja siten

$$m_1^*(I) \geq m_1^*(I_i) = i$$

kaikilla $i \in \mathbf{N}$. Tällöin välttämättä $m_1^*(I) = +\infty$. Sama idea toimii yleisessä tapauksessa.

2.4 Mitalliset joukot

Oletetaan, että dimensio n on kiinnitetty ja merkitään lyhyemmin $m^*(A) = m_n^*(A)$. Seuraavan määritelmän ominaisuutta kutsutaan *Caratheodory'n ehdoksi.*

Määritelmä 2.4.1. Joukko $E \subset \mathbf{R}^n$ on *(Lebesgue) mitallinen*, jos

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

kaikilla $A \subset \mathbf{R}^n$.

Huomautus. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$. Koska kaikilla $A \subset \mathbf{R}^n$ pätee $A = (A \cap E) \cup (A \setminus E)$, niin ulkomitan subadditiivisuudesta seuraa

$$m^*(A) = m^*((A \cap E) \cup (A \setminus E)) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Siis epäyhtälö $\leq$ Määritelmässä 2.4.1 pätee vaikka E ei olisi mitallinen. Mitallisuuden todistamiseksi riittää siis osoittaa, että

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

kaikilla $A \subset \mathbf{R}^n$. Edelleen voidaan olettaa, että $m^*(A) < +\infty$.

Merkintä. Jos joukko E on mitallinen, merkitään $m(E) := m^*(E)$.

Lause 2.4.2 (Vitali (1905))**.** On olemassa ei-mitallisia joukkoja.

Jatkossa nähdään, että Lebesguen ulkomitta toteuttaa mitallisten joukkojen luokassa kaikki luvussa 2.2 esitetyt vaatimukset (2)–(4). Näin ollen Lebesguen ulkomitta on mitallisten joukkojen luokassa "järkevä"mitta edellyttäen, että mitallisten joukkojen luokka todetaan tarpeeksi kattavaksi. Seuraavaksi tutkitaankin sitä, mitkä joukot ovat mitallisia.

Lemma 2.4.3. Jos joukolle $E \subset \mathbf{R}^n$ pätee $m^*(E) = 0$, niin E on mitallinen.

Todistus. Oletetaan, että $m^*(E) = 0$. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mv. testijoukko. Koska $A \cap E \subset E$, niin monotonisuuden nojalla $m^*(A \cap E) = 0$. Toisaalta $A \setminus E \subset A$, joten monotonisuuden nojalla

$$m^*(A) \geq m^*(A \setminus E) = m^*(A \setminus E) + m^*(A \cap E).$$

Näin ollen E on mitallinen. $\square$

Nimitys. Jos joukolle $E \subset \mathbf{R}^n$ pätee $m^*(E) = 0$, joukkoa E sanotaan *nollamittaiseksi.*

Tiedetään, että numeroituvat joukot ovat nollamittaisia. Toisaalta:

Esimerkki.(a) Niin sanottu Cantorin 1/3-joukko on nollamittainen, mutta ylinumeroituva.

(b) Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ siten, että

$$m^*(A \cap B(x,r)) \leq |x|r^3$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}^2$ ja $r > 0$. Tällöin $m^*(A) = 0$.

Jatkossa käytetään lyhyyden vuoksi myös merkintää E^c joukon E komplementille $\mathbf{R}^n \setminus E$.

Lemma 2.4.4. Jos $E \subset \mathbf{R}^n$ on mitallinen, niin $E^c = \mathbf{R}^n \setminus E$ on mitallinen.

Todistus. Olkoon E mitallinen ja $A \subset \mathbf{R}^n$. Koska $A \setminus E = A \cap E^c$, saadaan

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap (E^c)^c) + m^*(A \cap E^c).$$

Testijoukko A on mielivaltainen, joten E^c on mitallinen. $\square$

Seuraavana tavoitteena on osoittaa, että mitallisten joukkojen numeroituvat leikkaukset ja yhdisteet ovat mitallisia. Tähän päästään vaiheittain aputulosten kautta.

Lemma 2.4.5. Olkoot $E_1, \dots, E_k \subset \mathbf{R}^n$ mitallisia. Tällöin joukot $\cup_{i=1}^k E_i$ ja $\cap_{i=1}^k E_i$ ovat mitallisia.

Lemma 2.4.6. Olkoot $E_1, \dots, E_k \subset \mathbf{R}^n$ mitallisia ja erillisiä (ts. pareittain pistevieraita eli $E_i \cap E_j = \emptyset$ aina kun $i \neq j$). Tällöin kaikilla $A \subset \mathbf{R}^n$ pätee

$$m^*\left(A \cap (\cup_{i=1}^k E_i)\right) = \sum_{i=1}^k m^*(A \cap E_i).$$

Kirjallinen harjoitustehtävä. Todista kirjallisuutta hyödyntäen lemmat 2.4.4 ja 2.4.5, ks. esimerkiksi Royden: Real Analysis (1988), s. 59-60.

Lemma 2.4.7. Olkoot E_i mitallisia kaikilla $i \in \mathbf{N}$ ja olkoon $E = \cup_{i=1}^\infty E_i$. Tällöin on olemassa erilliset ja mitalliset joukot $F_i \subset E_i$ siten, että

$$E = \bigcup_{i=1}^\infty F_i.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Lause 2.4.8. Olkoot E_i mitallisia kaikilla $i \in \mathbf{N}$. Tällöin joukot

$$\bigcup_{i=1}^\infty E_i \quad \text{ja} \quad \bigcap_{i=1}^\infty E_i$$

ovat mitallisia. Lisäksi, jos joukot E_i ovat erillisiä, niin

$$m\left(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\right) = \sum_{i=1}^\infty m(E_i). \quad \text{(Numeroituva additiivisuus)}$$

Todistus. Lemman 2.4.7 nojalla

$$S := \bigcup_{i=1}^\infty E_i = \bigcup_{i=1}^\infty F_i,$$

missä joukot F_i ovat erillisiä ja mitallisia. Olkoon

$$S_k = \bigcup_{i=1}^k F_i, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Tällöin $S_k \subset S$ ja Lemman 2.4.5 nojalla joukot S_k ovat mitallisia. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mv. Mitallisuuden määritelmän, monotonisuuden ja Lemman 2.4.6 seurauksena saadaan

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap S_k) + m^*(A \setminus S_k) \geq m^*(A \cap S_k) + m^*(A \setminus S) \\ &= \sum_{i=1}^{k} m^*(A \cap F_i) + m^*(A \setminus S) \end{aligned}$$

kaikilla $k \in \mathbf{N}$. Antamalla $k \to \infty$ saadaan subadditiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap F_i) + m^*(A \setminus S) \\ &\geq m^*(\cup_{i=1}^{\infty}(A \cap F_i)) + m^*(A \setminus S) \\ &= m^*(A \cap S) + m^*(A \setminus S). \end{aligned} \tag{1}$$

Koska A on mielivaltainen, on todistettu että $S = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ on mitallinen. Näin ollen (De Morgan ja Lemma 2.4.4) myös

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c \right)^c$$

on mitallinen.

Jos joukot E_i ovat erillisiä, voidaan edellä F_i korvata joukolla E_i. Valitsemalla $A = S$ epäyhtälön (1) ensimmäisellä rivillä saadaan subadditiivisuuden nojalla

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \geq m(S) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S \cap E_i) + m^*(S \setminus S) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i).$$

Väite seuraa. □

Tähän mennessä tiedämme mitallisista joukoista eksplisiittisesti vain sen, että nollamittaiset joukot ovat mitallisia. Seuraavana tavoitteena on osoittaa, että kaikki avoimet (ja siten myös suljetut) joukot ovat mitallisia.

Lause 2.4.9. Jos I on n-väli, niin I on mitallinen ja

$$m(I) = \ell(I).$$

Todistus. Riittää osoittaa (Lause 2.3.4), että I on mitallinen. Todistetaan väite tapauksessa $n = 1$; yleisen tapauksen idea sama (ks. esim. Lehto: Differentiaali- ja integraalilaskenta III).

Olkoon $A \subset \mathbf{R}$ testijoukko. On osoitettava, että

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I).$$

Voidaan olettaa, että $m^*(A) < +\infty$. Tällöin jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa joukon A Lebesguen peite $\mathcal{F} = \{ I_1, I_2, \dots \}$ (avoimilla väleillä) siten, että

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

Merkitään $I'_j := I_j \setminus I$ ja $I''_j := I_j \cap I$. Tällöin I''_j on joko tyhjä joukko tai väli ja I'_j on joko tyhjä joukko, väli tai kahden pistevieraan välin yhdiste. Merkitään edelleen $I'_j := I'_{j1} \cup I'_{j2}$, missä I'_{jk} on joko väli tai tyhjä joukko ja $I'_{j1} \cap I'_{j2} = \emptyset$. Lemman 2.3.5 ja Lauseen 2.3.4 nojalla (käyttäen sopimusta $\ell(\emptyset) = 0$) voidaan kirjoittaa

$$\ell(I_j) = \ell(I''_j) + \ell(I'_{j1}) + \ell(I'_{j2}) = m^*(I''_j) + m^*(I'_{j1}) + m^*(I'_{j2}).$$

Summaamalla yli indeksien j ja käyttämällä subadditiivisuutta ja monotonisuutta saadaan

$$\begin{aligned} m^*(A) + \varepsilon &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(I''_j) + \sum_{j=1}^{\infty} m^*(I'_{j1}) + \sum_{j=1}^{\infty} m^*(I'_{j2}) \\ &\geq m^*\left(\bigcup_{j\in\mathbf{N}} I''_j\right) + m^*\left(\bigcup_{j\in\mathbf{N}} I'_{j1} \cup \bigcup_{j\in\mathbf{N}} I'_{j2}\right) \\ &\geq m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I). \end{aligned}$$

Koska $\varepsilon > 0$ on mv., niin $m^*(A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I)$, ts. I on mitallinen. □

Lemma 2.4.10 (Lindelöfin lause)**.** Olkoon $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ mielivaltainen kokoelma avoimia joukkoja. Tällöin on olemassa numeroituva indeksijoukko $\{ \alpha_i \in \mathcal{A} : i \in \mathbf{N} \}$ jolle

$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha = \bigcup_{i\in\mathbf{N}} U_{\alpha_i}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 2.4.11. Avaruuden $\mathbf{R}^n$ avoimet ja suljetut joukot ovat mitallisia.

Todistus. Olkoon $U \subset \mathbf{R}^n$ avoin. Jokaista $x \in U$ vastaa avoimen joukon määritelmän nojalla avoin pallo $B(x, r_x)$ siten, että $B(x, r_x) \subset U$. Edelleen löydetään avoin n-väli $I(x)$, jolle $x \in I(x) \subset B(x, r_x)$. Tällöin kokoelma

$$\mathcal{F} = \{ I(x) : x \in U \}$$

on joukon U avoin peite ja Lindelöfin lauseen nojalla $\mathcal{F}$ sisältää numeroituvan osakokoelman

$$\mathcal{F}' := \{ I(x_1), I(x_2), \dots \},$$

jolle pätee

$$U \subset \bigcup_{i\in\mathbf{N}} I(x_i) \subset U.$$

Siis $U = \cup_{i\in\mathbf{N}} I(x_i)$ on mitallinen lauseiden 2.4.8 ja 2.4.9 nojalla.

Jos $V \subset \mathbf{R}^n$ on suljettu, niin V^c on avoin ja siten V^c on mitallinen. Edelleen $V = (V^c)^c$ on mitallinen Lemman 2.4.4 nojalla. □

Määritelmä 2.4.12. Olkoon X joukko. Kokoelma $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ on joukon X *σ-algebra*, jos Γ toteuttaa ehdot (1)–(3):

(1) $\emptyset \in \Gamma$;

(2) Jos $A \in \Gamma$, niin $X \setminus A \in \Gamma$;

(3) Jos $A_i \in \Gamma$ kaikilla $i \in \mathbf{N}$, niin $\cup_{i \in \mathbf{N}} A_i \in \Gamma$.

Huomautus 2.4.13. (1) Edellä on osoitettu, että avaruuden $\mathbf{R}^n$ mitalliset joukot muodostavat joukon $\mathbf{R}^n$ σ-algebran.

(2) Jos Γ on joukon X σ-algebra ja $A_i \in \Gamma$ kaikilla $i \in \mathbf{N}$, niin myös $\cap_{i \in \mathbf{N}} A_i \in \Gamma$. Tämä seuraa määritelmästä de Morganin lain avulla, sillä

$$\bigcap_{i \in \mathbf{N}} A_i = \bigcap_{i \in \mathbf{N}} (A_i^c)^c = \left(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} A_i^c \right)^c \in \Gamma.$$

(3) Jokaisella joukolla X on ainakin σ-algebrat $\Gamma_1 = \mathcal{P}(X)$ ja $\Gamma_2 = \{ \emptyset, X \}$. Edelleen, jos $A \subset X$, niin $\Gamma_3 = \{ \emptyset, X, A, X \setminus A \}$ on X:n σ-algebra.

Määritelmä 2.4.14. *Borel-joukkojen kokoelma* $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ on avaruuden $\mathbf{R}^n$ suppein σ-algebra, joka sisältää avoimet joukot.

Huomautus. Määritelmän 2.4.14 mielekkyyden toteamiseksi tarkastellaan perhettä

$$\mathcal{A} = \bigcap \{ \Gamma : \Gamma \in S(\mathcal{O}) \},$$

missä $S(\mathcal{O})$ tarkoittaa niiden σ-algebrojen $\subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ joukkoa, jotka sisältävät $\mathbf{R}^n$:n avoimet joukot.

Riittää osoittaa, että $\mathcal{A}$ on σ-algebra, sillä määritelmästä johtuen $\mathcal{A}$ on tällöin suppein $S(\mathcal{O})$:n joukkoperhe.

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$, sillä $\emptyset \in \Gamma$ kaikilla $\Gamma \in S(\mathcal{O})$.

(2) Jos $A \in \mathcal{A}$, niin $A \in \Gamma$ kaikille $\Gamma \in S(\mathcal{O})$. Edelleen $A^c \in \Gamma$ kaikille $\Gamma \in S(\mathcal{O})$ koska Γ on σ-algebra. Siis $A^c \in \mathcal{A}$.

(3) Jos $A_i \in \mathcal{A}$, niin $A_i \in \Gamma$ kaikille $\Gamma \in S(\mathcal{O})$, $i \in \mathbf{N}$. Edelleen $\cup_{i \in \mathbf{N}} A_i \in \Gamma$ kaikille $\Gamma \in S(\mathcal{O})$ koska Γ on σ-algebra. Siis $\cup_{i \in \mathbf{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Huomautus 2.4.15. (a) Olkoon $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ avaruuden $\mathbf{R}^n$ mitallisten joukkojen kokoelma. Edellä on osoitettu, että

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{M}(\mathbf{R}^n),$$

ts. Borelin joukkojen σ-algebra sisältyy Lebesgue-mitallisten joukkojen σ-algebraan.

(b) Jokaisella $\mathbf{R}^n$:n joukolla A on *mitallinen peite*, so. on olemassa mitallinen joukko $B \subset \mathbf{R}^n$, jolle $A \subset B$ ja $m^*(A) = m(B)$ (harjoitustehtävä). Yleisessä mittateoriassa ulkomittaa, jolla on vastaava ominaisuus, nimitetään *säännölliseksi*.

(c) Luokka $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ on laajin $\mathbf{R}^n$:n σ-algebra, johon rajoitettuna ulkomitta m^* on additiivinen joukkofunktio. Tämän todistamiseksi olkoon $\Gamma \supset \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ σ-algebra siten, että

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2)$$

aina kun $E_1, E_2 \in \Gamma$ ja $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Olkoon edelleen $E \in \Gamma$ sekä $A \subset \mathbf{R}^n$ mielivaltainen. Kohdan (b) nojalla on olemassa mitallinen $B \subset \mathbf{R}^n$, jolle $m^*(A) = m(B)$. Koska $B \cap E \in \Gamma$ ja $B \cap E^c \in \Gamma$ (Γ σ-algebra), niin

$$m^*(A) = m^*(B) = m^*(B \cap E) + m^*(B \setminus E) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Näin ollen E on mitallinen ja siis $\Gamma \subset \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$.

2.5 Mitan konvergenssi

Lebesguen integrointiteoriassa keskeiset konvergenssilauseet perustuvat seuraaviin kahteen mitan konvergenssilauseeseen.

Lause 2.5.1. Olkoon $(A_j)_{j\in\mathbf{N}}$ kasvava jono (ts. $A_i \subset A_j$ kaikilla $i < j$) $\mathbf{R}^n$:n mitallisia joukkoja. Tällöin

$$m\left(\bigcup_{j\in\mathbf{N}} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} m(A_j).$$

Todistus. Huomaa, että $\bigcup_{j\in\mathbf{N}} A_j$ on mitallinen. Väite seuraa helposti, kun esitetään yhdiste muodossa

$$\bigcup_{j\in\mathbf{N}} A_j = \bigcup_{j\in\mathbf{N}} (A_j \setminus A_{j-1}),$$

missä $A_0 := \emptyset$. Nyt mitan additiivisuuden (Lause 2.4.8) nojalla voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
m\left(\bigcup_{j\in\mathbf{N}} A_j\right) &= m\left(\bigcup_{j\in\mathbf{N}} (A_j \setminus A_{j-1})\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j \setminus A_{j-1}) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} m(A_j \setminus A_{j-1}) \\
&= \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{j=1}^{k} (A_j \setminus A_{j-1})\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} m(A_k),
\end{aligned}$$

sillä $A_k = \cup_{j=1}^k (A_j \setminus A_{j-1})$. □

Lause 2.5.2. Olkoon $(A_j)_{j\in\mathbf{N}}$ vähenevä jono (ts. $A_i \subset A_j$ kaikilla $i > j$) $\mathbf{R}^n$:n mitallisia joukkoja. Jos lisäksi $m(A_k) < +\infty$ jollakin $k \in \mathbf{N}$, niin

$$m\left(\bigcap_{j\in\mathbf{N}} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} m(A_j).$$

Todistus. Huomaa, että $\bigcap_{j\in\mathbf{N}} A_j$ on mitallinen. Voidaan olettaa, että $m(A_1) < +\infty$, sillä äärellisellä määrällä jonon alkupään termejä ei ole merkitystä väitteen kannalta. Merkitään

$$A := \bigcap_{j\in\mathbf{N}} A_j \quad \text{ja} \quad B_j := A_1 \setminus A_j.$$

Tällöin $(B_j)_{j\in\mathbf{N}}$ on kasvava jono mitallisia joukkoja, joten Lauseen 2.5.1 mukaan

$$m\left(\bigcup_{j\in\mathbf{N}} B_j\right) = \lim_{j\to\infty} m(B_j).$$

Esitetään joukko A_1 kahden joukon erillisenä yhdisteenä muodossa

$$A_1 = A_j \cup (A_1 \setminus A_j) \quad \text{ja} \quad A_1 = A \cup (A_1 \setminus A).$$

Mitan additiivisuuden perusteella saadaan yhtälöt

$$m(A_1) = m(A_j) + m(B_j) \quad \text{ja} \quad m(A_1) = m(A) + m(A_1 \setminus A).$$

Koska $m(A_1) < +\infty$, voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} m(A) &= m(A_1) - m(A_1 \setminus A) \\ &= m(A_1) - m\left(\bigcup_{j\in\mathbf{N}} B_j\right) \\ &= m(A_1) - \lim_{j\to\infty} m(B_j) \\ &= m(A_1) - \lim_{j\to\infty}(m(A_1) - m(A_j)) \\ &= \lim_{j\to\infty} m(A_j). \end{aligned}$$

□

Esimerkki. Ehto $m(A_k) < +\infty$ Lauseessa 2.5.2 on välttämätön. Esimerkiksi, jos valitaan

$$A_j = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > j \,\},$$

niin joukot A_j muodostavat vähenevän jonon, jolle $m_2(A_j) = +\infty$ kaikilla j, mutta $\cap_{j\in\mathbf{N}} A_j = \emptyset$, ja siis $m_2(\cap_{j\in\mathbf{N}} A_j) = 0$.

2.6 Mitalliset funktiot

Merkitään $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Määritelmä 2.6.1. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$. Kuvaus $f : A \to \mathbf{R}^m$ on *mitallinen*, jos $f^{-1}(U)$ on mitallinen kaikille avoimille joukoille $U \subset \mathbf{R}^m$. Edelleen, funktio $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ on mitallinen, jos se toteuttaa ehdot (1)–(3):

(1) $f^{-1}(U)$ on mitallinen kaikille avoimille joukoille $U \subset \mathbf{R}$;

(2) $f^{-1}(+\infty)$ on mitallinen;

(3) $f^{-1}(-\infty)$ on mitallinen.

Huomautus. Määritelmä 2.6.1 pitää sisällään oletuksen joukon A mitallisuudesta, sillä tapauksessa $f : A \to \mathbf{R}^m$ pätee

$$A = f^{-1}(\mathbf{R}^m)$$

ja tapauksessa $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ pätee

$$A = f^{-1}(\mathbf{R}) \cup f^{-1}(+\infty) \cup f^{-1}(-\infty).$$

Huomautus 2.6.2. Olkoon $G \subset \mathbf{R}^n$ avoin. Palautetaan mieleen, että kuvaus $f : G \to \mathbf{R}^m$ on *jatkuva pisteessä* $x \in G$ jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ aina kun $|x - y| < \delta$. Kuvaus $f : G \to \mathbf{R}^m$ on *jatkuva* jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in G$.

Tunnetusti kuvaus $f : G \to \mathbf{R}^m$ on jatkuva (tässä $G \subset \mathbf{R}^n$ on avoin) jos ja vain jos $f^{-1}(U)$ on avoin kaikille avoimille joukoille $U \subset \mathbf{R}^m$. Koska Borelin joukot ovat mitallisia, jatkuva kuvaus $f : G \to \mathbf{R}^m$ on mitallinen.

Yleisemmin pätee: Jos $A \subset \mathbf{R}^n$ on mielivaltainen joukko, niin kuvaus $f : A \to \mathbf{R}^m$ on jatkuva jos ja vain jos $f^{-1}(U)$ on A:n relatiivitopologiassa avoin kaikille avoimille joukoille $U \subset \mathbf{R}^m$. Joukko $V \subset A$ on A:n relatiivitopologiassa avoin jos ja vain jos $V = A \cap G$ jollekin avoimelle joukolle $G \subset \mathbf{R}^n$.

Lemma 2.6.3. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen ja kuvaus $f : A \to \mathbf{R}^m$ jatkuva. Tällöin f on mitallinen.

Todistus. Jos $f : A \to \mathbf{R}^m$ on jatkuva ($A \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen), niin (Huomautus 2.6.2) kaikille avoimille $U \subset \mathbf{R}^m$ pätee $f^{-1}(U) = A \cap G$, missä $G \subset \mathbf{R}^n$ on avoin. Tällöin $f^{-1}(U)$ on mitallisten joukkojen yhdisteenä mitallinen ja siis $f : A \to \mathbf{R}^m$ on mitallinen. $\square$

Lemma 2.6.4. Olkoon $f : A \to \mathbf{R}^m$ mitallinen, $A \subset \mathbf{R}^n$, ja olkoon $g : B \to \mathbf{R}^k$ jatkuva siten, että $f(A) \subset B \subset \mathbf{R}^m$. Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ f$ on mitallinen.

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Esimerkki. (a) Olkoon $f : A \to \mathbf{R}^m$ vakiofunktio mitallisessa joukossa $A \subset \mathbf{R}^n$, ts. $f(x) = c \in \mathbf{R}^m$ kaikilla $x \in A$. Tällöin f on mitallinen, sillä kaikilla avoimilla joukoilla $U \subset \mathbf{R}^m$

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} A, & \text{jos} \quad c \in U, \\ \emptyset, & \text{jos} \quad c \notin U. \end{cases}$$

Yhtä lailla vakiofunktiot $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallisessa joukossa $A \subset \mathbf{R}^n$ ovat mitallisia.

(b) Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ ja $\chi_E : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ joukon E *karakteristinen funktio*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad x \in E, \\ 0, & \text{kun} \quad x \notin E. \end{cases}$$

Väite: χ_E on mitallinen funktio jos ja vain jos E on mitallinen joukko.

Perustelu: Jos χ_E on mitallinen, niin $E = \chi_E^{-1}(]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[)$ on mitallinen.

Olkoon kääntäen E mitallinen ja $G \subset \mathbf{R}$ avoin. Tällöin

$$\chi_E^{-1}(G) = \begin{cases} \mathbf{R}^n, & \text{jos} \quad \{0,1\} \subset G, \\ \emptyset, & \text{jos} \quad \{0,1\} \cap G = \emptyset, \\ E, & \text{jos} \quad \{0,1\} \cap G = \{1\}, \\ E^c, & \text{jos} \quad \{0,1\} \cap G = \{0\}. \end{cases}$$

Koska kaikki mahdolliset alkukuvajoukot $\chi_E^{-1}(G)$ ovat mitallisia, χ_E on mitallinen funktio.

Esimerkiksi funktio $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad x \in \mathbf{Q}^n, \\ 0, & \text{kun} \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{Q}^n, \end{cases}$$

on mitallinen, sillä $\mathbf{Q}^n$ on numeroituva ja siten nollamittaisena mitallinen. Huomaa, että funktio f ei ole jatkuva yhdessäkään pisteessä.

Jatkossa tarkastellaan pääasiassa (laajennetusti) reaaliarvoisia funktioita. Näiden mitallisuus voidaan karakterisoida seuraavasti.

Lause 2.6.5. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen ja olkoon $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$. Tällöin ehdot (1)–(5) ovat ekvivalentteja:

(1) $\{ x \in A : f(x) > \alpha \}$ on mitallinen kaikille $\alpha \in \mathbf{R}$;

(2) $\{ x \in A : f(x) \geq \alpha \}$ on mitallinen kaikille $\alpha \in \mathbf{R}$;

(3) $\{ x \in A : f(x) < \alpha \}$ on mitallinen kaikille $\alpha \in \mathbf{R}$;

(4) $\{ x \in A : f(x) \leq \alpha \}$ on mitallinen kaikille $\alpha \in \mathbf{R}$;

(5) f on mitallinen.

Todistus. Todistetaan ensin implikaatioketju

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1).$$

(1) $\Rightarrow$ (2) : Olkoon (1) voimassa ja olkoon $\alpha \in \mathbf{R}$. Kirjoittamalla

$$\{ x \in A : f(x) \geq \alpha \} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{ x \in A : f(x) > \alpha - \tfrac{1}{i} \}$$

huomataan, että oikeanpuoleinen leikkaus on mitallisten joukkojen numeroituvana leikkauksena mitallinen. Siis (2) pätee.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Olkoon (2) voimassa ja olkoon $\alpha \in \mathbf{R}$. Kirjoittamalla

$$\{ x \in A : f(x) < \alpha \} = A \setminus \{ x \in A : f(x) \geq \alpha \}$$

huomataan, että oikeanpuoleinen joukko on mitallisen joukon komplementtina mitallinen. Siis (3) pätee.

Implikaatioiden (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) todistukset ovat analogisia edellä olevien kanssa.

Lopuksi todistetaan, että ehto (5) on ekvivalentti ehdon (1) kanssa.

Oletetaan, että (5) pätee, eli f on mitallinen. Olkoon $\alpha \in \mathbf{R}$. Tällöin

$$\{ x \in A : f(x) > \alpha \} = f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \cup f^{-1}(\infty)$$

on mitallinen, joten (1) pätee.

Oletetaan kääntäen, että (1) pätee. Tällöin myös ehdot (2), (3) ja (4) ovat voimassa todistuksen alkuosan nojalla. Olkoon $G \subset \mathbf{R}$ avoin. Tällöin $G = \cup_{j \in \mathbf{N}} I_j$, missä $I_j =]a_j, b_j[$ on avoin rajoitettu väli. Nimittäin jokaista $x \in G$ kohti löydetään avoimen joukon määritelmän nojalla x-keskinen rajoitettu avoin väli $I_x \subset G$, jolloin

$$G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subset \bigcup_{x \in G} \{I_x\} \subset G.$$

Siis $(I_x)_{x\in G}$ on joukon G avoin peite ja Lindelöfin lauseen nojalla voidaan poimia numeroituva osapeite $(I_j)_{j\in\mathbf{N}}$. Nyt

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{j\in\mathbf{N}} f^{-1}(I_j),$$

missä

$$f^{-1}(I_j) = \{\, x\in A : a_j < f(x) < b_j \,\} = \{\, x\in A : a_j < f(x) \,\} \cap \{\, x\in A : f(x) < b_j \,\}$$

on mitallinen mitallisten joukkojen leikkauksena (ehdot (1) ja (3)). Siispä $f^{-1}(G)$ on mitallinen mitallisten joukkojen numeroituvana yhdisteenä. Toisaalta

$$f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{j\in\mathbf{N}} \{\, x\in A : f(x) > j \,\} \quad \text{ja} \quad f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{j\in\mathbf{N}} \{\, x\in A : f(x) < -j \,\}$$

ovat mitallisia. Yhdistämällä ehdot todetaan, että f on mitallinen. $\square$

Esimerkki. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen. Osoitetaan, että f^2 on mitallinen. Olkoon $\alpha \in \mathbf{R}$. Jos $\alpha \geq 0$, niin

$$\{\, x\in A : f^2(x) > \alpha \,\} = \{\, x\in A : f(x) > \sqrt{\alpha} \,\} \cup \{\, x\in A : f(x) < -\sqrt{\alpha} \,\}.$$

Koska oikeanpuolen joukot ovat mitallisia Lauseen 2.6.5 nojalla, myös vasemmanpuolen joukko on mitallinen. Toisaalta, jos $\alpha < 0$, niin

$$\{\, x\in A : f^2(x) > \alpha \,\} = A$$

ja siis mitallinen. Lauseen 2.6.5 mukaan f^2 on mitallinen.

Lause 2.6.6. Olkoot $f, g : A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallisia ja $c \in \mathbf{R}$. Tällöin $f+g$, fg, cf ja $f-g$ ovat mitallisia.

Todistus. Todistetaan väitteet yksinkertaisuuden vuoksi vain kuvauksille $f, g : A \to \mathbf{R}$. Osoitetaan ensin, että cf on mitallinen kaikilla $c \in \mathbf{R}$. Olkoon $\alpha \in \mathbf{R}$. Jos $c = 0$, niin cf on vakiofunktiona mitallinen. Jos taas $c \neq 0$, niin kaikilla $\alpha \in \mathbf{R}$ pätee

$$\{\, x\in A : cf(x) < \alpha \,\} = \begin{cases} \{\, x\in A : f(x) < \frac{\alpha}{c} \,\}, & \text{jos} \quad c > 0, \\ \{\, x\in A : f(x) > \frac{\alpha}{c} \,\}, & \text{jos} \quad c < 0. \end{cases}$$

Koska oikeanpuolen joukot ovat Lauseen 2.6.5 ja f:n mitallisuuden nojalla mitallisia, funktio cf on Lauseen 2.6.5 nojalla mitallinen.

Funktion $f+g$ mitallisuuden toteamiseksi olkoon $\alpha \in \mathbf{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \{\, x\in A : f(x)+g(x) < \alpha \,\} &= \{\, x\in A : f(x) < \alpha - g(x) \,\} \\ &= \bigcup_{r\in\mathbf{Q}} \{\, x\in A : f(x) < r \,\} \cap \{\, x\in A : \alpha - g(x) > r \,\}. \end{aligned}$$

Koska oikeanpuolen joukot ovat mitallisia Lauseen 2.6.5 nojalla, myös vasen puoli on mitallinen. Lauseen 2.6.5 mukaan $f+g$ on mitallinen.

Funktion $f-g$ mitallisuus seuraa edelläolevasta, sillä valitsemalla $c = -1$ havaitaan $-g$ mitalliseksi ja $f - g = f + (-g)$ on mitallisten summana mitallinen.

Lopuksi funktion fg mitallisuus seuraa yhtälöstä

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right),$$

sillä f^2 on mitallinen edellisen esimerkin nojalla. $\square$

Limes superior ja limes inferior

Huomautus 2.6.7. Olkoon $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ lukujono laajennetussa reaalilukujoukossa $\overline{\mathbf{R}}$. Merkitään

$$b_k = \sup\{\, a_i : i \geq k \,\}, \quad c_k = \inf\{\, a_i : i \geq k \,\}$$

kaikilla $k \in \mathbf{N}$. Koska

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots$$

ja

$$c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \cdots ,$$

so. jono (b_k) on vähenevä ja jono (c_k) on kasvava, Lauseen 1.2.6 nojalla on olemassa reaaliset tai äärettömät raja-arvot

$$\beta := \lim_{k\to\infty} b_k = \inf_{k\in\mathbf{N}} b_k$$

ja

$$\gamma := \lim_{k\to\infty} c_k = \sup_{k\in\mathbf{N}} c_k.$$

Merkitään

$$\beta = \limsup_{i\to\infty} a_i \quad \text{(yläraja-arvo eli } \textit{limes superior}\text{)}$$

ja

$$\gamma = \liminf_{i\to\infty} a_i \quad \text{(alaraja-arvo eli } \textit{limes inferior}\text{)}.$$

Esimerkki. (a) Olkoon (a_i) vuorotteleva lukujono $a_i = (-1)^i$, ts. jono $-1, 1, -1, 1, \ldots$. Tällöin $b_k = 1$ ja $c_k = -1$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$. Näin ollen

$$\beta = \limsup_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty} b_k = 1 \quad \text{ja} \quad \gamma = \liminf_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty} c_k = -1.$$

(b) Olkoon (a_i) lukujono $1, 2, 3, 4, \ldots$. Tällöin $b_k = \infty$ ja $c_k = k$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$. Näin ollen

$$\beta = \limsup_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty} b_k = \infty \quad \text{ja} \quad \gamma = \liminf_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty} c_k = \infty.$$

Lemma 2.6.8. Olkoon $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ lukujono joukossa $\overline{\mathbf{R}}$. Tällöin

(1) $\liminf_{i\to\infty} a_i \leq \limsup_{i\to\infty} a_i$;

(2) Jos $a_i \leq M$ kaikille $i \geq i_0$ jollekin $M \in \overline{\mathbf{R}}$, niin $\limsup_{i\to\infty} a_i \leq M$;

(3) Jos $a_i \geq m$ kaikille $i \geq i_0$ jollekin $m \in \overline{\mathbf{R}}$, niin $\liminf_{i\to\infty} a_i \geq m$.

Todistus. Todistukset perustuvat *epäyhtälön säilymiseen raja-arvoissa*: Jos $a_i \leq b_i$ kaikilla $i \geq i_0$, niin $\lim_{i\to\infty} a_i \leq \lim_{i\to\infty} b_i$ jos raja-arvot ovat olemassa äärellisenä tai äärettömänä.

Epäyhtälön säilymisperiaatteen perustelu lyhyesti: Jos tehdään antiteesi $a := \lim_{i\to\infty} a_i > \lim_{i\to\infty} b_i =: b$, niin raja-arvon määritelmää käyttäen löydetään kaikissa tapauksissa indeksi $i_1 \geq i_0$, jolle $a_i > b_i$ kaikilla $i \geq i_1$. Ristiriita.

(1) Koska
$$b_k = \sup\{\, a_i : i \geq k \,\}, \quad c_k = \inf\{\, a_i : i \geq k \,\},$$
niin kaikilla k pätee $b_k \geq c_k$. Ey:n säilymisen seurauksena
$$\beta = \lim_{k\to\infty} b_k \geq \lim_{k\to\infty} c_k = \gamma.$$

(2) Jos $a_i \leq M$ kaikilla $i \geq i_0$, niin $b_k = \sup\{\, a_i : i \geq k \,\} \leq M$ kaikilla $k \geq i_0$. Ey:n säilymisen seurauksena $\beta = \lim_{k\to\infty} b_k \leq M$.

(3) Jos $a_i \geq m$ kaikilla $i \geq i_0$, niin $c_k = \inf\{\, a_i : i \geq k \,\} \geq m$ kaikilla $k \geq i_0$. Ey:n säilymisen seurauksena $\gamma = \lim_{k\to\infty} c_k \geq m$. $\square$

Seuraava lause kertoo ylä- ja alaraja-arvojen yhteyden raja-arvoon.

Lause 2.6.9. Olkoon $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ lukujono joukossa $\overline{\mathbf{R}}$. Tällöin raja-arvo $\lim_{i\to\infty} a_i \in \overline{\mathbf{R}}$ on olemassa jos ja vain jos $\liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i$. Tässä tapauksessa
$$\lim_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i.$$

Todistus. Oletetaan, että on olemassa $a := \lim_{i\to\infty} a_i$. Oletetaan ensin, että $a \in \mathbf{R}$. Tällöin kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa i_0 siten, että $a - \varepsilon < a_i < a + \varepsilon$ kaikilla $i \geq i_0$. Näin ollen
$$a - \varepsilon \leq c_{i_0} \leq \gamma \leq \beta \leq b_{i_0} \leq a + \varepsilon.$$
Koska tämä pätee kaikilla $\varepsilon > 0$, on välttämättä $\gamma = \beta = a$.

Olkoon seuraavaksi $a = \infty$. Tällöin kaikilla $M > 0$ on olemassa i_0 siten, että $a_i > M$ kun $i \geq i_0$. Lemman 2.6.8 (3) mukaan $M \leq \liminf_{i\to\infty} a_i \leq \limsup_{i\to\infty} a_i$. Koska $M > 0$ on mielivaltainen, on $\gamma = \beta = \infty$. Tapaus $a = -\infty$ käsitellään vastaavasti.

Käänteinen väite harjoitustehtävä. $\square$

Integroimisteorian konvergenssituloksien kannalta on tarpeellista tietää, että mitallisten funktioiden rajafunktiot ovat mitallisia:

Lause 2.6.10. Olkoot funktiot $f_j : A \to \mathbf{R}$ mitallisia, missä $j \in \mathbf{N}$ ja $A \subset \mathbf{R}^n$. Tällöin funktiot
$$\sup_{j\in\mathbf{N}} f_j, \quad \inf_{j\in\mathbf{N}} f_j, \quad \limsup_{j\to\infty} f_j, \quad \liminf_{j\to\infty} f_j$$
ovat mitallisia. Erityisesti, jos rajafunktio $f = \lim_{j\to\infty} f_j$ on olemassa, se on mitallinen.

Todistus. Olkoon $g(x) = \sup_{j\in\mathbf{N}} f_j(x)$, missä $x \in A$. Tällöin kaikilla $\alpha \in \mathbf{R}$ pätee
$$\{\, x \in A : g(x) > \alpha \,\} = \bigcup_{j\in\mathbf{N}} \{\, x \in A : f_j(x) > \alpha \,\}. \tag{2}$$

Perustelu: Jos $g(x) = \sup\{\, f_j(x) : j \in \mathbf{N} \,\} > \alpha$, niin jollekin j pätee $f_j(x) > \alpha$. Kääntäen, jos $f_j(x) > \alpha$ jollekin j, niin $g(x) \geq f_j(x) > \alpha$.

Yhtälössä (2) oikeanpuoleinen joukko on mitallisten joukkojen yhdisteenä mitallinen, joten g on mitallinen (Lause 2.6.5).

Funktion $\inf_{j\in\mathbf{N}} f_j(x)$ mitallisuus päätellään vastaavasti tai vaihtoehtoisesti yhtälöstä

$$\inf_{j\in\mathbf{N}} f_j = -\sup_{j\in\mathbf{N}}(-f_j).$$

Funktiot

$$g_k = \sup_{j\geq k} f_j \quad \text{ja} \quad h_k = \inf_{j\geq k} f_j$$

ovat alkuosan nojalla mitallisia kaikilla $k \in \mathbf{N}$ ja siten edelleen funktiot

$$\limsup_{j\to\infty} f_j = \inf_{k\in\mathbf{N}}(\sup_{j\geq k} f_j) = \inf_{k\in\mathbf{N}} g_k$$

ja

$$\liminf_{j\to\infty} f_j = \sup_{k\in\mathbf{N}}(\inf_{j\geq k} f_j) = \sup_{k\in\mathbf{N}} h_k$$

ovat mitallisia. $\square$

Huomautus 2.6.11. (a) Lauseessa 2.6.10 funktiot $\sup_{j\in\mathbf{N}} f_j$, $\liminf_{j\to\infty} f_j$ etc. määritellään pisteittäin, ts.

$$(\sup_{j\in\mathbf{N}} f_j)(x) := \sup_{j\in\mathbf{N}} f_j(x)$$

ja

$$(\liminf_{j\to\infty} f_j)(x) := \liminf_{j\to\infty} f_j(x)$$

kaikilla $x \in A$.

(b) Lause 2.6.10 sanoo erityisesti sen, että $\max(f_1, \ldots, f_k)$ ja $\min(f_1, \ldots, f_k)$ ovat mitallisia jos $f_i : A \to \overline{\mathbf{R}}$ on mitallinen kun $i = 1, \ldots, k$.

Esimerkki. Olkoon $I \subset \mathbf{R}$ avoin väli ja $f : I \to \mathbf{R}$ funktio, jolla on olemassa derivaatta $f'(x)$ kaikilla $x \in I$. Tällöin f' on mitallinen.

Perustelu: Olkoon $g_n : I \to \mathbf{R}$ funktio

$$g_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}},$$

jolloin $f'(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ kaikilla $x \in I$. Koska f on derivoituva, se on jatkuva ja siis mitallinen. Koska kuvaus

$$x \mapsto x + \frac{1}{n} \mapsto f(x+\tfrac{1}{n})$$

on kahden jatkuvan funktion yhdistettynä funktiona mitallinen (Lemma 2.6.4), on g_n mitallinen Lauseen 2.6.6 mukaan. Siis f' on mitallinen Lauseen 2.6.10 mukaan.

Sanonta. Sanomme, että ominaisuus pätee *melkein kaikkialla* (lyhyesti m.k.) jos se pätee nollamittaisen joukon ulkopuolella.

Esimerkiksi, funktio $f : \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$,

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{kun} \quad x \in \mathbf{Q}^n, \\ x, & \text{kun} \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{Q}^n \end{cases}$$

on äärellinen melkein kaikkialla (joukossa $\mathbf{R}^n$), sillä $m(\{ x \in \mathbf{R}^n : f(x) = \pm\infty \}) = 0$.

Nollamittaiset joukot ovat integrointiteoriassa monessa mielessä merkityksettömiä. Ensimmäisenä esimerkkinä tästä todistetaan lause, jonka mukaan mitallista funktiota voidaan nollamittaisessa joukossa muuttaa mielivaltaisesti mitallisuutta menettämättä.

Lause 2.6.12. Olkoot $f, g : A \to \overline{\mathbf{R}}$ funktioita siten, että $f = g$ m.k. joukossa $A \subset \mathbf{R}^n$. Tällöin g on mitallinen jos f on mitallinen.

Todistus. Olkoon f mitallinen ja $A_0 := \{ x \in A : f(x) \neq g(x) \}$. Oletuksen mukaan $m(A_0) = 0$. Olkoon $\alpha \in \mathbf{R}$ ja merkitään

$$E_\alpha = \{ x \in A : f(x) < \alpha \}, \quad F_\alpha = \{ x \in A : g(x) < \alpha \}.$$

Riittää osoittaa, että F_α on mitallinen. Nyt

$$F_\alpha = (F_\alpha \cap A_0) \cup (F_\alpha \setminus A_0).$$

Tässä $m^*(F_\alpha \cap A_0) \leq m^*(A_0) = 0$, joten $F_\alpha \cap A_0$ on mitallinen. Toisaalta

$$F_\alpha \setminus A_0 = E_\alpha \setminus A_0$$

on mitallinen, sillä E_α ja A_0 ovat mitallisia oletusten perusteella. Väite seuraa. $\square$

3 Lebesguen integraali

3.1 Yksinkertaiset funktiot

Määritelmä 3.1.1. Funktio $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ on *yksinkertainen*, jos

(1) f on mitallinen;

(2) f on ei-negatiivinen ($f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$);

(3) f saa vain äärellisen monta arvoa.

Merkitään $\mathcal{Y} := \{f \mid f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_+ \text{ yksinkertainen}\}$.

Huomautus 3.1.2. Jos $f, g \in \mathcal{Y}$, niin $f + g, fg \in \mathcal{Y}$. Nimittäin $f + g$ ja fg ovat reaaliarvoisia, ei-negatiivisia, mitallisia (Lause 2.6.6) ja ne saavat vain äärellisen määrän eri arvoja.

Nimitys. Joukot $E_1, \ldots, E_k$ muodostavat joukon $E \subset \mathbf{R}^n$ *osituksen*, jos joukot E_i ovat pareittain pistevieraita ja $E = \cup_{i=1}^k E_i$.

Olkoon $f \in \mathcal{Y}$ ja olkoot $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{R}$ funktion f saamat eri arvot. Tällöin joukot $A_i := f^{-1}(a_i)$ ovat mitallisia (ks. harjoitustehtävä) ja ne muodostavat avaruuden $\mathbf{R}^n$ osituksen. Edelleen pätee

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}. \quad (*)$$

Kääntäen jokainen muotoa $(*)$ oleva funktio f, missä A_i:t muodostavat $\mathbf{R}^n$:n osituksen, on yksinkertainen.

Määritelmä 3.1.3. Olkoon $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i} \in \mathcal{Y}$, missä joukot A_i muodostavat $\mathbf{R}^n$:n osituksen ja $a_i \in \mathbf{R}_+$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Tällöin funktion f *integraali (yli joukon $\mathbf{R}^n$)* on luku

$$\int f \, dm = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i).$$

Huomautus Määritelmässä sovelletaan sääntöä $0 \cdot \infty = 0$ mikäli $a_i = 0$ ja $m(A_i) = \infty$. Huomaa, että $\int f \, dm = \infty$ jos $a_i > 0$ ja $m(A_i) = \infty$ jollekin i.

Esimerkki. Funktio $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad x \in \mathbf{Q}^n, \\ 0, & \text{kun} \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{Q}^n, \end{cases}$$

on yksinkertainen, sillä $\mathbf{Q}^n$ on numeroituvana mitallinen.

Yleisesti χ_E on yksinkertainen jos $E \subset \mathbf{R}^n$ on mitallinen. Esityksestä

$$\chi_E = 1 \cdot \chi_E + 0 \cdot \chi_{\mathbf{R}^n \setminus E}$$

saadaan

$$\int \chi_E \, dm = 1 \cdot m(E) + 0 \cdot m(\mathbf{R}^n \setminus E) = m(E).$$

Huomautus 3.1.4. Osoitetaan, että yksinkertaisen funktion f integraali ei riipu f:n esityksestä. Olkoon

$$f = \sum_{i=1}^{l} a_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j},$$

missä $a_i, b_j \in \mathbf{R}_+$, joukot A_i muodostavat $\mathbf{R}^n$:n osituksen ja joukot B_j muodostavat $\mathbf{R}^n$:n osituksen. Huomaa, että tällainen f:n esitys ei ole yksikäsitteinen!

Kaikilla i voidaan muodostaa joukon A_i ositus

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)$$

ja lisäksi $a_i \chi_{A_i}(x) = b_j \chi_{B_j}(x)$ aina kun $x \in A_i \cap B_j$. Siis $a_i = b_j$ mikäli $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Mitan additiivisuuden (ks. Lause 2.4.8) perusteella

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{l} a_i m(A_i) &= \sum_{i=1}^{l} a_i \sum_{j=1}^{m} m(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} a_i m(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} a_i m(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} b_j m(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{l} m(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} b_j m(B_j).\end{aligned}$$

Tässä viimeinen yhtäsuuruus seuraa mitan additiivisuudesta, sillä $B_j = \cup_{i=1}^{l} (A_i \cap B_j)$ on pistevieras yhdiste. Siis integraalin arvo ei riipu valitusta esityksestä.

Määritelmä 3.1.5. Olkoon $f \in \mathcal{Y}$. Tällöin funktion f *integraali yli mitallisen joukon* $E \subset \mathbf{R}^n$ on luku

$$\int_E f \, dm = \int f \chi_E \, dm.$$

Lemma 3.1.6. Olkoon $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} \in \mathcal{Y}$, missä joukot A_i muodostavat $\mathbf{R}^n$:n osituksen ja $a_i \in \mathbf{R}_+$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Tällöin kaikille mitallisille joukoille $E \subset \mathbf{R}^n$ pätee

$$\int_E f \, dm = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i \cap E).$$

Todistus. Suoralla laskulla saadaan

$$f \chi_E = \chi_E \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} \chi_E = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i \cap E}.$$

Merkitsemällä $A_i' = A_i \cap E$ ja $a_i' = a_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$ sekä lisäämällä indeksi $k+1$, jolle $a_{k+1}' = 0$ ja $A_{k+1}' = \mathbf{R}^n \setminus E$ saadaan esitys

$$f \chi_E = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i \cap E} = \sum_{i=1}^{k+1} a_i' \chi_{A_i'},$$

missä summaus ymmärretään yli epätyhjien joukkojen A_i'. Tällöin oikealla puolella joukot A_i' muodostavat $\mathbf{R}^n$:n osituksen, joten

$$\int_E f\,dm = \int f\chi_E\,dm = \sum_{i=1}^{k+1} a_i' m(A_i') = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i \cap E).$$

Tässä käytettiin hyväksi tietoa $a_{k+1}' m(A_{k+1}') = 0$. $\square$

Esimerkki. Olkoon $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ suljetulla välillä jatkuva funktio. Muodostetaan välin $[a,b]$ jako $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$ osaväleihin, joita on k kappaletta. Riemannin integraalin määritelmässä lukua $\int_a^b f(x)\,dx$ approksimoidaan alasummilla

$$\sum_{i=1}^{k} \min f([x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Nämä voidaan tulkita yksinkertaisen funktion integraaleiksi, sillä jatkuvuuden seurauksena alasumma voidaan kirjoittaa esimerkiksi muodossa

$$\sum_{i=1}^{k} \min f([x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k} \inf f([x_{i-1}, x_i[) \cdot (x_i - x_{i-1}) + f(b) \cdot 0,$$

jolloin oikealla puolella esiintyy Lemman 3.1.6 mukainen yksinkertaisen funktion integraali.

Seuraavassa integraalin keskeiset ominaisuudet (additiivisuus, lineaarisuus ja monotonisuus) todistetaan ensin yksinkertaisille funktioille.

Lemma 3.1.7. Olkoot $E_j \subset \mathbf{R}^n$, $j \in \mathbf{N}$, mitallisia ja pareittain pistevieraita. Tällöin kaikilla $f \in \mathcal{Y}$ pätee

$$\int_{\cup_{j\in\mathbf{N}} E_j} f\,dm = \sum_{j\in\mathbf{N}} \int_{E_j} f\,dm.$$

Todistus. Olkoon $E = \cup_{j\in\mathbf{N}} E_j$ ja olkoon

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i},$$

missä $a_i \in \mathbf{R}_+$ ja joukot A_i muodostavat $\mathbf{R}^n$:n osituksen. Lemman 3.1.6 mukaan

$$\int_E f\,dm = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i \cap E).$$

Koska

$$A_i \cap E = \bigcup_{j\in\mathbf{N}} (A_i \cap E_j)$$

ja oikealla puolella yhdiste on pareittain pistevieras, mitan numeroituvasta additiivisuudesta seuraa (ks. Lause 2.4.8), että

$$m(A_i \cap E) = \sum_{j\in\mathbf{N}} m(A_i \cap E_j), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Näin ollen

$$\int_E f\,dm = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^k a_i \sum_{j\in\mathbf{N}} m(A_i \cap E_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j\in\mathbf{N}} a_i m(A_i \cap E_j)$$
$$= \sum_{j\in\mathbf{N}} \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E_j) = \sum_{j\in\mathbf{N}} \int_{E_j} f\,dm$$

Lemman 2.3.3 nojalla. $\square$

Lemma 3.1.8. Olkoot $f, g \in \mathcal{Y}$ ja $E \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen. Tällöin

(1) $\int_E (f+g)\,dm = \int_E f\,dm + \int_E g\,dm$;

(2) $\int_E \alpha f\,dm = \alpha \int_E f\,dm$ kaikilla $\alpha \in \mathbf{R}_+$.

Todistus. (1) Olkoon aluksi $E = \mathbf{R}^n$. Merkitään

$$f = \sum_{i=1}^l a_i \chi_{A_i} \quad \text{ja} \quad g = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j},$$

missä $a_i, b_j \in \mathbf{R}_+$, joukot A_i muodostavat $\mathbf{R}^n$:n osituksen ja joukot B_j muodostavat $\mathbf{R}^n$:n osituksen. Muodostamalla ositus joukoilla $A_i \cap B_j$ yli indeksien i ja j saadaan summalle esitys

$$f + g = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m (a_i + b_j)\chi_{A_i \cap B_j}.$$

Näin ollen

$$\int (f+g)\,dm = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m (a_i + b_j) m(A_i \cap B_j)$$
$$= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m a_i m(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l b_j m(A_i \cap B_j)$$
$$= \sum_{i=1}^l a_i \sum_{j=1}^m m(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m b_j \sum_{i=1}^l m(A_i \cap B_j)$$
$$= \sum_{i=1}^m a_i m(A_i) + \sum_{j=1}^m b_j m(B_j) = \int f\,dm + \int g\,dm.$$

Tässä toiseksi viimeinen yhtälö perustuu mitan additiivisuuteen sillä $A_i = \cup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$ ja $B_j = \cup_{i=1}^l (A_i \cap B_j)$ (erilliset yhdisteet).

Jos $E \subset \mathbf{R}^n$ on mielivaltainen mitallinen, niin alkuosan nojalla

$$\int_E (f+g)\,dm = \int (f+g)\chi_E\,dm = \int (f\chi_E + g\chi_E)\,dm$$
$$= \int f\chi_E\,dm + \int g\chi_E\,dm = \int_E f\,dm + \int_E g\,dm.$$

(2) Harjoitustehtävä. $\square$

Merkintä. Jatkossa merkitään esimerkiksi $f \leq g$ (vast. $f \leq g$ m.k.) jos funktiot ovat määriteltyjä samassa joukossa ja kaikille (vast. melkein kaikille) määrittelyjoukon pisteille x pätee $f(x) \leq g(x)$.

Lemma 3.1.9. Olkoot $f, g \in \mathcal{Y}$ ja olkoot $E, F \subset \mathbf{R}^n$ mitallisia. Tällöin

(1) $\int_E f\,dm \leq \int_E g\,dm$ aina kun $f \leq g$ joukossa E;

(2) $\int_E f\,dm \leq \int_F f\,dm$ aina kun $E \subset F$;

(3) $\int_E f\,dm = 0$ aina kun $m(E) = 0$.

Todistus. (1) Kirjoittamalla $g = f + (g - f)$ saadaan (koska $g - f \in \mathcal{Y}$ ja yksinkertaisen funktion integraali on ei-negatiivinen) Lemman 3.1.8 nojalla

$$\int_E g\,dm = \int_E f + (g - f)\,dm = \int_E f\,dm + \int_E (g - f) \geq \int_E f\,dm.$$

(2) Koska $E \subset F$, niin $\chi_E \leq \chi_F$, ja edelleen $f\chi_E \leq f\chi_F$. Kohdan (1) nojalla

$$\int_E f\,dm = \int f\chi_E\,dm \leq \int f\chi_F\,dm = \int_F f\,dm.$$

(3) Olkoon

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i},$$

missä $a_i \in \mathbf{R}_+$ ja joukot A_i muodostavat $\mathbf{R}^n$:n osituksen. Lemman 3.1.6 nojalla

$$\int_E f\,dm = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i \cap E) = 0,$$

sillä $A_i \cap E \subset E$ ja $m(E) = 0$. $\square$

3.2 Ei-negatiivisen funktion integraali

Seuraavaksi yleistämme integraalin määritelmän kaikille mitallisille funktioille. Tarkastellaan ensin ei-negatiivisia funktioita.

Määritelmä 3.2.1. Jos funktio $f : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ on mitallinen, sen integraali määritellään lukuna

$$\int f\,dm = \sup\left\{ \int \phi\,dm \mid \phi \in \mathcal{Y} \text{ ja } \phi \leq f \right\}.$$

Mitallisen funktion $f : E \to [0, +\infty]$ *integraali yli mitallisen joukon* $E \subset \mathbf{R}^n$ määritellään lukuna

$$\int_E f\,dm = \int f\chi_E\,dm.$$

Tässä ja jatkossa aina $f\chi_E$ on funktion f *nollajatko*, ts. f:n arvoiksi joukossa $\mathbf{R}^n \setminus E$ asetetaan 0. Mitallista funktiota $f : E \to [0, +\infty]$ sanotaan *integroituvaksi joukossa* $E \subset \mathbf{R}^n$, jos

$$\int_E f\, dm < \infty.$$

Huomautus. (a) On helppo osoittaa, että nollajatko $f\chi_E : \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ on mitallinen, jos $E \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : E \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen (harjoitustehtävä).

(b) Integraali $\int_E f\, dm \in [0, +\infty]$ on siis olemassa jokaiselle mitalliselle funktiolle $f : E \to [0, +\infty]$, missä $E \subset \mathbf{R}^n$.

Sopimus. Jatkossa puhuttaessa integraalista (tai integroituvuudesta) oletetaan ilman mainintaa, että tarkasteltavat joukot ja funktiot ovat mitallisia.

Lemma 3.2.2. Olkoon $f : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ mitallinen. Tällöin on olemassa kasvava jono $(\phi_i)_{i\in\mathbf{N}}$ yksinkertaisia funktioita siten, että $f = \lim_{i\to\infty} \phi_i$.

Todistus. Määritellään funktiot $\phi_j : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ seuraavasti: Jaetaan $[0, j)$ erillisiin puoliavoimiin väleihin

$$I_i = [(i-1)2^{-j}, i2^{-j}), \quad i = 1, \ldots, j2^j,$$

ja määritellään

$$\phi_j(x) = \begin{cases} (i-1)2^{-j}, & \text{kun} \quad x \in f^{-1}(I_i), \\ j, & \text{kun} \quad x \in f^{-1}([j, +\infty]). \end{cases}$$

Tällöin $\phi_j \in \mathcal{Y}$, jono (ϕ_j) on kasvava ja $f(x) = \lim_{j\to\infty} \phi_j(x)$, ks. Ilkka Holopainen: Mitta ja integraali, Helsingin yliopisto (2002), s.48. $\square$

Sopimus. Ellei erikseen muuta mainita, merkintä $f := \lim_{j\to\infty} f_j$ tarkoittaa aina pisteittäistä rajafunktiota, so. $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ kaikille määrittelyjoukon pisteille x.

Lause 3.2.3. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen ja olkoot $f, g : E \to [0, +\infty]$ mitallisia. Tällöin

(1) $\int_E f\, dm \le \int_E g\, dm$ aina kun $f \le g$ joukossa E;

(2) $\int_{E'} f\, dm \le \int_E f\, dm$ aina kun $E' \subset E$ on mitallinen;

(3) $\int_E f\, dm = 0$ aina kun $m(E) = 0$;

(4) $\int_E af\, dm = a \int_E f\, dm$ kaikilla $a \in \mathbf{R}_+$.

Todistus. (1) Olkoon aluksi $E = \mathbf{R}^n$ ja $\phi \in \mathcal{Y}$, $\phi \le f$. Tällöin $\phi \le g$ oletuksen seurauksena, joten

$$\int \phi\, dm \le \int g\, dm,$$

sillä kaikki $\int f\, dm$:n "testifunktiot"ovat $\int g\, dm$:n "testifunktioita". Koska

$$\int f\, dm = \sup\left\{ \int \phi\, dm \mid \phi \in \mathcal{Y} \text{ ja } \phi \le f \right\},$$

supremumin määritelmästä seuraa, että $\int f\,dm \leq \int g\,dm$.

Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ mielivaltainen. Koska $f\chi_E \leq g\chi_E$ joukossa $\mathbf{R}^n$, niin alkuosan nojalla

$$\int_E f\,dm = \int f\chi_E\,dm \leq \int g\chi_E\,dm = \int_E g\,dm.$$

(2) Jos $E' \subset E$, niin $f\chi_{E'} \leq f\chi_E$ ja siten kohdan (1) nojalla

$$\int_{E'} f\,dm = \int f\chi_{E'}\,dm \leq \int f\chi_E\,dm = \int_E f\,dm.$$

(3) Olkoon $\phi \in \mathcal{Y}$, $\phi \leq f\chi_E$. Tällöin $\phi = 0$ joukossa $\mathbf{R}^n \setminus E$, joten $\phi = \phi\chi_E$. Lemman 3.1.9 (3) nojalla

$$\int \phi\,dm = \int \phi\chi_E\,dm = \int_E \phi\,dm = 0.$$

Näin ollen

$$\int_E f = \sup\left\{ \int \phi\,dm \mid \phi \in \mathcal{Y} \text{ ja } \phi \leq f\chi_E \right\} = \sup\{\,0\,\} = 0.$$

(4) Jos $a = 0$, väite pätee koska kummatkin puolet ovat $= 0$. Olkoon $a > 0$, $\phi \in \mathcal{Y}$, $\phi \leq f\chi_E$. Tällöin $a\phi \leq af\chi_E$ ja $a\phi \in \mathcal{Y}$, joten (Lemma 3.1.8 (2))

$$\int_E af\,dm \geq \int a\phi\,dm = a\int \phi\,dm.$$

Supremumin määritelmän nojalla

$$\frac{1}{a}\int_E af\,dm \geq \int_E f\,dm \quad \text{eli} \quad a\int_E f\,dm \leq \int_E af\,dm.$$

Toisaalta $f = \dfrac{1}{a}(af)$, joten alkuosan nojalla

$$\int_E f = \int_E \frac{1}{a}(af)\,dm \geq \frac{1}{a}\int_E af\,dm.$$

Näin ollen $\int_E af\,dm \leq a\int_E f\,dm$. $\square$

Lebesguen integroimisteorian toimivuus kiteytyy tyylikkäissä konvergenssilauseissa. Ensimmäisenä konvergenssilauseena todistetaan monotonisen konvergenssin lause.

Lause 3.2.4 (Monotonisen konvergenssin lause)**.** Olkoon $f_i : E \to [0, +\infty]$ kasvava jono mitallisia funktioita (ts. $f_i \leq f_{i+1}$ kaikilla $i \in \mathbf{N}$) joukossa $E \subset \mathbf{R}^n$. Tällöin

$$\lim_{i\to\infty} \int_E f_i\,dm = \int_E \lim_{i\to\infty} f_i\,dm.$$

Lauseen 3.2.4 todistamiseksi tarvitaan seuraava yksinkertaisia funktioita koskeva aputulos:

Lemma 3.2.5. Olkoon $f \in \mathcal{Y}$ ja olkoon $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \mathbf{R}^n$ kasvava jono mitallisia joukkoja. Tällöin

$$\int_{\cup_{i\in\mathbf{N}} E_i} f\,dm = \lim_{i\to\infty} \int_{E_i} f\,dm.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Todistus. (Lause 3.2.4) Koska $f_i \le f_{i+1}$, niin (Lause 3.2.3 (1)) $\int_E f_i\,dm \le \int_E f_{i+1}\,dm$ kaikilla $i \in \mathbf{N}$. Näin ollen raja-arvo

$$a := \lim_{i\to\infty} \int_E f_i\,dm \in [0, +\infty]$$

on olemassa (Lause 1.2.6). Samoin on olemassa mitallinen raja-funktio $f := \lim_{i\to\infty} f_i$ (Lause 2.6.10). Koska $f_i \le f$, niin $\int_E f_i\,dm \le \int_E f\,dm$, ja siten

$$a \le \int_E f\,dm.$$

Osoitetaan, että $\int_E f\,dm \le a$. Korvaamalla f, f_i funktioilla $f\chi_E, f_i\chi_E$ voidaan olettaa, että $E = \mathbf{R}^n$. Olkoon $0 < b < 1$ ja $\phi \in \mathcal{Y}$, $\phi \le f$. Merkitään

$$E_i = \{\, x \in \mathbf{R}^n : f_i(x) \ge b\phi(x) \,\} = \{\, x \in \mathbf{R}^n : f_i(x) - b\phi(x) \ge 0 \,\}.$$

Joukko E_i on mitallinen Lauseen 2.6.5 nojalla. Toisaalta $E_i \subset E_{i+1}$, sillä $f_i(x) \le f_{i+1}(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$.

Osoitetaan, että

$$\mathbf{R}^n = \cup_{i=1}^{\infty} E_i. \quad (*)$$

Olkoon $x \in \mathbf{R}^n$. Jos $\phi(x) = 0$, niin $x \in E_1$. Voidaan siis olettaa, että $\phi(x) > 0$. Tällöin $b\phi < \phi(x) \le f(x)$, sillä $\phi(x) < \infty$. Raja-arvon määritelmästä seuraa, että jollekin $i_b \in \mathbf{N}$ pätee $b\phi(x) \le f_{i_b}(x)$. Siis $x \in E_{i_b}$, joten $(*)$ pätee.

Koska $f_i \ge f_i\chi_{E_i} \ge b\phi\chi_{E_i}$, niin (Lause 3.2.3)

$$\int_{\mathbf{R}^n} f_i\,dm \ge \int_{\mathbf{R}^n} b\phi\chi_{E_i}\,dm = b\int_{E_i} \phi\,dm.$$

Lemman 3.2.5 mukaan (jono (E_i) on kasvava)

$$\lim_{i\to\infty} b\int_{E_i} \phi\,dm = b\int_{\cup_{i=1}^{\infty} E_i} \phi\,dm = b\int_{\mathbf{R}^n} \phi\,dm.$$

Koska epäyhtälö säilyy raja-arvossa, niin

$$a = \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_i\,dm \ge b\int_{\mathbf{R}^n} \phi\,dm$$

kaikilla $\phi \in \mathcal{Y}$, $\phi \le f$. Ottamalla supremum yli funktioiden ϕ, saadaan

$$a \ge b\int_{\mathbf{R}^n} f\,dm.$$

Väite
$$a \geq \int_{\mathbf{R}^n} f\, dm$$
seuraa antamalla $b \to 1^-$. $\square$

Lause 3.2.4 sanoo siis, että kasvavan ja ei-negatiivisen jonon tapauksessa *integraalien raja-arvo on aina rajafunktion integraali.*

Huomautus. Huomaa, että Lauseessa 3.2.4 raja-arvo $\lim_{i\to\infty} f_i(x) \in [0, +\infty]$ on aina olemassa Lauseen 1.2.6 nojalla.

Esimerkki. Monotonisen konvergenssin ideaa ei voi soveltaa väheneville funktiojonoille! Olkoon $f_i = \chi_{[i,\infty[}$. Tällöin (f_i) on vähenevä jono yksinkertaisia funktioita ja
$$\int f_i\, dm = m([i, \infty[) = \infty$$
kaikilla $i \in \mathbf{N}$. Toisaalta $\lim_{i\to\infty} f_i(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, joten
$$\int \lim_{i\to\infty} f_i\, dm = 0.$$

Huomautus 3.2.6. (a) Voidaan osoittaa, että jos rajoitettu funktio $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ on Riemann-integroituva, niin se on Lebesgue-integroituva joukossa $[a, b]$ ja integraalien arvot ovat samat, Rudin: Principles of Mathematical Analysis, 3rd edition, s. 322–324 (Kirjallinen harjoitustehtävä 2).

(b) Tunnetusti funktio $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{kun} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$
ei ole Riemann-integroituva yli minkään välin $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Sen sijaan Lebesguen integraalille pätee $\int_{[a,b]} f\, dm = 0$ kaikilla (ks. esimerkki).

Siis Lebesguen integroituvuuden käsite on yleisempi kuin Riemannin-integroituvuuden käsite.

Lause 3.2.7. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen ja olkoot $f_1, \ldots, f_k : E \to [0, +\infty]$ mitallisia. Tällöin
$$\int_E \sum_{i=1}^k f_i\, dm = \sum_{i=1}^k \int_E f_i\, dm.$$

Todistus. Korvaamalla funktiot f_i funktioilla $f_i\chi_E$ voidaan olettaa, että $E = \mathbf{R}^n$. Edelleen voidaan olettaa, että $k = 2$, sillä yleistys saadaan induktiolla. Lemman 3.2.2 nojalla on olemassa kasvavat jonot (ϕ_i) ja (ψ_i) yksinkertaisia funktioita siten, että
$$f_1 = \lim_{i\to\infty} \phi_i \quad \text{ja} \quad f_2 = \lim_{i\to\infty} \psi_i.$$
Lemman 3.1.8 (1) mukaan
$$\int \phi_i + \psi_i\, dm = \int \phi_i\, dm + \int \psi_i\, dm.$$

Monotonisen konvergenssin lauseen mukaan

$$\lim_{i\to\infty}\int \phi_i\,dm = \int f_1\,dm \quad \text{ja} \quad \lim_{i\to\infty}\int \psi_i\,dm = \int f_2\,dm.$$

Vastaavasti $\lim_{i\to\infty}(\phi_i+\psi_i) = f_1+f_2$ ja siten monotonisen konvergenssin lauseen mukaan

$$\lim_{i\to\infty}\int \phi_i+\psi_i\,dm = \int f_1+f_2\,dm.$$

Väite

$$\int f_1+f_2\,dm = \lim_{i\to\infty}\int \phi_i+\psi_i\,dm = \lim_{i\to\infty}\int \phi_i\,dm + \lim_{i\to\infty}\int \psi_i\,dm = \int f_1\,dm + \int f_2\,dm$$

saadaan yhdistämällä yhtälöt. $\square$

Lauseen 3.2.7 ja monotonisen konvergenssin lauseen seurauksena saadaan helposti ns. *Beppo Levin lause*:

Seuraus 3.2.8. Olkoon $E\subset\mathbf{R}^n$ mitallinen ja olkoot $f_i : E\to[0,+\infty]$ mitallisia kaikilla $i\in\mathbf{N}$. Tällöin

$$\int_E \sum_{i=1}^{\infty} f_i\,dm = \sum_{i=1}^{\infty}\int_E f_i\,dm,$$

ts. positiivitermisen sarjan voi integroida termeittäin.

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Seuraava konvergenssitulos on myös erittäin keskeinen:

Lause 3.2.9 (Fatoun lemma)**.** Olkoon $E\subset\mathbf{R}^n$ ja $f_i : E\to[0,\infty]$ mitallisia, $i\in\mathbf{N}$. Tällöin

$$\int_E \liminf_{i\to\infty} f_i\,dm \le \liminf_{i\to\infty}\int_E f_i\,dm.$$

Todistus. Olkoon $g_k : E\to[0,+\infty]$ funktio

$$g_k(x) := \inf_{i\ge k} f_i(x), \quad x\in E.$$

Tällöin (g_k) on kasvava jono mitallisia funktioita (Lause 2.6.10). Lisäksi $g_k\le f_k$ joukossa E ja

$$\lim_{k\to\infty} g_k = \liminf_{i\to\infty} f_i.$$

Monotonisen konvergenssin lauseen mukaan

$$\begin{aligned}\int_E \liminf_{i\to\infty} f_i\,dm = \int_E \lim_{k\to\infty} g_k\,dm &= \lim_{k\to\infty}\int_E g_k\,dm\\ &= \liminf_{k\to\infty}\int_E g_k\,dm \le \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k\,dm.\end{aligned}$$

Tässä kolmas yhtälö perustuu Lauseeseen 2.6.9. $\square$

Huomautus. Toisaalta monotonisen konvergenssin lause seuraa helposti Fatoun lemmasta. Jos nimittäin (f_i) on monotonisen konvergenssin lauseessa esiintyvä kasvava ei-negatiivinen funktiojono, niin kasvavuuden perusteella $\lim_{i\to\infty} f_i$ ja $\lim_{i\to\infty} \int_E f_i\, dm$ ovat olemassa. Lauseen 2.6.9 ja Fatoun lemman mukaan

$$\int_E \lim_{i\to\infty} f_i\, dm = \int_E \liminf_{i\to\infty} f_i\, dm \le \liminf_{i\to\infty} \int_E f_i\, dm = \lim_{i\to\infty} \int_E f_i\, dm.$$

Näin monotonisen konvergenssin lauseen ei-triviaali epäyhtälö on saatu perusteltua Fatoun lemman avulla.

Esimerkki. Olkoon $f_i = \chi_{[i,2i]}$. Tällöin (Lause 2.6.9)

$$\liminf_{i\to\infty} f_i(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x) = 0$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja siten

$$\int \liminf_{i\to\infty} f_i\, dm = 0.$$

Toisaalta

$$\int f_i\, dm = m([i, 2i][) = i,$$

joten (Lause 2.6.9)

$$\liminf_{i\to\infty} \int f_i\, dm = \liminf_{i\to\infty} i = \infty.$$

Siis Fatoun lemma pätee muodossa $0 \le \infty$.

Lause 3.2.10. Olkoot joukot $E_i \subset \mathbf{R}^n$ mitallisia ja pareittain pistevieraita sekä olkoon $f : \cup_{i=1}^{\infty} E_i \to [0, +\infty]$ mitallinen. Tällöin

$$\int_{\cup_{i=1}^{\infty} E_i} f\, dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\, dm.$$

Todistus. Olkoon $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$. Epäyhtälö

$$\int_E f\, dm \le \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\, dm$$

jätetään harjoitustehtäväksi. Siis lauseen väite pätee jos $\int_E f\, dm = +\infty$.

Todistetaan käänteinen epäyhtälö olettaen, että $\int_E f\, dm < \infty$. Supremumin määritelmän seurauksena kaikilla $\varepsilon > 0$ ja $k \in \mathbf{N}$ on olemassa $\phi_i \le f\chi_{E_i}$, $i = 1, \ldots, k$, siten, että

$$\int_{E_i} f\, dm - \frac{\varepsilon}{k} \le \int_{E_i} \phi_i\, dm.$$

Olkoon $\phi'_k := \max\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$, jolloin ϕ'_k on yksinkertainen funktio. Koska $\phi_i \le \phi'_k$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$, niin

$$\int_{E_i} f\, dm - \frac{\varepsilon}{k} \le \int_{E_i} \phi'_k\, dm \quad (*)$$

kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Koska $\phi'_k \leq f\chi_{\cup_{i=1}^k E_i}$, niin Lauseen 3.2.3 (2) ja Lemman 3.1.7 nojalla

$$\int_E f\,dm \geq \int_{\cup_{i=1}^k E_i} f\,dm \geq \int_{\cup_{i=1}^k E_i} \phi'_k\,dm = \sum_{i=1}^k \int_{E_i} \phi'_k\,dm.$$

Yhdistämällä saatu epäyhtälö $(*)$:n kanssa saadaan

$$\int_E f\,dm \geq \sum_{i=1}^k \int_{E_i} \phi'_k\,dm \geq \sum_{i=1}^k \int_{E_i} f\,dm - \varepsilon.$$

Tämä pätee kaikille $k \in \mathbf{N}$, joten ottamalla raja-arvot puolittain $(k \to \infty)$ saadaan

$$\int_E f\,dm \geq \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} f\,dm - \varepsilon.$$

Väite

$$\int_E f\,dm \geq \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} f\,dm$$

seuraa antamalla $\varepsilon \to 0^+$. □

Seuraus 3.2.11. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ ja olkoot $f, g : E \to [0, +\infty]$ mitallisia. Jos $f = g$ m.k. joukossa E, niin

$$\int_E f\,dm = \int_E g\,dm.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraus 3.2.12. Olkoon $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \mathbf{R}^n$ kasvava jono mitallisia joukkoja sekä olkoon $f : \cup_{i=1}^\infty E_i \to [0, +\infty]$ mitallinen. Tällöin

$$\int_{\cup_{i \in \mathbf{N}} E_i} f\,dm = \lim_{i \to \infty} \int_{E_i} f\,dm.$$

Todistus. Väite seuraa Lauseesta 3.2.10 aivan kuten Lemma 3.2.5 seuraa Lemmasta 3.1.7, ks. harjoitustehtävä. □

3.3 Lebesguen integraali vaihtuvamerkkiselle funktiolle

Lopuksi yleistämme integraalin määritelmän kaikille mitallisille funktioille.

Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ ja olkoon $f : E \to \overline{\mathbf{R}}$. Merkitään

$$f^+ = \max(f, 0) \quad \text{ja} \quad f^- = -\min(f, 0).$$

Tällöin f^+ ja f^- ovat ei-negatiivisia. Lisäksi pätee

$$f^+ = \frac{1}{2}\left(|f| + f\right) \quad \text{ja} \quad f^- = \frac{1}{2}\left(|f| - f\right),$$

eli toisin sanoen

$$f = f^+ - f^- \quad \text{ja} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Esimerkki. Perustellaan malliksi yhtälö

$$f^- = \frac{1}{2}\left(|f| - f\right). \quad (*)$$

1) Jos $f(x) \geq 0$, niin $|f(x)| = f(x)$ ja

$$f^-(x) = -\min(f(x), 0) = -0 = 0, \quad \frac{1}{2}\left(|f(x)| - f(x)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(x)\right) = 0.$$

2) $f(x) < 0$, niin $|f(x)| = -f(x)$ ja

$$f^-(x) = -\min(f(x), 0) = -f(x), \quad \frac{1}{2}\left(|f(x)| - f(x)\right) = \frac{1}{2}\left(-f(x) - f(x)\right) = -f(x).$$

Yhtälö

$$f^+ = \frac{1}{2}\left(|f| + f\right) \quad (**)$$

perustellaan samalla tavoin. Yhtälöt

$$f = f^+ - f^- \quad \text{ja} \quad |f| = f^+ + f^-$$

saadaan yhtälöistä $(*)$ ja $(**)$ vähentämällä puolittain ja laskemalla puolittain yhteen.

Määritelmä 3.3.1. Jos $E \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : E \to \overline{\mathbf{R}}$ on mitallinen, niin funktio f on *integroituva joukossa* E mikäli $\int_E f^+ \, dm < \infty$ ja $\int_E f^- \, dm < \infty$. Tällöin funktion f *integraali yli joukon* E on luku

$$\int_E f \, dm := \int_E f^+ \, dm - \int_E f^- \, dm.$$

Huomautus. (a) Määritelmästä on selvää, että jos f on integroituva joukossa E, niin f on integroituva jokaisessa E:n mitallisessa osajoukossa (Lause 3.2.3(2)).

(b) Jos f on integroituva joukossa E, niin $|f(x)| < \infty$ m.k. joukossa E. Nimittäin ei-negatiivisille funktioille f^+ ja f^- ko. väite pätee harjoitustehtävän nojalla. Toisaalta

$$\begin{aligned}
\{\, x \in E : |f(x)| = \infty \,\} &= \{\, x \in E : f^+(x) + f^-(x) = \infty \,\} \\
&= \{\, x \in E : f^+(x) = \infty \,\} \cup \{\, x \in E : f^-(x) = \infty \,\},
\end{aligned}$$

joten väite seuraa mitan subadditiivisuudesta.

Lause 3.3.2. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : E \to \overline{\mathbf{R}}$ funktio. Tällöin f on integroituva joukossa E jos ja vain jos f on mitallinen joukossa E ja $|f|$ on integroituva joukossa E. Edelleen

$$\left| \int_E f \, dm \right| \leq \int_E |f| \, dm,$$

jos f on integroituva joukossa E.

Todistus. Jos f on integroituva joukossa E, se on määritelmän mukaan mitallinen. Koska $|f| = f^+ + f^-$, niin Lauseen 3.2.7 nojalla

$$\int_E |f|\, dm = \int_E f^+\, dm + \int_E f^-\, dm < \infty.$$

Siis $|f|$ on integroituva joukossa E.

Käänteinen väite ja epäyhtälö harjoitustehtäviä. $\square$

Lemma 3.3.3 (Majoranttiperiaate)**.** Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : E \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen. Jos $|f| \leq g$ joukossa E ja g on integroituva joukossa E, niin f on integroituva joukossa E.

Todistus. Lauseen 3.2.3 (1) mukaan

$$\int_E |f|\, dm \leq \int_E g\, dm < \infty.$$

Siis $|f|$ on integroituva ja Lauseen 3.3.2 mukaan f on integroituva. $\square$

Huomautus 3.3.4. Lemmassa 3.3.3 riittää olettaa, että $|f| \leq g$ m.k. joukossa E. Jos nimittäin

$$A = \{\, x \in E : |f(x)| > g(x) \,\}$$

ja $m(A) = 0$, niin

$$\int_E |f|\, dm = \int_{E \setminus A} |f|\, dm + \int_A |f|\, dm = \int_{E \setminus A} |f|\, dm,$$

sillä $\int_A |f|\, dm = 0$ (Lause 3.2.3 (3)). Lemmaa 3.3.3 voi nyt soveltaa joukossa $E \setminus A$.

Huomautus 3.3.5. (a) Jos $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ on rajoitettu Riemann-integroituva funktio rajoitetulla välillä $[a, b]$, niin f on Lebesgue-integroituva joukossa $[a, b]$ ja

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f\, dm.$$

Tässä vasemmalla puolella on Riemann-integraali ja oikealla puolella on Lebesgue-integraali.

Jos nimittäin f on rajoitettu Riemann-integroituva funktio välillä $[a, b]$, niin tunnetusti f^+ ja f^- ovat Riemann-integroituvia välillä $[a, b]$. Huomautuksen 3.2.6 nojalla f^+ ja f^- ovat Lebesgue-integroituvia ja niiden Riemannin integraalien arvot yhtyvät Lebesguen integraalien arvoon. Näin ollen

$$\int_{[a,b]} f\, dm = \int_{[a,b]} f^+\, dm - \int_{[a,b]} f^-\, dm = \int_a^b f^+(x)\, dx - \int_a^b f^-(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Kirjallisuudessa merkintää $\int_a^b f(x)\, dx$ käytetään yleisesti myös Lebesguen integraalille!

(b) Riemann-integroituva rajoitettu funktio $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ on siis aina Lebesgue-integroituva. Tämä kuitenkin pätee epäoleelliselle Riemannin integraalille vain ei-negatiivisessa tapauksessa, so. tapauksessa, jossa funktio ei vaihda merkkiään.

Olkoon esimerkiksi $f : E \to \mathbf{R}$,
$$f(x) = x^{-1} \sin x,$$
missä $E = [1, \infty)$. Osoitetaan, että f ei ole Lebesgue-integroituva joukossa E. Lauseiden 3.2.3 ja 3.2.10 sekä kohdan (a) nojalla

$$\begin{aligned}\int_E |f|\, dm &= \int_{[1,\pi[} |f|\, dm + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[k\pi,(k+1)\pi[} |f|\, dm \\ &= \int_1^{\pi} |f(x)|\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|}\, dx \\ &\geq \int_1^{\pi} |f(x)|\, dx + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1},\end{aligned}$$

sillä sinin jaksollisuuden perusteella

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|}\, dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx = \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin x|\, dx = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Koska $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty$, funktio $|f|$ ei ole integroituva joukossa E.
Sen toteaminen, että epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

suppenee, sivuutetaan tässä.

Esimerkki. Olkoon $E = [1, \infty)$ ja $f : E \to \mathbf{R}$ funktio $f(x) = x^{-2}$. Koska f on jatkuva, se on mitallinen. Toisaalta jatkuva funktio on Riemann-integroituva, joten (Huomautus 3.2.6)

$$\begin{aligned}\int_E f\, dm &= \lim_{i\to\infty} \int_{[1,i]} f\, dm = \lim_{i\to\infty} \int_1^i f(x)\, dx \\ &= \lim_{i\to\infty} \int_1^i x^{-2}\, dx = \lim_{i\to\infty} (-\frac{1}{i} + 1) = 1.\end{aligned}$$

Ensimmäisen yhtälön perustelee Seuraus 3.2.12 tai monotonisen konvergenssin lause, kun

$$f_i(x) = f(x)\chi_{[1,i]}, \quad i \in \mathbf{N}.$$

Olkoon edelleen $E = [1, \infty)$ ja $g : E \to \mathbf{R}$ funktio $g(x) = x^{-2} \sin x$. Myös g on mitallinen jatkuvana. Koska
$$|g(x)| \leq f(x), \quad x \in E,$$
g on integroituva joukossa E majoranttiperiaatteen nojalla.

Luvussa 3.2 esitettyjen integraalin perusominaisuuksien laajentaminen Määritelmän 3.3.1 tilanteeseen on rutiininomaista. Ensimmäisenä esimerkkinä tästä tarkastellaan additiivisuutta integroimisjoukon suhteen.

Lause 3.3.6. Olkoot $E_i \subset \mathbf{R}^n$ mitallisia ja pareittain pistevieraita, kun $i \in \mathbf{N}$. Jos f on integroituva joukossa $E := \cup_{i=1}^{\infty} E_i$, niin f on integroituva jokaisessa joukossa E_i ja

$$\int_E f\,dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,dm. \quad (*)$$

Kääntäen, jos f on integroituva joukossa E_i kaikilla $i \in \mathbf{N}$ ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} |f|\,dm < \infty,$$

niin f on integroituva joukossa E ja kaava $(*)$ pätee.

Todistus. Jos f on integroituva joukossa E, niin f^+ ja f^- ovat integroituvia joukossa E (Määritelmä 3.3.1). Lauseen 3.2.10 mukaan

$$\int_E f^+\,dm = \sum_{i\in\mathbf{N}} \int_{E_i} f^+\,dm \quad \text{ja} \quad \int_E f^-\,dm = \sum_{i\in\mathbf{N}} \int_{E_i} f^-\,dm.$$

Toisaalta Lauseen 3.2.3 (2) nojalla

$$\int_{E_i} f^+\,dm \le \int_E f^+\,dm < \infty$$

kaikilla $i \in \mathbf{N}$ ja vastaavasti $\int_{E_i} f^-\,dm < \infty$ kaikilla $i \in \mathbf{N}$. Siis f on integroituva jokaisessa joukossa E_i ja

$$\begin{aligned}\int_E f\,dm &= \int_E f^+\,dm - \int_E f^-\,dm = \sum_{i\in\mathbf{N}} \int_{E_i} f^+\,dm - \sum_{i\in\mathbf{N}} \int_{E_i} f^-\,dm \\ &= \sum_{i\in\mathbf{N}} \left(\int_{E_i} f^+\,dm - \int_{E_i} f^-\,dm \right) = \sum_{i\in\mathbf{N}} \int_{E_i} f\,dm.\end{aligned}$$

Toiseksi viimeinen yhtälö pätee sillä sarjojen summat ovat äärellisiä.

Kääntäen, olkoon f integroituva joukossa E_i kaikilla $i \in \mathbf{N}$. Koska f on mitallinen joukossa E_i kaikilla $i \in \mathbf{N}$, niin f on mitallinen yhdisteessä E. Nimittäin kaikilla $\alpha \in \mathbf{R}$ pätee

$$\{\, x \in E : f(x) > \alpha \,\} = \bigcup_{i\in\mathbf{N}} \{\, x \in E_i : f(x) > \alpha \,\}.$$

Lauseen 3.2.10 mukaan

$$\int_E |f|\,dm = \sum_{i\in\mathbf{N}} \int_{E_i} |f|\,dm.$$

Oletuksen mukaan oikeanpuoleinen summa on äärellinen, joten $|f|$ on integroituva joukossa E. Siis myös f on integroituva joukossa E ja kaava $(*)$ pätee. $\square$

Seuraava lause sisältää muut integraalin perusominaisuudet yleisessä tapauksessa:

Lause 3.3.7. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ ja olkoot $f, g : E \to \mathbf{R}$ integroituvia joukossa E. Tällöin

(1) funktio $f + g$ on integroituva joukossa E ja
$$\int_E f + g\, dm = \int_E f\, dm + \int_E g\, dm;$$

(2) funktio λf on integroituva joukossa E kaikilla $\lambda \in \mathbf{R}$ ja
$$\int_E \lambda f\, dm = \lambda \int_E f\, dm;$$

(3) $\int_E f\, dm \leq \int_E g\, dm$ aina kun $f \leq g$ joukossa E;

(4) $\int_E f\, dm = 0$ aina kun $m(E) = 0$;

(5) $\int_E f\, dm = \int_E g\, dm$ aina kun $f = g$ m.k. joukossa E.

Todistus. (1) Koska f ja g ovat integroituvia joukossa E, niin $|f| < \infty$ m.k. joukossa E ja $|g| < \infty$ m.k. joukossa. Erityisesti summa $h := f + g$ on määritelty m.k. joukossa E (ainoastaan nollamittaisessa joukossa summa voi olla muotoa $\infty - \infty$). Laajennetaan h nollana joukkoon, jossa se ei a priori ole määritelty. Tällöin
$$|h| \leq |f| + |g| \quad \text{joukossa } E,$$
joten (Lause 3.2.3 (1) ja Lause 3.2.7)
$$\int_E |h|\, dm \leq \int_E |f| + |g|\, dm = \int_E |f|\, dm + \int_E |g|\, dm < \infty.$$
Siis h on integroituva Lemman 3.3.3 nojalla. Toisaalta m.k. joukossa E (so. joukossa, jossa $f + g$ on määritelty) pätee
$$h = h^+ - h^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$
Näin ollen m.k. joukossa E
$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$
Integroimalla puolittain ja käyttämällä Lausetta 3.2.7 saadaan
$$\int_E h^+\, dm + \int_E f^-\, dm + \int_E g^-\, dm = \int_E h^-\, dm + \int_E f^+\, dm + \int_E g^+\, dm.$$
Koska kaikki integraalit ovat äärellisiä, niin
$$\int_E h^+\, dm - \int_E h^-\, dm = \int_E f^+\, dm - \int_E f^-\, dm + \int_E g^+\, dm - \int_E g^-\, dm.$$
Määritelmän 3.3.1 mukaan
$$\int_E h\, dm = \int_E f\, dm + \int_E g\, dm.$$

(2) i) Olkoon $\lambda \geq 0$. Tällöin $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$ ja $(\lambda f)^- = \lambda f^-$, joten

$$\begin{aligned}\int_E \lambda f \, dm &= \int_E (\lambda f)^+ \, dm - \int_E (\lambda f)^- \, dm = \int_E \lambda f^+ \, dm - \int_E \lambda f^- \, dm \\ &= \lambda\Big(\int_E f^+ \, dm - \int_E f^- \, dm\Big) = \lambda \int_E f \, dm.\end{aligned}$$

ii) Olkoon $\lambda < 0$. Tällöin $(\lambda f)^+ = (-\lambda) f^-$ ja $(\lambda f)^- = (-\lambda) f^+$, joten

$$\begin{aligned}\int_E \lambda f \, dm &= \int_E (\lambda f)^+ \, dm - \int_E (\lambda f)^- \, dm = \int_E (-\lambda f^-) \, dm - \int_E (-\lambda f^+) \, dm \\ &= \lambda\Big(\int_E f^+ \, dm - \int_E f^- \, dm\Big) = \lambda \int_E f \, dm.\end{aligned}$$

(3) Kohtien (1) ja (2) nojalla $g - f$ on integroituva ja

$$\int_E g \, dm = \int_E f + (g - f) \, dm = \int_E f + \int_E g - f \, dm \geq \int_E f,$$

sillä $g - f \geq 0$ joukossa E.

(4) Koska $m(E) = 0$, niin Lauseen 3.2.3 (3) nojalla $\int_E f^+ \, dm = 0$ ja $\int_E f^- \, dm = 0$. Siispä

$$\int_E f \, dm = \int_E f^+ \, dm - \int_E f^- \, dm = 0.$$

(5) Jos $f = g$ m.k. joukossa E, niin $f^+ = g^+$ m.k. joukossa E ja $f^- = g^-$ m.k. joukossa E. Harjoitustehtävän nojalla

$$\int_E f^+ \, dm = \int_E g^+ \, dm \quad \text{ja} \quad \int_E f^- \, dm = \int_E g^- \, dm.$$

Väite seuraa Määritelmästä 3.3.1. $\square$

Yleisessä tapauksessa konvergenssilauseiden kirjo laajenee. Seuraava *dominoidun konvergenssin lause* on keskeinen.

Lause 3.3.8. [Dominoidun konvergenssin lause] Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ ja olkoot $f_i : E \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallisia funktioita siten, että

$$f(x) = \lim_{i \to \infty} f_i(x)$$

m.k. $x \in E$. Jos on olemassa joukossa E integroituva funktio g siten, että

$$\sup_{i \in \mathbf{N}} |f_i(x)| \leq g(x)$$

m.k. $x \in E$, niin f on integroituva joukossa E ja

$$\lim_{i \to \infty} \int_E |f - f_i| \, dm = 0.$$

Erityisesti pätee

$$\int_E f \, dm = \lim_{i \to \infty} \int_E f_i \, dm.$$

Todistus. Määrittelemällä f_i, f ja g esimerkiksi nollana sopivasti valitussa nollamittaisessa joukossa voidaan olettaa, että

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$$

kaikilla $x \in E$ ja

$$\sup_{i\in\mathbf{N}} |f_i(x)| \le g(x)$$

kaikilla $x \in E$. Koska epäyhtälö säilyy raja-arvossa, on

$$|f(x)| \le g(x)$$

kaikilla $x \in E$. Näin ollen

$$|f(x) - f_i(x)| \le |f(x)| + |f_i(x)| \le 2g(x)$$

kaikilla $x \in E$.

Koska g on integroituva joukossa E, majoranttiperiaatteen nojalla $|f|$, $|f - f_i|$ ja f ovat integroituvia joukossa E. Soveltamalla Fatoun lemmaa ei-negatiiviseen funktiojonoon $2g - |f - f_i|$, jonka rajafunktio on $2g$, saadaan

$$\begin{aligned} \int_E 2g\,dm &= \int_E \liminf_{i\to\infty} (2g - |f - f_i|)\,dm \\ &\le \liminf_{i\to\infty} \int_E (2g - |f - f_i|)\,dm \\ &= \liminf_{i\to\infty} \left(\int_E 2g\,dm - \int_E |f - f_i|\,dm \right) \\ &= \int_E 2g\,dm - \limsup_{i\to\infty} \int_E |f - f_i|\,dm. \end{aligned} \tag{3}$$

Tässä toiseksi viimeinen yhtälö pätee Lauseen 3.3.7 nojalla ja viimeinen yhtälö perustuu ominaisuuteen

$$\liminf_{i\to\infty} (a - a_i) = a - \limsup_{i\to\infty} a_i,$$

mikä pätee kaikille $a, a_i \in \mathbf{R}$ (harjoitustehtävä).

Epäyhtälössä (3) $\int_E 2g\,dm$ voidaan supistaa, joten Lemman 2.6.8 nojalla

$$0 \le \liminf_{i\to\infty} \int_E |f - f_i|\,dm \le \limsup_{i\to\infty} \int_E |f - f_i|\,dm \le 0.$$

Lauseen 2.6.9 nojalla

$$\lim_{i\to\infty} \int_E |f - f_i|\,dm = 0.$$

Väite

$$\int_E f\,dm = \lim_{i\to\infty} \int_E f_i\,dm$$

seuraa epäyhtälöstä (ks. lauseet 3.3.2 ja 3.3.7)

$$\left| \int_E f\,dm - \int_E f_i\,dm \right| = \left| \int_E (f - f_i)\,dm \right| \le \int_E |f - f_i|\,dm$$

ottamalla raja-arvot $i \to \infty$ puolittain. $\square$

Esimerkki. (a) Määrätään

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 ix^{-\frac{3}{2}} \sin \frac{x}{i}\, dx.$$

Tässä (ja muissa esimerkeissä) integraali tulkitaan Lebesguen mielessä ellei erikseen muuta mainita. Olkoon $E =]0,1[$ ja merkitään

$$f_i(x) = ix^{-\frac{3}{2}} \sin \frac{x}{i} = x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{x}{i}}{\frac{x}{i}}, \quad i \in \mathbf{N}.$$

Tällöin

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x) = x^{-\frac{1}{2}}.$$

Edelleen

$$\sup_{x\in E} \left| \frac{\sin \frac{x}{i}}{\frac{x}{i}} \right| \le \sup_{x\in E} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \le \max_{x\in[0,1]} |g(x)| =: M,$$

sillä funktio $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ on jatkuva myös origossa jos asetetaan $g(0) = 1$. Siis

$$|f_i(x)| \le Mf(x)$$

kaikilla $x \in E$ ja $i \in \mathbf{N}$.

Toisaalta monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\frac{1}{k}}^1 f(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} (2 - 2\sqrt{\frac{1}{k}}) = 2.$$

Toiseksi viimeisessä yhtälössä integraali on laskettu analyysin peruslauseen avulla Huomautukseen 3.3.5 nojaten.

Dominoidun konvergenssin lauseen mukaan

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 f_i(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx = 2.$$

(b) Olkoon f integroituva joukossa $[-1,1]$ ja olkoon

$$g(x) = \int_{-1}^1 f(t) \sin xt\, dt, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Määrätään $g'(x)$. Olkoon $x \in \mathbf{R}$ ja olkoon (h_i) jono positiivisia reaalilukuja siten, että $\lim_{i\to\infty} h_i = 0$. Lauseen 3.3.7 nojalla

$$\begin{aligned}
\frac{g(x+h_i) - g(x)}{h_i} &= \frac{1}{h_i} \left(\int_{-1}^1 f(t) \sin(x+h_i)t\, dt - \int_{-1}^1 f(t) \sin xt\, dt \right) \\
&= \int_{-1}^1 \frac{f(t)\sin(x+h_i)t - f(t)\sin xt}{h_i}\, dt \\
&= \int_{-1}^1 f(t) \left(\frac{\sin(x+h_i)t - \sin xt}{h_i} \right) dt.
\end{aligned}$$

Väliarvolauseen nojalla

$$\frac{\sin(x+h_i)t - \sin xt}{h_i} = \frac{\cos\xi \cdot h_i t}{h_i} = t\cos\xi.$$

Näin ollen

$$\left|\frac{\sin(x+h_i)t - \sin xt}{h_i}\right| \leq 1$$

kaikilla i ja $t \in [-1,1]$, joten funktiolla $|f(t)\left(\frac{\sin(x+h_i)t-\sin xt}{h_i}\right)|$ on integroituva majorantti $|f(t)|$. Koska

$$\lim_{i\to\infty} tf(t)\left(\frac{\sin(x+h_i)t - \sin xt}{th_i}\right) = tf(t)\cos xt$$

kaikilla $t \in [-1,1]$, $t \neq 0$, niin dominoidun konvergenssin lauseen mukaan

$$\lim_{i\to\infty}\frac{g(x+h_i)-g(x)}{h_i} = \lim_{i\to\infty}\int_{-1}^{1} tf(t)\left(\frac{\sin(x+h_i)t - \sin xt}{th_i}\right)dt = \int_{-1}^{1} tf(t)\cos xt\,dt.$$

Tämä pätee kaikille jonoille $h_i \to 0^+$, joten oikeanpuoleiselle derivaatalle pätee

$$g'_+(x) = \int_{-1}^{1} tf(t)\cos xt\,dt$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Nimittäin jos vastoin väitettä luku $a := \int_{-1}^{1} f(t)\cos xt\,dt$ ei ole g:n oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä x, niin on olemassa $\varepsilon > 0$ ja jono $h_i \to 0^+$ siten, että

$$\frac{g(x+h_i)-g(x)}{h_i} \notin]a-\varepsilon, a+\varepsilon[.$$

Tämä on ristiriidassa edellä todetun kanssa.

Vasemmanpuoleinen derivaatta käsitellään samalla tavalla.

Dominoidun konvergenssin lauseen erikoistapauksena todistetaan *tasaisesti rajoitetun konvergenssin lause*:

Lause 3.3.9. [Tasaisesti rajoitetun konvergenssin lause] Olkoon $m(E) < \infty$ ja olkoon $f_i : E \to \mathbf{R}$ jono joukossa E integroituvia funktioita siten, että

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$$

m.k. $x \in E$. Jos on olemassa reaaliluku $M > 0$ siten, että

$$\sup_{i\in\mathbf{N}} |f_i(x)| \leq M$$

kaikilla $x \in E$, niin

$$\int_E f\,dm = \lim_{i\to\infty}\int_E f_i\,dm.$$

Todistus. Olkoon $g = M$ joukossa E. Tällöin oletuksen $m(E) < \infty$ nojalla

$$\int_E g\,dm = Mm(E) < \infty.$$

Siis g on integroituva joukossa E ja väite seuraa dominoidun konvergenssin lauseesta. □

Tarkastellaan lopuksi paria esimerkkiä Lebesguen integrointiteorian yhteydestä Riemannin-integraaleihin.

Seuraus 3.3.10. Olkoon $m(E) < \infty$ ja olkoon (f_i) jono joukossa $E \subset \mathbf{R}^n$ integroituvia funktioita siten, että $f_i \to f$ tasaisesti joukossa E. Tällöin f on integroituva ja

$$\int_E f\,dm = \lim_{i\to\infty} \int_E f_i\,dm.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Huomautus. Esimerkiksi Taylorin sarjojen tarkastelu perustuu Seurausta 3.3.10 vastaavaan tasaisen konvergenssin tulokseen kun $E = [a,b]$ ja (f_i) on jono Riemannin mielessä integroituvia funktioita välillä $[a,b]$. Riemannin integrointiteoriassa joudutaan olettamaan myös rajafunktion Riemann-integroituvuus.

Tasaisesti rajoitetun konvergenssin avulla saadaan helposti seuraava Riemannin integraalia koskeva tulos.

Seuraus 3.3.11. Olkoon $f_i : [a,b] \to \mathbf{R}$ jono välillä $[a,b]$ Riemann-integroituvia funktioita siten, että

(i) $|f_i(x)| \le M$ kaikilla $i \in \mathbf{N}$ ja $x \in [a,b]$ jollekin $M \in \mathbf{R}_+$;

(ii) Kaikilla $x \in [a,b]$ on olemassa $f(x) := \lim_{i\to\infty} f_i(x)$;

(iii) Raja-funktio f on Riemann-integroituva välillä $[a,b]$.

Tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{i\to\infty} \int_a^b f_i(x)\,dx.$$

Todistus. Koska funktiot f ja f_i ovat rajoitettuja ja Riemann-integroituvia, niin Huomautuksen 3.3.5 nojalla ne ovat Lebesgue-integroituvia välillä $[a,b]$ ja

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,dm$$

sekä

$$\int_a^b f_i(x)\,dx = \int_{[a,b]} f_i\,dm$$

kaikilla $i \in \mathbf{N}$. Lauseen 3.3.9 mukaan

$$\int_{[a,b]} f\,dm = \lim_{i\to\infty} \int_{[a,b]} f_i\,dm,$$

joten väite seuraa. $\square$

Huomautus. Seurauksen 3.3.11 todistaminen ilman Lebesguen integrointiteoriaa on hankalaa.

Lisätieto: Yleisen mittateorian idea. Olkoon $X \neq \emptyset$ mielivaltainen joukko ja Γ joukon X σ-algebra. Kokoelman Γ joukkoja sanotaan *mitallisiksi joukoiksi.*

Funktio $\mu : \Gamma \to [0, +\infty]$ on *mitta joukossa* X, jos

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ aina kun joukot $A_i \in \Gamma$ ovat pareittain pistevieraita.

Jos lisäksi $\mu(X) = 1$, mittaa μ sanotaan *todennäköisyysmitaksi.* Kolmikko (X, Γ, μ) on *mitta-avaruus*, jos Γ on σ-algebra joukossa X ja μ on mitta joukossa X.

Huomautus. (a) Ehdosta (ii) seuraa heti, että μ on monotoninen, ts. $\mu(A) \leq \mu(B)$ jos $A, B \in \Gamma$ ja $A \subset B$. Nimittäin tällöin A ja $B \setminus A \in \Gamma$ ovat erillisiä, joten

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

(b) Useimmiten (esim. $\mathbf{R}^n$:n osajoukoille) lähtökohtana on σ-algebra Γ, joka sisältää Borelin σ-algebran.

Mitallisten joukkojen avulla mitalliset funktiot $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ ja integraali määritellään aivan kuten edellä.

Kaikki kurssilla esitetyt mitallisten funktioiden ja integraalin ominaisuudet (lukuun ottamatta yhteyksiä Riemannin integraaliin) voidaan todistaa olennaisesti samalla tavalla yleisen mitta-avaruuden tilanteessa!