

Mandelbrotin joukko

Kandidaatintutkielma
Juha-Matti Huusko
Itä-Suomen yliopisto
1. marraskuuta 2011

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Iteroinnista	2
3	Kompleksilukujen perusominaisuuksia	11
4	Mandelbrotin joukko	13
5	Multibrotjoukot	26

1. Johdanto

Puolalaisen matemaatikon Benoît Mandelbrotin (1924 – 2010) [7, s. 4] mukaan nimetty Mandelbrotin joukko on eräs kompleksitason osajoukko. Joukko määritellään kuvauksen $f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_c(z) = z^2 + c$, missä $c \in \mathbb{C}$, avulla. Joukosta voidaan piirtää kuva, katso Kuva 8. Joukon reuna on kaoottinen ja siinä voi nähdä erikoisia ilmiöitä, katso Kuvat 9 ja 10.

Mandelbrotin joukolle voidaan antaa yleistyksiä. Eräs yleistys ovat niinsanotut multibrotjoukot, katso Luku 5.

Ryhdyin tutkimaan Mandelbrotin joukkoa Internetin ja kirjallisuuden avulla. Monet aiheita käsittelevät kirjat olivat vaikeaselkoisia, joten luin paljon asiaa Internetistä ymmärtääkseni aiheita.

Keksin oman todistuksen artikkelin [5, s. 18] väitteelle, joka esitetään Seurauksessa 4.14. Vaiheittaiseen todistukseen sisältyvät Lauseet 4.10 ja 4.13 sekä Seuraukset 4.12 ja 4.14 todistuksineen.

Innostuneena oman todistuksen keksimisestä Seuraukselle 4.14 lisäsin Lukuun 4 muita tuloksia, jotka pystyin todistamaan kolmioepäyhtälöä ja induktioperiaatetta käyttämällä. Oli mukavaa keksiä joitakin todistuksia itse. Edelleen Luku 5 sisältää pääasiassa Luvun 4 tuloksille analogisia tuloksia tai niiden yleistyksiä.

Tehdessäni tutkielmaa opettelin käyttämään dynaamista geometriaohjelmaa GeoGebra ja laskentaohjelmaa Matlab, jolla opettelin piirtämään kuvia. Kaikki tämän tutkielman kuvat on piirretty Matlabilla. Kuvat 7-10 on piirretty Matlab-funktiolla [11], jota muokkasin hieman.

2. Iteroinnista

Iteroinnilla tarkoitetaan yleensä jonkin toimenpiteen toistamista monta kertaa peräkkäin. Jos X on epätyhjä joukko ja $f : X \rightarrow X$ on funktio, voidaan esimerkiksi määritellä rekursiivisesti jono joukon X alkioita asettamalla $x_0 = a$ jollekin kiinnitetylle $a \in X$ ja

$$x_n = f(x_{n-1}), \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Nyt siis esimerkiksi $x_0 = a, x_1 = f(a), x_2 = f(f(a))$ ja $x_3 = f(f(f(a)))$.

Monet numeeriset menetelmät perustuvat siihen, että iteroimalla saatu lukujono suppenee jotakin haluttua lukua kohti. Otetaan esimerkki tällaisesta iteratiivisesta menetelmästä [6, s. 214]. Vastaava esimerkki on kirjassa [6, ss. 230-231].

Esimerkki 2.1. Lasketaan luvulle $\sqrt{2}$ likiarvo eli ratkaistaan likimääräisesti yhtälö $x^2 = 2$. Tätä varten etsitään lukua $x \in \mathbb{R}$, jolle $g(x) = x^2 - 2 = 0$. Newtonin menetelmässä iteraatiofunktioiksi valitaan funktio

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$

Koska $g'(x) = 2x$, saadaan

$$f(x) = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{2x^2 - x^2 + 2}{2x} = \frac{x^2 + 2}{2x} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right).$$

Tämän jälkeen valitaan alkuarvaus x_0 niin, että se on ”lähellä” lukua $\sqrt{2}$, esimerkiksi $x_0 = 1$. Nyt saadaan lukujono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, missä

$$\begin{aligned} x_0 &= 1; \\ x_1 &= f(1) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{1} \right) = \frac{3}{2}; \\ x_2 &= f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{17}{12}; \\ x_3 &= f\left(\frac{17}{12}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{12} + 2 \cdot \frac{12}{17} \right) = \frac{577}{408}. \end{aligned}$$

Nyt $\left(\frac{577}{408}\right)^2 \approx 2,000006007$, joten $\sqrt{2} \approx \frac{577}{408}$. Desimaaliluvuilla ilmaistuna

$$\frac{577}{408} \approx 1,414215686;$$

$$\sqrt{2} \approx 1,414213562.$$

Saatu likiarvo on tarkkaa arvoa suurempi, mutta siinä on peräti viisi oikeaa desimaalia.

Käytämme merkintöjä $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ja $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Määritelmä 2.2. Olkoon X epätyhjä joukko ja $f : X \rightarrow X$ funktio. Määritellään funktion f *ei-negatiiviset kokonaislukupotenssit* asettamalla

$$(i) \quad f^0 = id;$$

$$(ii) \quad f^n = f \circ f^{n-1}, \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Olkoon lisäksi $a \in X$ ja $A \subset X$. Alkion a *alkukuva* kuvauksessa f on joukko

$$f^{-1}(a) = \{x \in X : f(x) = a\}$$

ja joukon A *alkukuva* on joukko

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

Määritellään funktion f *negatiiviset kokonaislukupotenssit* asettamalla

$$(iii) \quad f^{-(n+1)} = f^{-1} \circ f^{-n}, \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Tässä $\circ$ on relaatioiden yhdistämisoperaatio. Jos f on kääntyvä eli käänteisrelaatio f^{-1} on funktio, on $f^n : X \rightarrow X$ funktio olipa n mikä tahansa kokonaisluku.

Määritelmä 2.2 on hieman eri muodossa kirjassa [7, s. 10].

Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Määritelmän 2.2 mukaan $x \in f^{-n}(a)$, jos ja vain jos $f^n(x) = a$.

Esimerkki 2.3. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Määritelmän 2.2 mukaan kaikilla $x \in \mathbb{R}$

$$f^0(x) = x;$$

$$f^1(x) = f(x) = x^2;$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x^2)^2 = x^4;$$

$$f^n(x) = x^{2^n}, \text{ kun } n \in \mathbb{N}.$$

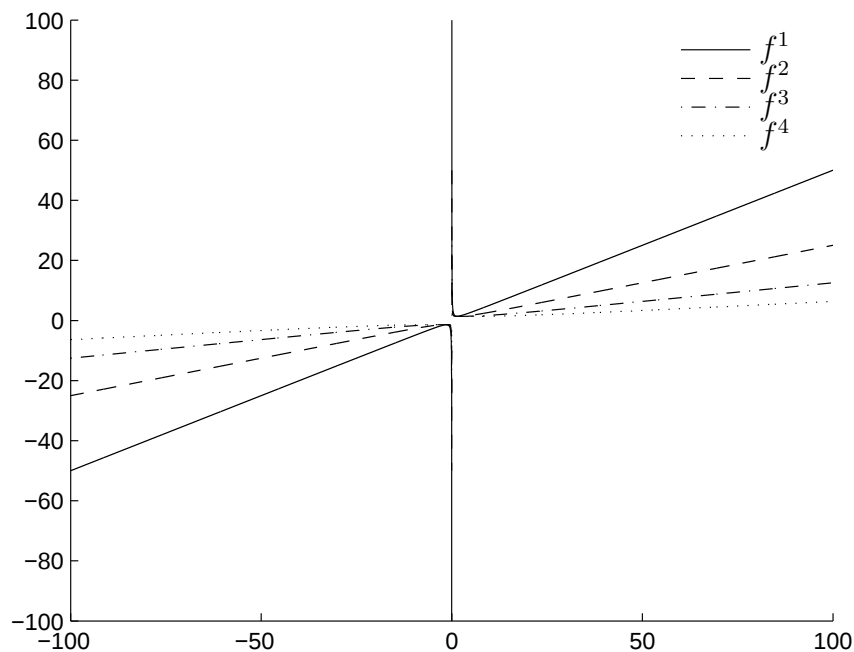
Lisäksi

$$\begin{aligned} f^{-1}(4) &= \{-2, 2\}; \\ f^{-1}(-2) &= \emptyset; \\ f^{-2}(4) &= f^{-1}(\{-2, 2\}) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}. \end{aligned}$$

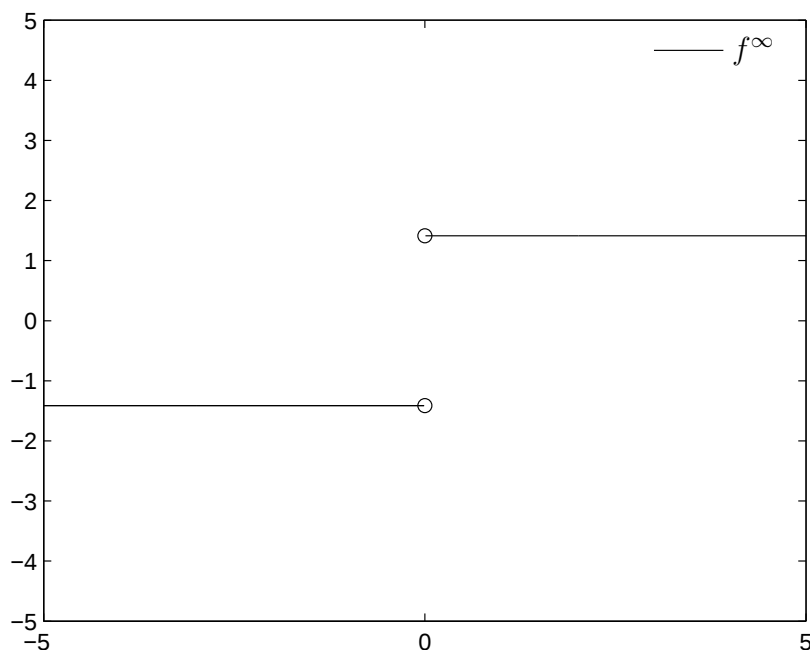
Palataan takaisin Esimerkin 2.1 tilanteeseen. Kuvassa 1 on Esimerkin 2.1 funktion f potenssien f^n kuvaajat arvoilla $n = 1, 2, 3, 4$. Kuvasta 1 nähdään, että kun n kasvaa, funktiot f^n ”lähestyvät” funktiota $f^\infty : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$,

$$f^\infty(x) = \begin{cases} -\sqrt{2}, & \text{kun } x < 0, \text{ ja} \\ \sqrt{2}, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

Funktio f^∞ on esitetty Kuvassa 2.



Kuva 1: Esimerkin 2.1 funktion f potensseja f^n



Kuva 2: Esimerkin 2.1 funktion f potenssien f^n ”rajafunktio” f^∞

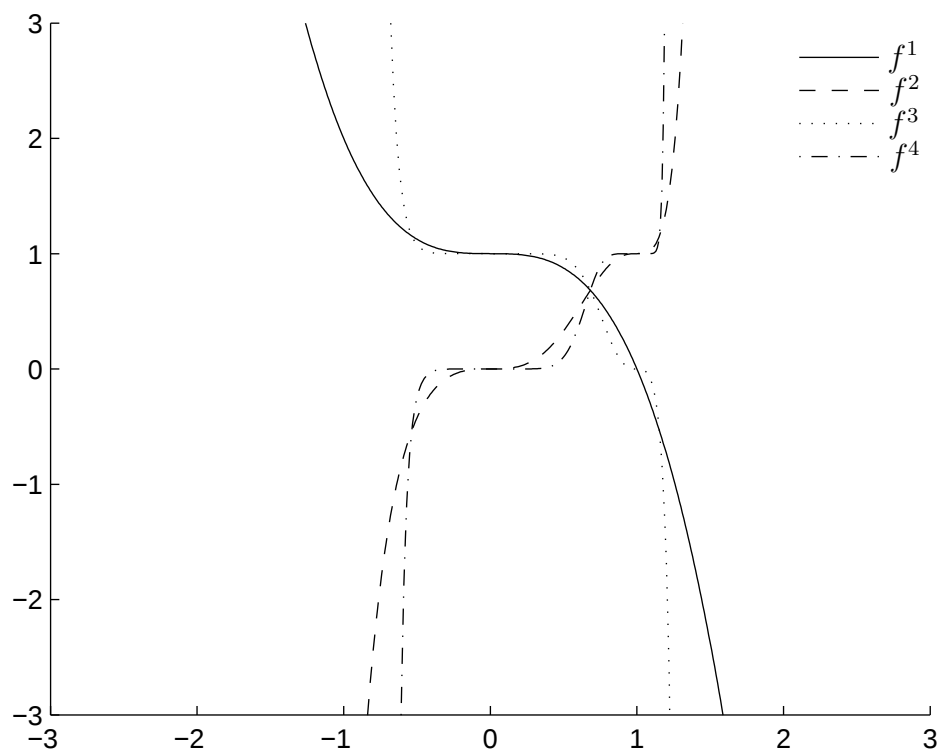
Esimerkistä 2.1 voi herätä kysymys, miten alkuarvauksen x_0 valinta vaikuttaa saatavaan lukujonoon $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Kuvan 2 perusteella voi arvella, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = f^\infty(x_0) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{kun } x_0 > 0, \text{ ja} \\ -\sqrt{2}, & \text{kun } x_0 < 0. \end{cases}$$

Siis alkuarvauksesta x_0 riippuen saadaan jompi kumpi yhtälön $x^2 = 2$ juurista $-\sqrt{2}$ tai $\sqrt{2}$. Lisäksi Kuvan 1 perusteella voi arvella, että jos $|x_0|$ on suuri, halutun tarkkuuden saaminen likiarvolle vaatii useampien lukujen x_n laskemista, kuin jos valittaisiin esimerkiksi $x_0 = 1$.

Esimerkki 2.4. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^3 + 1$. Kuvassa 3 on funktion f ensimmäisiä potensseja.

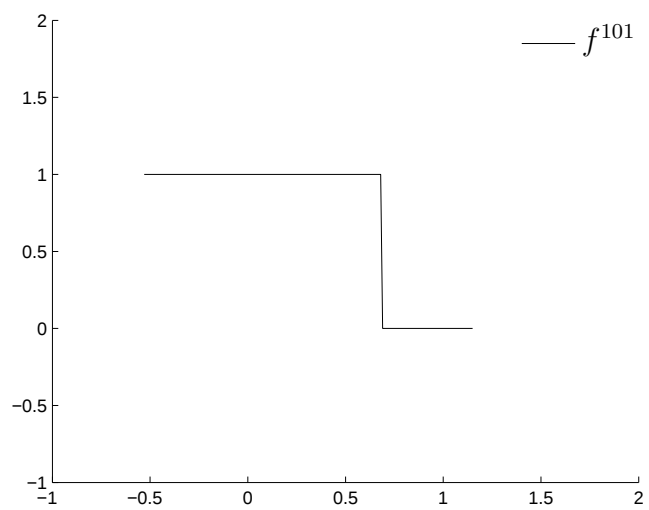
Kuvan 3 perusteella vaikuttaa siltä, että kaikkien funktion f potenssien kuvaajat kulkevat pisteen $(x, y) \approx (0.8, 0.8)$ kautta. Lisäksi Kuvasta 3 voi havaita,



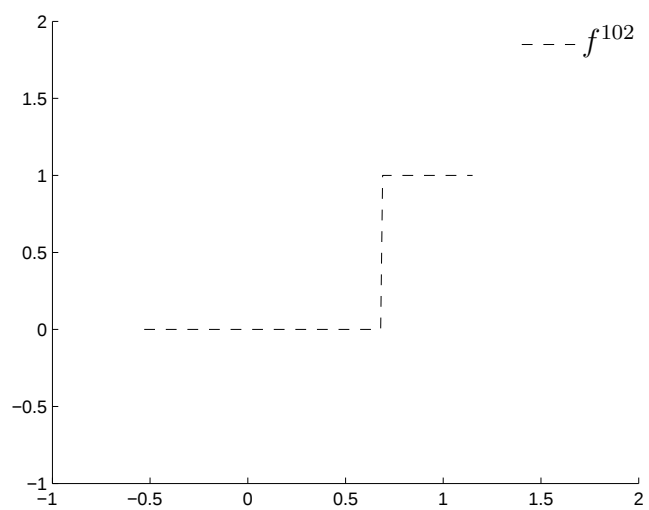
Kuva 3: Esimerkin 2.4 funktion f potensseja f^n

että funktiot f^{1+2n} , missä $n \in \mathbb{N}_0$, muistuttavat toisiaan. Jos n kasvaa, funktiot f^{1+2n} "lähestyvät" erästä funktiota. Merkitään tätä funktiota $f^{\infty,1}$.

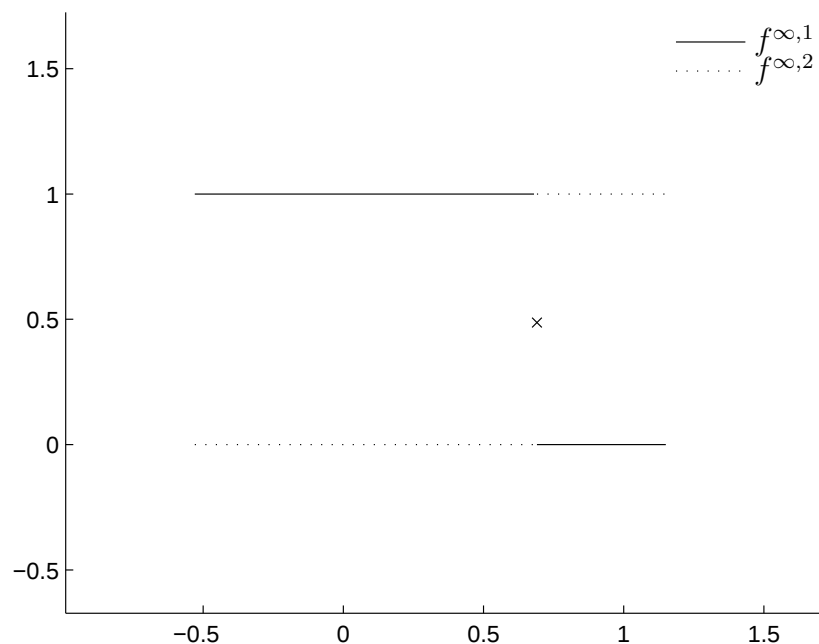
Funktioiden f^{2+2n} , missä $n \in \mathbb{N}_0$, tilanne on vastaava. Funktiot muistuttavat toisiaan ja "lähestyvät" erästä toista funktiota. Merkitään funktiota $f^{\infty,2}$. Kuvassa 4 on funktio f^{101} ja Kuvassa 5 on funktio f^{102} . Kuvassa 6 on esitetty mainitut rajafunktiot $f^{\infty,1}$ ja $f^{\infty,2}$. Potenssien f^n , $n \in \mathbb{N}$, kuvaajien yhteinen piste on merkitty Kuvaan 6 rastilla. Se on yhteinen myös rajafunktioiden $f^{\infty,1}$ ja $f^{\infty,2}$ kuvaajille.



Kuva 4: Esimerkin 2.4 funktion f potenssi f^{101}



Kuva 5: Esimerkin 2.4 funktion f potenssi f^{102}



Kuva 6: Esimerkin 2.4 ”rajafunktiot” $f^{\infty,1}$ ja $f^{\infty,2}$.

Määritelmä 2.5. Olkoon $n \in \mathbb{N}_0$, X joukko, $a \in X$ ja $f : X \rightarrow X$ funktio. Käytämme seuraavia nimityksiä:

- (i) Alkio $f^n(a)$ on alkion a *n:s iteraatti kuvauksessa f* . [7, s. 6]
- (ii) Joukko $\{a, f(a), f^2(a), \dots\}$ on alkion a *rata kuvauksessa f* . [7, s. 10]

Esimerkin 2.4 ja Kuviin 3-6 liittyvä tarkastelu voi olla hyödyllinen, jos ollaan kiinnostuneita siitä, milloin lähtöpisteen rata kuvauksessa on rajoitettu. Kuvasta 6 nähdään, että pisteen $x \in \mathbb{R}$ rata on rajoitettu Esimerkin 2.4 kuvauksessa f , jos x kuuluu tietylle välille, Kuvasta 6 luettuna välille $[-0.5, 1.1]$. Tein vastaavia reaali-funktioiden potenssien kuvaajien piirtämiseen perustuvia tarkasteluja tutkiessani Mandelbrotin joukkoa (katso Määritelmä 4.8). Tarkastelut eivät kuitenkaan ole tarpeeksi kypsässä muodossa, jotta ne voisi esittää tässä.

Lauseet 2.6 ja 2.7 sisältävät ajatuksen: ”jos jokin iteraatti on sama kuin toinen aiemmin saatu iteraatti, niin iteraatit alkavat toistumaan”.

Lause 2.6. Olkoon X epätyhjä joukko, $f : X \rightarrow X$ funktio ja $a \in X$. Olkoon lisäksi $f^n(a) = a$ jollekin $n \in \mathbb{N}$. Tällöin a rata kuvauksessa f sisältyy joukkoon

$$\{a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a)\}.$$

Todistus. Olkoon $k \in \mathbb{N}_0$ mielivaltainen. Voidaan kirjoittaa

$$k = qn + r$$

jollekin $q, r \in \mathbb{N}_0, 0 \leq r \leq n - 1$. Nyt

$$a = f^n(a) = f^n(f^n(a)) = f^{2n}(a) = \dots = f^{qn}(a).$$

Siis yhtäsuuruus $a = f^{qn}(a)$ saadaan soveltamalla oletusta $a = f^n(a)$ q kertaa. Nyt

$$f^r(a) = f^r(f^{qn}(a)) = f^{qn+r}(a) = f^k(a).$$

Väite seuraa. □

Lause 2.7. Olkoon X epätyhjä joukko, $f : X \rightarrow X$ funktio ja $a \in X$. Olkoon lisäksi $f^{n+m}(a) = f^n(a)$ jollekin $n, m \in \mathbb{N}$. Tällöin alkion a rata kuvauksessa f sisältyy joukkoon

$$\{a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n+m-1}(a)\}.$$

Todistus. Olkoon $k \in \mathbb{N}_0$ mielivaltainen. Osoitetaan, että

$$f^k(a) \in \{a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n+m-1}(a)\} = A.$$

Koska $n + m - 1 \geq n$, niin ehdosta $0 \leq k \leq n$ seuraa

$$f^k(a) \in \{a, f(a), f^2(a), \dots, f^n(a)\} \subset A.$$

Oletetaan, että $k \geq n + 1$. Nyt voidaan kirjoittaa

$$k = n + qm + r$$

jollekin $q, r \in \mathbb{N}_0, 0 \leq r \leq m - 1$. Oletus $f^{n+m}(a) = f^n(a)$ voidaan kirjoittaa muodossa $f^n(a) = f^m(f^n(a))$. Soveltamalla oletusta q kertaa saadaan

$$f^n(a) = f^m(f^n(a)) = f^m(f^m(f^n(a))) = f^{2m}(f^n(a)) = \dots = f^{qm}(f^n(a)) = f^{n+qm}(a).$$

Nyt

$$f^k(a) = f^{n+qm+r}(a) = f^r(f^{n+qm}(a)) = f^r(f^n(a)) = f^{n+r}(a).$$

Väite seuraa. □

Määritelmä 2.8. Käytämme seuraavia nimityksiä:

- (i) Lauseen 2.6 tilanteessa a on kuvauksessa f *n -jaksollinen*. Tällöin pienintä lukua k , jolle $f^k(a) = a$, sanotaan alkion a jaksoksi ja joukkoa

$$\{a, f(a), \dots, f^{k-1}(a)\}$$

sanotaan alkion a *sykkliseksi kuvauksessa f* tai kuvauksen f *k -sykkliseksi*.

- (ii) Lauseen 2.7 tilanteessa alkio a on kuvauksessa f *lopulta n -jaksollinen*. Tällöin pienintä lukua k , jolla $f^{n+k}(a) = f^n(a)$, sanotaan alkion a *lopulta alkavan syklin jaksoksi* ja joukkoa

$$\{f^n(a), f^{n+1}(a), \dots, f^{n+k-1}(a)\}$$

kutsutaan alkion a *lopulta alkavaksi k -sykkliseksi kuvauksessa f* tai kuvauksen f *lopulta alkavaksi k -sykkliseksi*.

Sanomme lisäksi, että joukko $f^{-n}(a)$ (vastaavasti $f^{-n}(A)$) on alkion a (vastaavasti joukon A) n -juuri kuvauksessa f .

Määritelmän 2.8 nimitykset ovat peräisin lähteistä [3] ja [7, s. 11], tosin niitä on muokattu hieman. Kirjoittaja keksi itse nimityksen n -juuri.

Jos a on n -jaksollinen kuvauksessa f , niin Määritelmän 2.8 mukaan a on lopulta n -jaksollinen kuvauksessa f .

3. Kompleksilukujen perusominaisuuksia

Tämän luvun asioista voi lukea suomenkielisistä kirjoista [1] ja [9].

Kompleksiluvut ovat muotoa $z = x + iy$, missä $x, y \in \mathbb{R}$ ja $i^2 = -1$. Luvun i määritelmästä ja reaalilukujen laskusäännöistä seuraa, että kompleksiluvut toteuttavat useimmat tavallisimmista reaalilukujen laskusäännöistä. Lisäksi voidaan näyttää, että kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ on kunta.

Olkoot jatkossa $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ mielivaltaisia ja $z = x + iy, w = a + ib$. Käytämme seuraavia nimityksiä:

- (i) luku x on luvun z *reaaliosa*, $x = \operatorname{Re}(z)$;
- (ii) luku y on luvun z *imaginaariosa*, $y = \operatorname{Im}(z)$;
- (iii) luku i on *imaginaariyksikkö*.

Asetetaan $z = w$, jos ja vain jos $x = a$ ja $y = b$. Nyt kuvaus $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2, s(z) = (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ on bijektio. Siis jokaista kompleksilukua vastaa täsmälleen yksi reaalitason $\mathbb{R}^2$ piste.

Kompleksiluvut voidaan siis esittää tason pisteinä. Iteroimalla saatavan kompleksilukujonon pisteet tasoon piirtämällä voi saada mielenkiintoisia kuvioita. Mielenkiintoisia kuvioita voi myös saada etsimällä kompleksiluvut, joilla on jokin ominaisuus, esimerkiksi ne luvut, jotka käyttäytyvät jossakin iteraatiossa tietyllä tavalla.

Kompleksiluvun z *moduli* on reaaliluku

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Luvun z moduli vastaa siis tason $\mathbb{R}^2$ euklidista normia. Jos $y = 0$ eli $z = x \in \mathbb{R}$, niin $|z| = \sqrt{x^2}$ on luvun z itseisarvo. Moduli on siis reaalilukujen itseisarvon yleistys.

Luvulla $z \in \mathbb{C}$ on napakoordinaattiesitys

$$z = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \text{ missä } r \geq 0 \text{ ja } \theta \in \mathbb{R}.$$

Jos $z \neq 0$, niin kulma θ voidaan määritellä täysiä kierroksia lukuunottamatta yksikäsitteisesti. Sanotaan, että origon ja pisteen z kautta kulkevan suoran sekä reaaliakselin välinen kulma on luvun $z \neq 0$ *argumentti* eli *vaihekulma* $\theta = \arg(z)$.

Vaihekulmasta saadaan yksikäsitteinen, jos annetaan lisärajoite, esimerkiksi vaatimalla, että $\theta \in [0, 2\pi[$. Sanotaan, että tämän ehdon toteuttava luvun z vaihekulma θ kuuluu argumentin *päähaaraan* ja merkitään $\text{Arg}(z) = \theta$.

Kompleksiluvun $z = x + iy$ *liittoluku* eli *kompleksikonjugaatti* on

$$\bar{z} = x - iy.$$

Suoralla laskulla nähdään, että

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 - (-1)y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Lause 3.1. *Olkoot $z, w \in \mathbb{C}$. Modulille pätee*

- (i) $|z| = 0$, jos ja vain jos $z = 0$;
- (ii) $|z| = |\bar{z}|$;
- (ii) $|zw| = |z||w|$;
- (iv) $|z| + |w| \geq |z + w| \geq ||z| - |w|| \geq \begin{cases} |z| - |w| \\ |w| - |z| \end{cases}$.

Lause 3.2. *Olkoot $z, w \in \mathbb{C}$ sekä $c \in \mathbb{R}$. Konjugaatille pätee*

- (i) $\bar{c} = c$;
- (ii) $\bar{\bar{z}} = z$;
- (iii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
- (iv) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;

Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$ ja $z = x + iy$. Koska ehto $|z| = 0$ on yhtäpitävä ehdon $|z|^2 = x^2 + y^2 = 0$ kanssa ja $x^2 + y^2 = 0$, jos ja vain jos $x = y = 0$, niin $|z| = 0$, jos ja vain jos $z = x + iy = 0 + i \cdot 0 = 0$. Tämä perustelee Lauseen 3.1 kohdan (i). Lauseiden 3.1 ja 3.2 muut kohdat löytyvät kirjasta [1, ss. 7 – 10].

4. Mandelbrotin joukko

Olkoon jatkossa $c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$ sekä $f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f_c(z) = z^2 + c$. Merkintätapa on peräisin kirjasta [10]. Nyt esimerkiksi

$$\begin{aligned}f_c^0(z) &= z; \\f_c^1(z) &= z^2 + c; \\f_c^2(z) &= (z^2 + c)^2 + c = z^4 + 2z^2c + c^2 + c; \\f_c^0(0) &= 0; \\f_c^1(0) &= c; \\f_c^2(0) &= c^2 + c; \\f_c^3(0) &= (c^2 + c)^2 + c = c^4 + 2c^3 + c^2 + c.\end{aligned}$$

Nähdään, että kun $n \in \mathbb{N}$, niin $f_c^n(0)$ on kompleksimuuttujan c reaalikertoiminen polynomi, jonka aste on 2^{n-1} .

Tarkastellaan seuraavaksi origon rataa kuvauksessa f_c vakion c eri arvoilla. Esimerkkien 4.1-4.6 kaltaisia laskuja on esimerkiksi pdf-tiedostossa [8].

Esimerkki 4.1. Olkoon $c = 0$. Triviaalisti luvun c arvosta riippumatta $f_c^0(0) = 0$. Lisäksi tässä tapauksessa $f_c^1(0) = 0$. Koska $f_c^1(0) = f_c^0(0)$, niin origo on kuvauksessa f_c 1-jaksollinen ja Lauseen 2.6 nojalla origon rata kuvauksessa f_c on äärellinen joukko $\{0\}$.

Esimerkki 4.2. Olkoon $c = 1$. Nyt

$$\begin{aligned}f_c^1(0) &= 1; \\f_c^2(0) &= 1^2 + 1 = 2; \\f_c^3(0) &= 2^2 + 1 = 5; \\f_c^4(0) &= 5^2 + 1 = 26; \\f_c^5(0) &= 26^2 + 1 = 677; \\f_c^6(0) &= 677^2 + 1 = 458330.\end{aligned}$$

Luvut $f_c^n(0)$ etääntyvät origosta nopeasti luvun n kasvaessa. Osoitetaan, että $f_c^n(0) \rightarrow \infty$, kun $n \rightarrow \infty$. Tätä varten todistetaan Lause 4.3.

Lause 4.3. Olkoon $c, z \in \mathbb{R}, c \geq 0$. Tällöin

$$f_c^n(z) \geq z^{2^n} \quad (4.1)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Oletuksista seuraa, että

$$f_c^1(z) = z^2 + c \geq z^2 = z^{2^1}. \quad (4.2)$$

Siis epäyhtälö (4.1) pätee arvolla $n = 1$. Oletetaan, että (4.1) pätee jollakin $n \in \mathbb{N}$. Koska kuvaus $z \mapsto z^2$ on kasvava kaikilla $z \geq 0$ ja $f_c^n(z) \geq z^{2^n} \geq 0$, saadaan

$$(f_c^n(z))^2 \geq (z^{2^n})^2 = z^{2^{n+1}}. \quad (4.3)$$

Toisaalta sijoittamalla $f_c^n(z)$ luvun z paikalle epäyhtälöön (4.2) saadaan

$$f_c^{n+1}(z) = f_c^1(f_c^n(z)) \geq (f_c^n(z))^2. \quad (4.4)$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (4.3) ja (4.4) saadaan

$$f_c^{n+1}(z) \geq z^{2^{n+1}}.$$

Induktioperiaatteen nojalla epäyhtälö (4.1) pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$. □

Palataan Esimerkkiin 4.2. Koska $c = 1 \geq 0$, niin Lauseen 4.3 nojalla $f_c^n(z) \geq z^{2^n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{R}$. Nyt

$$f_c^{n+2}(0) = f_c^n(f_c^2(0)) = f_c^n(2) \geq 2^{2^n}.$$

Näin ollen $f_c^n(0) \rightarrow \infty$, kun $n \rightarrow \infty$.

Esimerkki 4.4. Olkoon $c = -2$. Nyt

$$\begin{aligned} f_c^1(0) &= -2; \\ f_c^2(0) &= (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2; \\ f_c^3(0) &= 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2. \end{aligned}$$

Koska $f_c^3(0) = f_c^2(0)$, niin origo on kuvauksessa f_c lopulta 1-jaksollinen ja Lauseen 2.7 nojalla origon rata kuvauksessa f_c on äärellinen joukko $\{0, -2, 2\}$.

Esimerkki 4.5. Olkoon $c = i$. Nyt

$$\begin{aligned}f_c^1(0) &= i; \\f_c^2(0) &= (i)^2 + i = -1 + i; \\f_c^3(0) &= (-1 + i)^2 + i = (1 - 2i + i^2) + i = -i; \\f_c^4(0) &= (-i)^2 + i = -1 + i.\end{aligned}$$

Koska $f_c^4(0) = f_c^2(0)$, niin origo on kuvauksessa f_c lopulta 2-jaksollinen ja Lauseen 2.7 nojalla origon rata kuvauksessa f_c on äärellinen joukko $\{0, i, -1 + i, -i\}$.

Esimerkki 4.6. Olkoon $c = -i$. Nyt

$$\begin{aligned}f_c^1(0) &= -i; \\f_c^2(0) &= (-i)^2 - i = -1 - i; \\f_c^3(0) &= (-1 - i)^2 - i = (1 + 2i + (-i)^2) - i = i; \\f_c^4(0) &= i^2 - i = -1 - i.\end{aligned}$$

Koska $f_c^4(0) = f_c^2(0)$, niin origo on kuvauksessa f_c lopulta 2-jaksollinen ja Lauseen 2.7 nojalla origon rata kuvauksessa f_c on äärellinen joukko $\{0, -i, -1 - i, i\}$.

Verrataan Esimerkkejä 4.5 ja 4.6. Luvun c arvoiksi asetetut luvut i ja $-i$ ovat toistensa konjugaatteja. Toisaalta radan $\{0, i, -1 + i, -i\}$ luvut ovat radan $\{0, -i, -1 - i, i\}$ lukujen konjugaatteja. Tämä pätee yleisesti liittolukuparille.

Lause 4.7. *Olkoon $P(z)$ reaalikertoiminen polynomi. Tällön $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.*

Todistus. Oletuksen mukaan $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, jollekin $n \in \mathbb{N}_0$ ja joillekin $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, \dots, n$. Konjugaatin ominaisuuksista seuraa

$$P(\bar{z}) = \sum_{k=0}^n a_k (\bar{z})^k = \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} = \overline{P(z)}$$

□

Lauseen 4.7 väite löytyy yleisemmässä muodossa kirjasta [1, s.7].

Koska $f_c^n(0)$ on reaalikertoiminen kompleksimuuttujan c polynomi, niin $f_c^n(0) = \overline{f_c^n(0)}$ kaikilla $c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Siis origon rata kuvauksessa f_c saadaan origon radasta kuvauksessa f_c konjugoimalla.

Määritelmä 4.8. *Mandelbrotin joukko $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$ koostuu niistä pisteistä $c \in \mathbb{C}$, joille origon rata kuvauksessa f_c on rajoitettu. Siis*

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \leq s \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N} \text{ jollekin } s \in (0, \infty)\}.$$

Esimerkeissä 4.1-4.6 nähtiin, että $0, -2, i, -i \in \mathcal{M}$ ja että $1 \notin \mathcal{M}$. Lisäksi Lauseen 4.7 seurauksena saadaan:

Seuraus 4.9. *Mandelbrotin joukko on symmetrinen reaaliakselin suhteen. Siis, jos $c \in \mathcal{M}$, niin $\bar{c} \in \mathcal{M}$.*

Jos luku c on kaukana origosta, voidaan ajatella, että $|c^2| \gg |c|$ ja siten

$$\begin{aligned} f_c^1(0) &= c; \\ f_c^2(0) &= c^2 + c \approx c^2; \\ f_c^3(0) &= (f_c^1)^2 + c \approx (c^2)^2 + c \approx c^4. \end{aligned}$$

Luvut $f_c^n(0)$ vaikuttaisivat tällöin etääntyvän origosta nopeasti. Saadaan arvio

$$|f_c^n(0)| \approx |c|^{2^{n-1}}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lauseessa 4.10 on täsmällisempi väite.

Seuraus 4.14 löytyy artikkelista [5, s. 18]. Kirjoittajan muotoilemat Lauseet 4.10 ja 4.13 sekä Seuraus 4.12 tähtäävät tämän tuloksen todistamiseen.

Lause 4.10. *Olkoon $c \in \mathbb{C}$ siten, että $|c| > 2$. Tällöin*

$$|f_c^n(0)| \geq (|c| - 1)^{2^{n-2}} |c| \quad (4.5)$$

kaikilla $n \geq 2$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla. Modulin laskusääntöjen (katso Lause 3.1) nojalla saadaan

$$|f_c^2(0)| = |c^2 + c| \geq |c^2| - |c| = |c|^2 - |c| = |c|(|c| - 1) = |c|(|c| - 1)^{2^{2-2}}.$$

Siis epäyhtälö (4.5) pätee, kun $n = 2$. Oletetaan toisaalta, että epäyhtälö (4.5) pätee jollakin $n \geq 2$. Nyt

$$|f_c^{n+1}(0)| = |(f_c^n(0))^2 + c| \geq |(f_c^n(0))^2| - |c| = |f_c^n(0)|^2 - |c|. \quad (4.6)$$

Koska $|c| > 2$, niin

$$|c| - 1 > 1. \quad (4.7)$$

Korottamalla puolittain potenssiin 2^{n-2} saadaan edelleen

$$(|c| - 1)^{2^{n-2}} > 1. \quad (4.8)$$

Nyt epäyhtälön (4.5) luvuille saadaan arvio

$$|f_c^n(0)| \geq (|c| - 1)^{2^{n-2}} |c| > |c| \geq 0.$$

Näin ollen korottamalla yhtälö (4.5) puolittain neliöön saadaan

$$|f_c^n(0)|^2 \geq ((|c| - 1)^{2^{n-2}} |c|)^2.$$

Vähentämällä puolittain $|c|$ saadaan

$$|f_c^n(0)|^2 - |c| \geq ((|c| - 1)^{2^{n-2}} |c|)^2 - |c| = (|c| - 1)^{2^{(n+1)-2}} |c|^2 - |c|. \quad (4.9)$$

Huomaamalla, että $|c|^2 = |c| + |c|(|c| - 1)$, saadaan

$$\begin{aligned} (|c| - 1)^{2^{(n+1)-2}} |c|^2 - |c| &= (|c| - 1)^{2^{(n+1)-2}} [|c| + |c|(|c| - 1)] - |c| \\ &= (|c| - 1)^{2^{(n+1)-2}} |c| + \underbrace{(|c| - 1)^{2^{(n+1)-2}}}_{>1} |c| \underbrace{(|c| - 1)}_{>1} - |c| \\ &> (|c| - 1)^{2^{(n+1)-2}} |c|. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Viimeinen epäyhtälö perustuu epäyhtälöihin (4.7) ja (4.8). Yhdistämällä epäyhtälöt (4.6), (4.9) ja (4.10) saadaan

$$|f_c^{n+1}(0)| \geq (|c| - 1)^{2^{(n+1)-2}} |c|$$

ja induktioperiaatteen nojalla väite on todistettu. $\square$

Määritelmä 4.11. Olkoon $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ja $r > 0$. Sanotaan, että joukko

$$B(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\} = \{a + ib \in \mathbb{C} : (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\}$$

on z -keskinen r -säteinen avoin kiekko. Vastaavasti

$$\overline{B}(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\}$$

on z -keskinen r -säteinen suljettu kiekko. Yleisemmin joukko $U \subset \mathbb{C}$ on avoin, jos kaikilla $z \in U$ on olemassa $r > 0$ siten, että $B(z, r) \subset U$. Joukko U on suljettu, jos sen komplementti $\mathbb{C} \setminus U$ on avoin.

Jos $|c| > 2$, niin antamalla epäyhtälössä (4.5) luvun n kasvaa nähdään, että $|f_c^n(0)| \rightarrow \infty$, kun $n \rightarrow \infty$. Määritelmän 4.11 nimityksin Lauseesta 4.10 seuraa:

Seuraus 4.12. Mandelbrotin joukko sisältyy origokeskiseen 2-säteiseen suljettuun kiekkoon.

Tästä lähtien tutkittaessa kuuluuko piste c Mandelbrotin joukkoon, voidaan siis rajoittua tapaukseen $|c| \leq 2$. Lisäksi, koska Esimerkin 4.4 nojalla $-2 \in \mathcal{M}$, niin $\overline{B}(0, 2)$ on pienin origokeskinen kiekko, joka sisältää joukon $\mathcal{M}$. Siis

$$\min\{r > 0 : \mathcal{M} \subset \overline{B}(0, r)\} = 2. \quad (4.11)$$

Jos c on lähellä origoa, mutta iteraatit $f_c^n(0)$ menevät jossakin vaiheessa kauas origosta, niin iteraatit alkavat etääntymään origosta, eivätkä enää palaa. Täsmällisemmin ajatus on esitetty Lauseessa 4.13

Lause 4.13. Oletetaan, että $|c| \leq 2$ ja että $|f_c^{n_0}(0)| > 2$ jollakin $n_0 \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$|f_c^{n_0+n}(0)| \geq 4^n(|f_c^{n_0}(0)| - 2) + 2 \quad (4.12)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla. Jos $n = 0$, niin suoralla sijoituksella nähdään, että epäyhtälö (4.12) pätee. Oletetaan, että epäyhtälö 4.12 pätee jollakin $n \in \mathbb{N}_0$. Tiedetään, että

$$|f_c^{n_0+n+1}(0)| \geq |f_c^{n_0+n}(0)|^2 - |c|. \quad (4.13)$$

Koska $|f_c^{n_0+n}(0)| \geq 4^n(|f_c^{n_0}(0)| - 2) + 2 > 2 \geq 0$, saadaan

$$\begin{aligned}
|f_c^{n_0+n}(0)|^2 - |c| &\geq (4^n(|f_c^{n_0}(0)| - 2) + 2)^2 - |c| \\
&= (4^n(|f_c^{n_0}(0)| - 2))^2 + 2 \cdot 4^n(|f_c^{n_0}(0)| - 2) \cdot 2 + 2^2 - 2 \\
&= (4^n(|f_c^{n_0}(0)| - 2))^2 + 4^{n+1}(|f_c^{n_0}(0)| - 2) + 2 \\
&> 4^{n+1}(|f_c^{n_0}(0)| - 2) + 2
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (4.13) ja (4.14) saadaan

$$|f_c^{n_0+n+1}(0)| > 4^{n+1}(|f_c^{n_0}(0)| - 2) + 2.$$

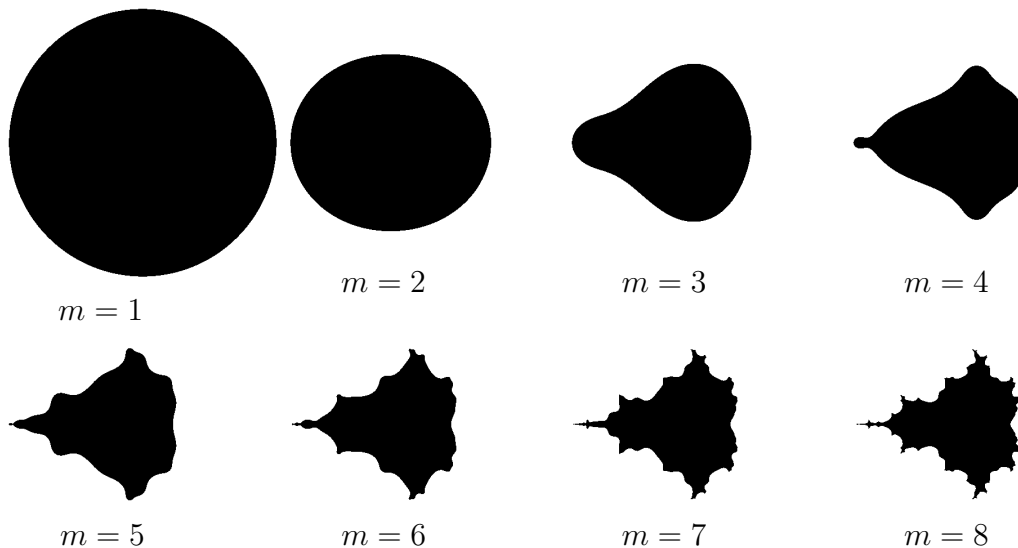
Induktioperiaatteen nojalla epäyhtälö (4.12) pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Epäyhtälöstä (4.12) nähdään, että $|f_c^n(0)| > 2$ kaikilla $n \geq n_0$. Siis, jos iteraatit $f_c^n(0)$ käyvät origokeskisen 2-säteisen kiekon ulkopuolella, ne eivät voi palata kiekkoon. Lisäksi, jos epäyhtälössä (4.12) annetaan luvun n kasvaa, nähdään, että $|f_c^n(0)| \rightarrow \infty$, kun $n \rightarrow \infty$. Saadaan Seuraus 4.14.

Seuraus 4.14. *Jos $f_c^n(0)$ käy origokeskisen 2-säteisen kiekon ulkopuolella jollakin $n \in \mathbb{N}$, niin $c \notin \mathcal{M}$.*

Seuraus 4.14 antaa keinon piirtää kuvia Mandelbrotin joukosta tietokoneella. Seurauksen 4.12 nojalla pisteet c , joille $|c| > 2$, eivät kuulu joukkoon. Alue $|c| \leq 2$ voidaan puolestaan peittää ruudukolla. Valitaan tämän jälkeen luku $m \in \mathbb{N}$, joka määrää iteraatioiden lukumäärän. Valitaan jokaisesta ruudusta kompleksiluku c , esimerkiksi ruudun keskipiste, ja lasketaan tälle iteraatioita $f_c^n(0)$, $n = 1, \dots, m$.

Jos jokin iteraatio $f_c^n(0)$, $n = 1, \dots, m$ menee kiekon $\overline{B}(0, 2)$ ulkopuolelle, niin Seurauksen 4.14 nojalla piste c ei kuulu joukkoon ja tarkastelu voidaan tämän pisteen osalta lopettaa. Mahdollisesti joukkoon kuuluviksi pisteiksi jäävät ne, joille viimeinen iteraatio $f_c^m(0)$ on kiekossa $\overline{B}(0, 2)$. Väritetään nämä pisteet sisältävät ruudut mustiksi ja muut ruudut valkoisiksi. Näin saadaan kuva joukosta $\mathcal{M}$. Mitä suurempi m on, sitä tarkempi kuvasta tulee. Kuvassa 7 on luvun m arvoja 1 – 8 vastaavat kuvat. Suhteellisen tarkassa Kuvassa 8 on $m = 50$.



Kuva 7: Joukkoja $f_c^{-(m-1)}(\overline{B}(0, 2))$ luvun m eri arvoilla

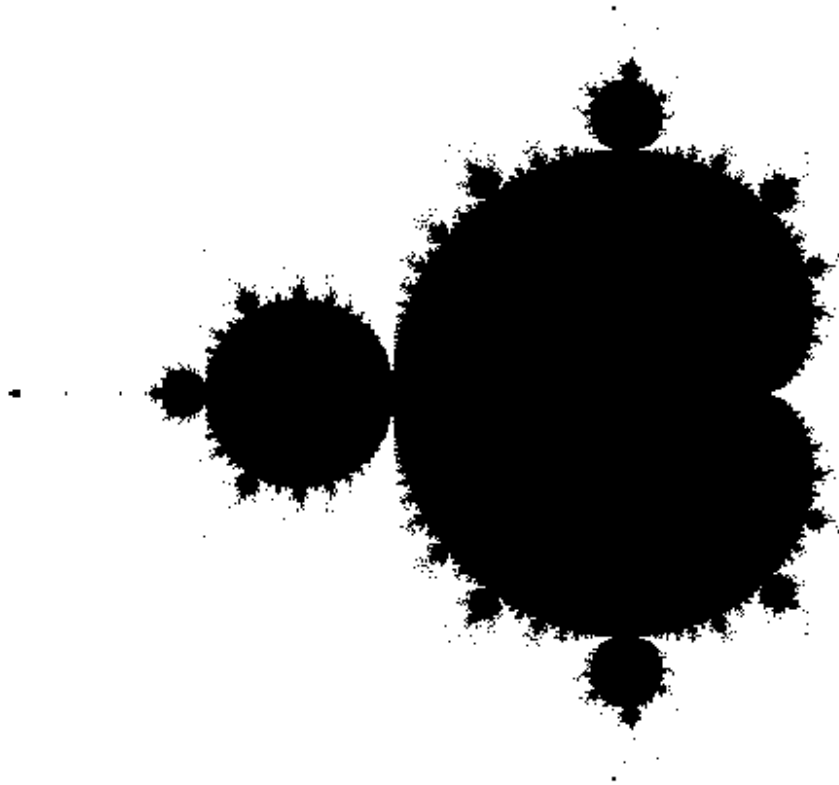
Kuviin 7 ja 8 tulevat mustalla ne pisteet, joille $f_c^m(0) = f_c^{m-1}(c) \in \overline{B}(0, 2)$ eli $c \in f_c^{-(m-1)}(\overline{B}(0, 2))$. Siis Kuvan 7 kuvat esittävät joukon $\overline{B}(0, 2)$ $(m-1)$ -juuria kuvauksessa f_c .

Kuvasta 7 voi aavistaa, että $f_c^{-((m+1)-1)}(\overline{B}(0, 2)) \subset f_c^{-(m-1)}(\overline{B}(0, 2))$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$. Tämä johtuu siitä, että jos $f_c^m(0) \notin \overline{B}(0, 2)$, niin $f_c^{m+1}(0) \notin \overline{B}(0, 2)$.

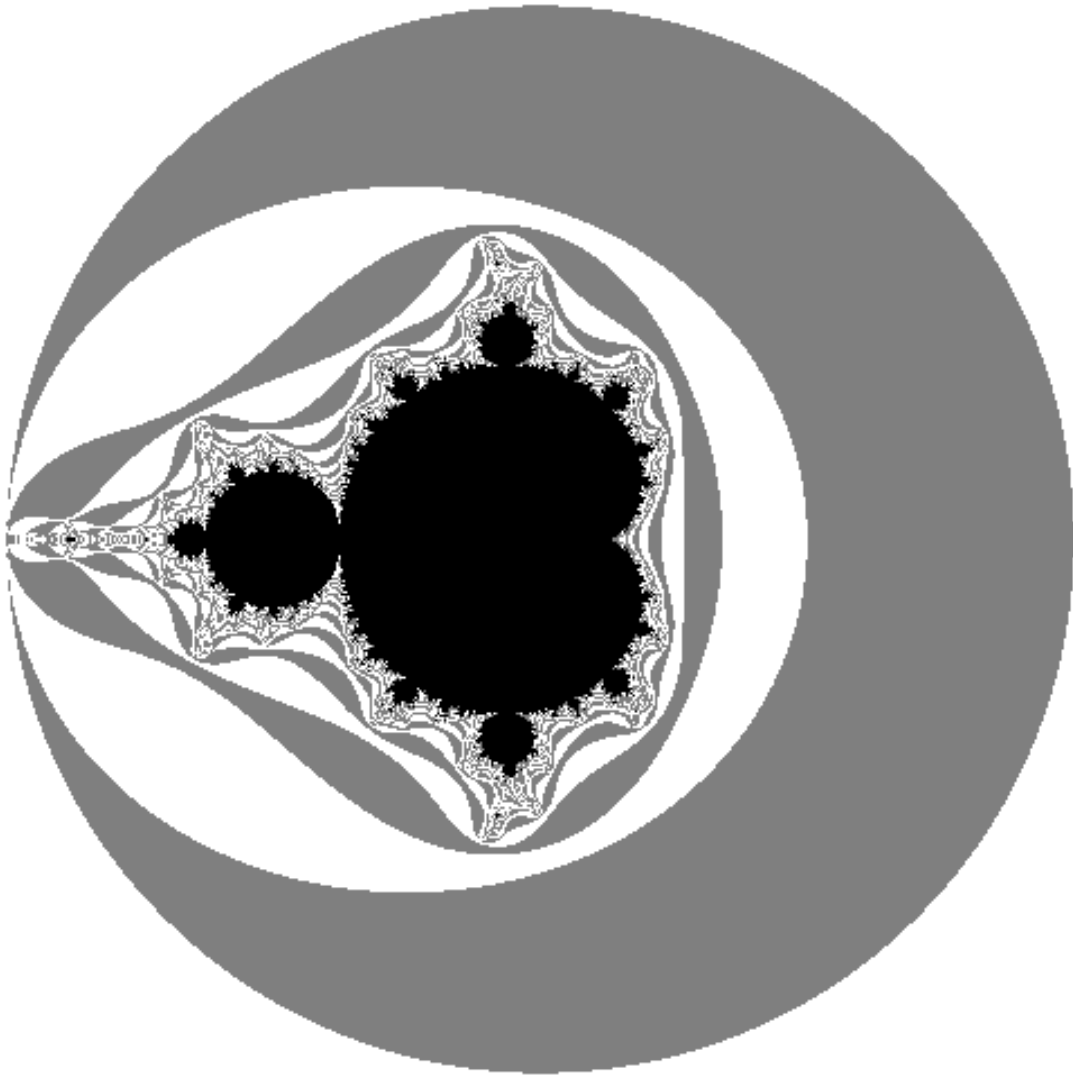
Merkitään

$$A_k = f_c^{-(k-1)}(\overline{B}(0, 2)) \setminus f_c^{-((k+1)-1)}(\overline{B}(0, 2))$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Joukot $A_k, k = 1, \dots, m-1$ ja $B_m = f_c^{-(m-1)}(\overline{B}(0, 2))$ ovat erillisiä ja niiden yhdiste on $\overline{B}(0, 2)$. Kuvassa 9 on $m = 50$. Joukot $A_k, k = 1, \dots, 49$ on väritetty harmaalla, kun k on pariton, ja valkealla, kun k on parillinen. Joukko B_{50} on sen sijaan väritetty mustalla. Joukko A_k on sitä kaoottisempi, mitä suurempi k on.

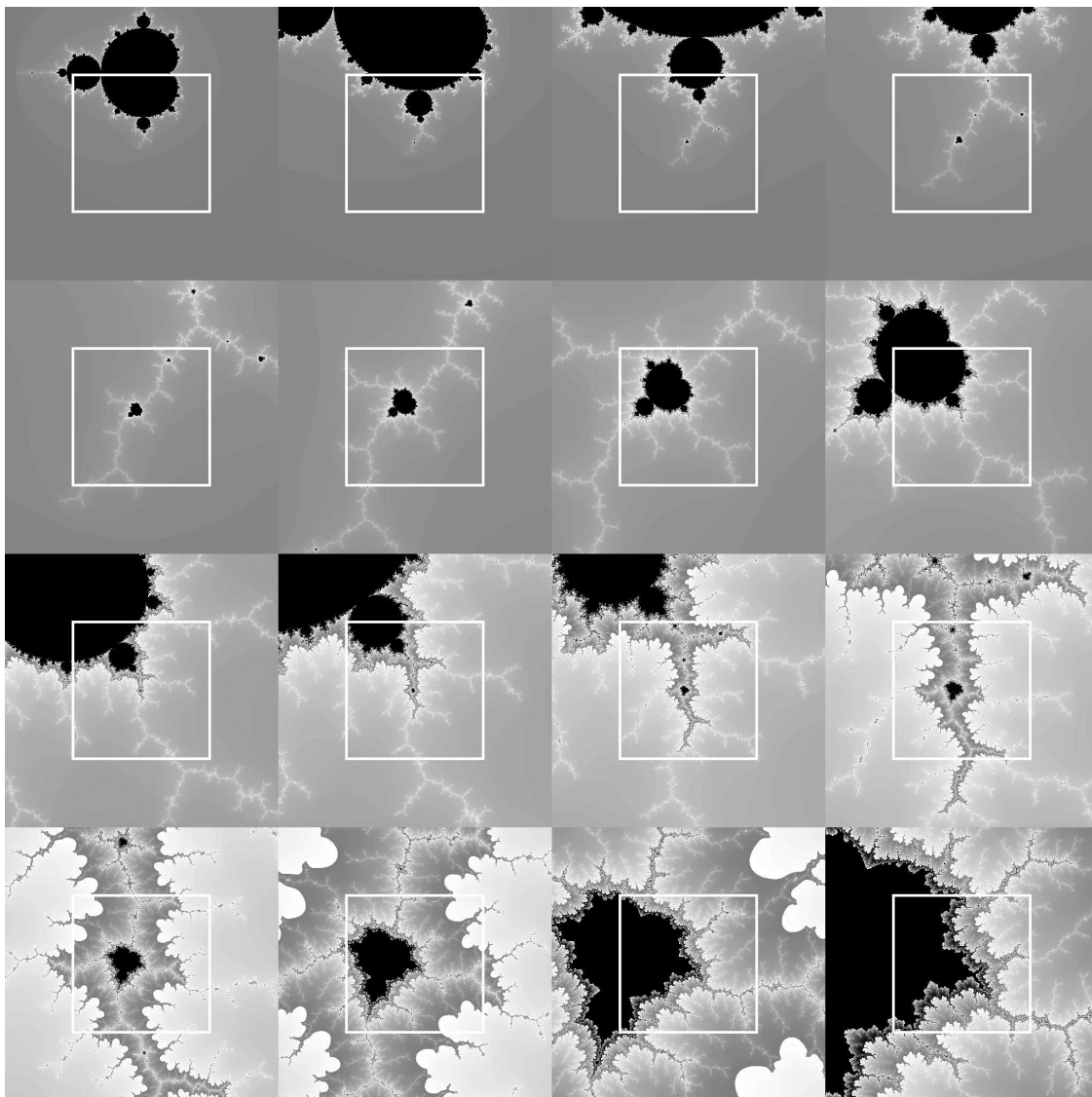


Kuva 8: Joukko $f_c^{-(50-1)}(\overline{B}(0, 2))$.



Kuva 9: Joukot $A_1, A_2, \dots, A_{49}$ sekä joukko $B_{50} = f_c^{-(50-1)}(\overline{B}(0, 2))$

Valitsemalla Kuvaan 9 sellaiset asteittain muuttuvat värit, että vierekkäisten alueiden värit ovat lähellä toisiaan, saadaan kauniita kuvia. Tällöin eri värit kuvas-
tavat sitä, miten nopeasti näillä väreillä väritetyistä alueista otettujen pisteiden
iteraattit pakenevat kiekosta $\overline{B}(0, 2)$.



Kuva 10: Zoomaus kohti pistettä $c \approx -0,15285 + 1,03968i$

Rajaamalla tarkastelualueita pienemmäksi ja suurentamalla kuvaa päästään Mandelbrotin joukkoa katsomaan tarkemmin. Kuvassa 10 on tällä tavalla zoomattu Mandelbrotin joukon kuvaa. Aluksi on otettu kuva Mandelbrotin joukosta. Tästä kuvasta on rajattu keskeltä alue (merkitty valkoisella kehyksellä), joka on

leveydeltään ja korkeudeltaan puolet alkuperäisestä kuvasta. Tämän jälkeen tästä alueesta on piirretty alkuperäisen kuvan kokoinen kuva. Tällaisia zoomauksia on tehty 15. Näin muodostuneet 16 kuvaa on ladottu vierekkäin siten, että ensimmäiset neljä kuvaa ovat ylärivissä järjestyksessä vasemmalta oikealle, seuraavat neljä kuvaa ovat toiseksi ylimmässä rivissä järjestyksessä vasemmalta oikealle jne. Ensimmäisen kuvan esittämän alueen leveys (vasemman alanurkan kompleksiluvun ja oikean alanurkan kompleksiluvun erotuksen moduli) on 2. Koska kuvan mittakaava kasvaa kaksinkertaiseksi joka zoomauksella, on viimeisen kuvan esittämän alueen leveys $2 \cdot 2^{-15} = 2^{-13} \approx 0,00012$. Kuvat on piirretty siten, että kuvat esittävät neliön muotoisia kompleksitason alueita.

Kuvassa 10 näkyy, että kun Mandelbrotin joukkoa katsotaan tarkemmin, nähdään uusia yksityiskohtia. Lisäksi Mandelbrotin joukossa on sellaisia osia, jotka näyttävät Mandelbrotin joukolta, ks. Kuvan 10 toisen rivin oikeanpuoleisin kuva.

Internetistä löytyy paljon sivustoja, joilla voi zoomata tällä tavalla. Yksi helpokäyttöinen on [12]. Kuvat 7-10 on piirretty Matlab-funktiolla [11], jota on hie-
man muokattu.

Lauseen 4.15 väite löytyy julkaisusta [4, s. 10], jossa sanotaan, että Mandelbrotin joukko on kompakti. Tämä tarkoittaa sitä, että $\mathcal{M}$ on suljettu ja rajoitettu.

Lause 4.15. *Mandelbrotin joukko on suljettu.*

Todistus. Olkoon $c \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$. Siis $|f_c^{n_0}(0)| > 2$ jollakin $n_0 \in \mathbb{N}$. Toisaalta $P(c) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, P(c) = f_c^{n_0}(0)$ on polynomi, jonka aste on 2^{n_0-1} . Polynomina P on jatkuva, eli avoimen joukon $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, 2)$ alkukuva on avoin. Koska $P(c) = f_c^{n_0}(0) \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, 2)$ eli $c \in P^{-1}(\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, 2))$, niin on olemassa $r > 0$ siten, että kaikille $w \in B(c, r)$, pätee $w \in P^{-1}(\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, 2))$. Siis kaikille $w \in B(c, r)$ pätee $P(w) = f_w^{n_0}(0) \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, 2)$ eli $w \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$. Näin ollen $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ on avoin, eli $\mathcal{M}$ on suljettu. $\square$

Lauseen 4.16 väitteen voi keksiä kuvista tai esimerkiksi työkalulla [12].

Lause 4.16. *Origokeskinen $\frac{1}{4}$ -säteinen suljettu kiekko sisältyy Mandelbrotin joukkoon.*

Todistus. Olkoon $|c| \leq \frac{1}{4}$. Osoitetaan induktiolla, että

$$|f_c^n(0)| < \frac{1}{2} \quad (4.15)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Selvästi $|f_c^0(0)| = |0| < \frac{1}{2}$. Oletetaan, että epäyhtälö (4.15) pätee jollakin $n \in \mathbb{N}_0$. Nyt

$$|f_c^{n+1}(0)| = |(f_c^n(0))^2 + c| \leq |(f_c^n)^2| + |c| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Siis epäyhtälö (4.15) pätee myös arvolla $n+1$. Induktioperiaatteen nojalla se pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Origon rata kuvauksessa f_c sisältyy siis origokeskiseen $\frac{1}{2}$ -säteiseen avoimeen kiekkoon ja siten $c \in \mathcal{M}$. Väite seuraa. $\square$

Lause 4.17. *Olkoon $c \in \mathbb{R}$ ja $c > \frac{1}{4}$. Tällöin $c \notin \mathcal{M}$.*

Todistus. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Neliöksi täydentämällä nähdään, että

$$\begin{aligned} f_c^n(0) - f_c^n(0) &= ((f_c^{n-1}(0))^2 + c) - f_c^{n-1} \\ &= (f_c^{n-1}(0))^2 - f_c^{n-1}(0) + c \\ &= (f_c^{n-1}(0))^2 - 2 \cdot f_c^{n-1}(0) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + c \\ &= \left(f_c^{n-1}(0) - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + c \geq c - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ja siis

$$f_c^n(0) \geq f_c^{n-1}(0) + c - \frac{1}{4}. \quad (4.16)$$

Arvio (4.16) pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla n . Käyttämällä arviota (4.16) k kertaa ($k \leq n$) saadaan

$$f_c^n(0) \geq f_c^{n-k}(0) + k \left(c - \frac{1}{4}\right).$$

Erityisesti arvolla $k = n$ saadaan

$$f_c^n(0) \geq f_c^0(0) + n \left(c - \frac{1}{4}\right) = n \left(c - \frac{1}{4}\right). \quad (4.17)$$

Koska $c - \frac{1}{4} > 0$, niin antamalla epäyhtälössä (4.17) luvun n kasvaa nähdään, että $|f_c^n(0)| \rightarrow \infty$, kun $n \rightarrow \infty$. $\square$

Lauseiden 4.16 ja 4.17 perusteella voidaan todeta, että

$$\max\{r > 0 : \overline{B}(0, r) \subset \mathcal{M}\} = \frac{1}{4}. \quad (4.18)$$

5. Multibrotjoukot

Kuvausta $f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f_c(z) = z^2 + c$ on helppo tutkia, koska yhden iteraation laskemiseen tarvitaan vain yksi kertolasku ja yksi yhteenlasku. Yleisemmin, jos $b \in \mathbb{N}$, niin lausekkeen $z^b + c$ laskemiseen tarvitaan $b - 1$ kertolaskua ja yksi yhteenlasku. Annetaan seuraavaksi muuttujan z eksponentille muita arvoja. Koska ei-kokonaislukupotenssien laskeminen kompleksiluvuilla ei välttämättä ole yksinkertaista, rajoitutaan tilanteeseen, jossa $b \in \mathbb{N}_0$.

Olkoon jatkossa $b \in \mathbb{N}_0, c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$ sekä $f_{b,c} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f_{b,c}(z) = z^b + c$. Näin ollen kaikilla $n \in \mathbb{N}$ $f_{b,c}^n(0)$ on muuttujan c polynomi, jonka aste on b^{n-1} .

Määritelmä 5.1. Olkoon $b \in \mathbb{N}_0$. Sanomme, että kompleksilukujen osajoukko b -multibrot, merkitään $\mathcal{M}_b$, koostuu niistä pisteistä $c \in \mathbb{C}$, joille origon rata kuvauksessa $f_{b,c}$ on rajoitettu. Siis

$$\mathcal{M}_b = \{c \in \mathbb{C} : |f_{b,c}^n(0)| \leq s \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N} \text{ jollekin } s \in (0, \infty)\}.$$

Määritelmä 5.1 on peräisin lähteestä [2]. Määritelmän 5.1 mukaan Mandelbrotin joukko on 2-multibrot eli $\mathcal{M} = \mathcal{M}_2$.

Asetetaan $c^0 = 1$ kaikilla $c \in \mathbb{C}$.

Esimerkki 5.2. Olkoon $b = 0$ ja $c \in \mathbb{C}$ mielivaltainen. Koska

$$|f_{b,c}^n(0)| = |(f_{b,c}^{n-1}(0))^b + c| = |(f_{b,c}^{n-1}(0))^0 + c| = |1 + c| \leq 1 + |c|$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$ niin origon rata kuvauksessa $f_{b,c}$ on rajoitettu. Näin ollen $\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}$.

Olkoon $b = 1$. Oletetaan, että $c = 0$. Tällöin $f_{b,c}(0) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$ ja origon rata kuvauksessa $f_{b,c}$ on rajoitettu. Oletetaan toisaalta, että $c \neq 0$. Nyt

$$\begin{aligned} f_{b,c}^0(0) &= 0; \\ f_{b,c}^1(0) &= 0^1 + c; \\ f_{b,c}^2(0) &= c^1 + c = 2c; \\ f_{b,c}^3(0) &= (2c)^1 + c = 3c; \\ f_{b,c}^n(0) &= nc, \text{ kun } n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Yhtälön (5.1) nojalla $|f_{b,c}^n(0)| = n|c|$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Näin ollen, koska $c \neq 0$, niin $|f_{b,c}^n(0)| \rightarrow \infty$, kun $n \rightarrow \infty$. Siis $c \notin \mathcal{M}_1$. Näin ollen $\mathcal{M}_1 = \{0\}$.

Olkoon jatkossa $b \geq 2$.

Esimerkki 5.3. Olkoon $b \in \mathbb{N}_0$ ja $c = 0$. Triviaalisti $f_{b,c}^0(0) = 0$. Nyt lisäksi $f_{b,c}^1(0) = 0^b + 0 = 0$. Koska $f_{b,c}^1(0) = f_{b,c}^0(0)$, niin origo on kuvauksessa $f_{b,c}(0)$ 1-jaksollinen ja Lauseen 2.6 nojalla origon rata kuvausessa $f_{b,c}$ on äärellinen joukko $\{0\}$. Siis $0 \in \mathcal{M}_b$.

Kirjoittaja onnistui itsenäisesti tekemään todistukset monille Luvun 4 Mandelbrotin joukkoa koskeneille lauseille. Käsillä olevan Luvun 5 tulokset ovat pääosin analogisia Luvun 4 tulosten kanssa. Joku toinen on luultavasti todistanut nämä tulokset jo aiemmin. Todistetaan ensiksi Lauseen 4.10 vastine Lause 5.4.

Esimerkissä 4.4 voidaan ajatella, että jos $c = -2$, niin ”juuri ja juuri” $c \in \mathcal{M}$. Toisaalta yhtälössä (4.11) esiintyy luku $2 = |-2|$. Vastaavan luvun löytäminen tapauksessa $b \geq 3$ voi onnistua tarkastelemalla listaa

$$\begin{aligned} \text{jos } |c| = 2, \text{ niin } |c^2| &= |c||c| = 2|c|; \\ \text{jos } |c| = \sqrt{2}, \text{ niin } |c^3| &= |c|^2|c| = 2|c|; \\ \text{jos } |c| = \sqrt[3]{2}, \text{ niin } |c^4| &= |c|^3|c| = 2|c|; \\ \text{jos } |c| = \sqrt[b]{2}, \text{ niin } |c^b| &= |c|^{b-1}|c| = 2|c|. \end{aligned} \tag{5.2}$$

(5.3)

Siis, jos valitaan $|c| = 2^{\frac{1}{b-1}}$, niin

$$|c^b| = \left(2^{\frac{1}{b-1}}\right)^b = 2^{\frac{b}{b-1}} = 2^{\frac{b-1+1}{b-1}} = 2^{1+\frac{1}{b-1}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{b-1}} = 2|c|.$$

Näin päädytään Lauseeseen 5.4, joka on Lauseelle 4.10 analoginen.

Lause 5.4. *Olkoon $|c| > 2^{\frac{1}{b-1}}$. Tällöin*

$$|f_{b,c}^n(0)| \geq 2^{\frac{1}{b-1}} \left(\frac{|c|}{2^{\frac{1}{b-1}}} \right)^{(b-1)^{n-1}} \tag{5.4}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Merkitään lyhyemmin

$$a := \frac{|c|}{2^{\frac{1}{b-1}}} > 1,$$

jolloin epäyhtälö (5.4) saa muodon

$$|f_{b,c}^n(0)| \geq 2^{\frac{1}{b-1}} a^{(b-1)^{n-1}}. \quad (5.5)$$

Osoitetaan induktiolla, että epäyhtälö (5.5) pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Ensiksi nähdään, että

$$|f_{b,c}^1(0)| = |0^b + c| = |c| = 2^{\frac{1}{b-1}} a = 2^{\frac{1}{b-1}} a^{(b-1)^{1-1}}.$$

Siis epäyhtälö (5.5) pätee arvolla $n = 1$. Oletetaan toisaalta, että epäyhtälö (5.5) pätee jollakin $n \in \mathbb{N}$. Nyt

$$|f_{b,c}^{n+1}(0)| = |(f_{b,c}(0))^b + c| \geq |f_{b,c}(0)|^b - |c|. \quad (5.6)$$

Koska $|f_{b,c}^n(0)| \geq 2^{\frac{1}{b-1}} a^{(b-1)^{n-1}} > 1 > 0$, niin $|f_{b,c}^n(0)|^b \geq \left(2^{\frac{1}{b-1}} a^{(b-1)^{n-1}}\right)^b$. Näin ollen saadaan

$$|f_{b,c}(0)|^b - |c| \geq \left(2^{\frac{1}{b-1}} a^{(b-1)^{n-1}}\right)^b - 2^{\frac{1}{b-1}} a. \quad (5.7)$$

Oikean puolen erotuksen ensimmäisen termin aukaisemiseksi voidaan ensiksi sieventää

$$\left(2^{\frac{1}{b-1}}\right)^b = 2^{\frac{b}{b-1}} = 2^{\frac{b-1+1}{b-1}} = 2^{1+\frac{1}{b-1}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{b-1}}$$

ja

$$\left(a^{(b-1)^{n-1}}\right)^b = a^{b(b-1)^{n-1}} > a > 1.$$

Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned} \left(2^{\frac{1}{b-1}} a^{(b-1)^{n-1}}\right)^b - 2^{\frac{1}{b-1}} a &= 2 \cdot 2^{\frac{1}{b-1}} a^{b(b-1)^{n-1}} - 2^{\frac{1}{b-1}} a \\ &\geq 2^{\frac{1}{b-1}} a^{b(b-1)^{n-1}} \\ &= 2^{\frac{1}{b-1}} a^{(b-1+1)(b-1)^{n-1}} \\ &= 2^{\frac{1}{b-1}} a^{(b-1)^n + (b-1)^{n-1}} \\ &= 2^{\frac{1}{b-1}} a^{(b-1)^n} a^{(b-1)^{n-1}} \\ &\geq 2^{\frac{1}{b-1}} a^{(b-1)^n} \\ &= 2^{\frac{1}{b-1}} a^{(b-1)^{(n+1)-1}}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (5.6)-(5.8) saadaan

$$|f_{b,c}^{n+1}(0)| \geq 2^{\frac{1}{b-1}} a^{(b-1)(n+1)-1}.$$

Näin ollen epäyhtälö (5.5) pätee myös arvolla $n + 1$. Induktioperiaatteen nojalla väite on todistettu. $\square$

Lauseesta 5.4 saadaan Seuraukselle 4.12 analoginen Seuraus 5.5.

Seuraus 5.5. *Olkoon $b \geq 3$. Tällöin b -multibrot sisältyy origokeskiseen kiekkoon, jonka säde on $2^{\frac{1}{b-1}}$.*

Todistus. Olkoon $|c| > 2^{\frac{1}{b-1}}$. Koska $b - 1 > 1$ ja

$$\frac{|c|}{2^{\frac{1}{b-1}}} > 1,$$

niin antamalla epäyhtälössä (5.4) $n \rightarrow \infty$ nähdään, että $(b - 1)^{n-1} \rightarrow \infty$, ja edelleen, että $|f_{b,c}^n(0)| \rightarrow \infty$. Siis $c \notin \mathcal{M}_b$. $\square$

Koska Seurauksen 5.5 todistuksessa ehto $b - 1 > 1$ on välttämätön, niin Seuraus 4.12 ei seuraa Lauseesta 5.4. Etsitään seuraavaksi epäyhtälölle (4.11) yleistys. Tätä varten todistetaan Lause 5.6.

Lause 5.6. *Olkoon b parillinen. Tällöin $-2^{\frac{1}{b-1}} \in \mathcal{M}_b$.*

Todistus. Olkoon $c = -2^{\frac{1}{b-1}}$. Nyt

$$f_{b,c}^1(0) = -2^{\frac{1}{b-1}};$$

$$f_{b,c}^2(0) = \left(-2^{\frac{1}{b-1}}\right)^b - 2^{\frac{1}{b-1}} = \left(2^{\frac{1}{b-1}}\right)^b - 2^{\frac{1}{b-1}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{b-1}} - 2^{\frac{1}{b-1}} = 2^{\frac{1}{b-1}};$$

$$f_{b,c}^3(0) = \left(2^{\frac{1}{b-1}}\right)^b - 2^{\frac{1}{b-1}} = 2^{\frac{1}{b-1}}.$$

Koska $f_{b,c}^3(0) = f_{b,c}^2(0)$, niin origo on kuvauksessa $f_{b,c}$ lopulta 1-jaksollinen ja Lauseen 2.7 nojalla origon rata kuvauksessa $f_{b,c}$ on äärellinen joukko $\{0, -2^{\frac{1}{b-1}}, 2^{\frac{1}{b-1}}\}$. Väite seuraa. $\square$

Olkoon $b \geq 3$ parillinen. Nyt Seurauksen 5.5 ja Lauseen 5.6 nojalla

$$\min\{r > 0 : \mathcal{M}_b \subset \overline{B}(0, r)\} = 2^{\frac{1}{b-1}}. \quad (5.9)$$

Epäyhtälö (5.9) pätee epäyhtälön (4.11) nojalla myös arvolla $b = 2$. Siis epäyhtälö (5.9) on epäyhtälön (4.11) yleistys. Jos b on pariton, luvun

$$\inf\{r > 0 : \mathcal{M}_b \subset \overline{B}(0, r)\} \leq 2^{\frac{1}{b-1}}$$

löytäminen voi olla hankalaa.

Lause 5.7. *Oletetaan, että $|c| \leq 2^{\frac{1}{b-1}}$ ja että $|f_{b,c}^{n_0}(0)| > 2^{\frac{1}{b-1}}$ jollakin $n_0 \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$|f_{b,c}^{n_0+n}(0)| \geq 2^{\frac{1}{b-1}} \left(\frac{|f_{b,c}^{n_0}(0)|}{2^{\frac{1}{b-1}}} \right)^{b^n}. \quad (5.10)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$.

Todistus. Merkitään lyhyemmin

$$a := \frac{|f_{b,c}^{n_0}(0)|}{2^{\frac{1}{b-1}}} > 1,$$

jolloin epäyhtälö (5.10) saa muodon

$$|f_{b,c}^{n_0+n}(0)| \geq 2^{\frac{1}{b-1}} a^{b^n}. \quad (5.11)$$

Osoitetaan induktiolla, että epäyhtälö (5.11) pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Ensiksi nähdään, että

$$|f_{b,c}^{n_0+0}(0)| = 2^{\frac{1}{b-1}} a = 2^{\frac{1}{b-1}} a^{b^0}.$$

Siis epäyhtälö (5.11) pätee arvolla $n = 0$. Oletetaan toisaalta, että epäyhtälö (5.11) pätee jollakin $n \in \mathbb{N}_0$. Tällöin, koska $|f_{b,c}^{n_0+n}(0)| \geq 2^{\frac{1}{b-1}} a^{b^n} > 1$ ja $a > 1$, niin

$$\begin{aligned} |f_{b,c}^{n_0+n+1}(0)| &\geq |f_{b,c}^{n_0+n}|^b - |c| \\ &\geq \left(2^{\frac{1}{b-1}} a^{b^n}\right)^b - 2^{\frac{1}{b-1}} \\ &= 2 \cdot 2^{\frac{1}{b-1}} a^{b^{n+1}} - 2^{\frac{1}{b-1}} \\ &\geq 2^{\frac{1}{b-1}} a^{b^{n+1}}. \end{aligned}$$

Siis epäyhtälö (5.11) pätee myös arvolla $n + 1$. Induktioperiaatteen nojalla väite seuraa. $\square$

Epäyhtälöstä (5.10) nähdään, että Lauseen 5.7 tilanteessa $|f_{b,c}^b(0)| \geq 2^{\frac{1}{b-1}}$ kaikilla $n \geq n_0$. Siis, jos iteraatit $f_{b,c}^n(0)$ käyvät origokeskisen $2^{\frac{1}{b-1}}$ -säteisen suljetun kiekon ulkopuolella, ne eivät voi palata kiekkoon. Lisäksi, jos $b \geq 2$ ja epäyhtälössä (5.10) annetaan luvun n kasvaa, nähdään, että $|f_{b,c}^n(0)| \rightarrow \infty$, kun $n \rightarrow \infty$. Saadaan Seuraukselle 4.14 analoginen Seuraus 5.8.

Seuraus 5.8. *Jos $f_{b,c}^n(0)$ käy origokeskisen $2^{\frac{1}{b-1}}$ -säteisen suljetun kiekon ulkopuolella, niin $c \notin \mathcal{M}_b$.*

Seurauksen 5.8 perusteella joukoista $\mathcal{M}_b$ voidaan yrittää piirtää kuvia vastaavalla tavalla kuin Mandelbrotin joukosta. Näin saataisiin Kuvien 7-10 kaltaisia kuvia.

Lause 5.9 on Lauseen 4.15 yleistys.

Lause 5.9. *Joukko $\mathcal{M}_b$ on suljettu, kun $b \in \mathbb{N}_0$.*

Todistus. Esimerkin 5.2 nojalla $\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}$ ja $\mathcal{M}_1 = \{0\}$. Nämä joukot ovat suljettuja. Se, että $\mathcal{M}_b$ on suljettu, kun $b \geq 2$, voidaan todistaa polynomien jatkuvuuteen perustuen, kuten Lauseen 4.15 todistuksessa. $\square$

Lause 5.10 on analoginen Lauseelle 4.16 ja voidaan keksiä vastaavalla tavalla kuvista katsomalla. Toisaalta päättelyn 5.2 kaltainen päättely voi myös johtaa Lauseen 5.10 keksimiseen.

Lause 5.10. *Olkoon $|c| \leq 2^{-\frac{b}{b-1}}$. Tällöin $c \in \mathcal{M}_b$.*

Todistus. Osoitetaan, että

$$|f_{b,c}^n(0)| < 2^{-\frac{1}{b-1}} \quad (5.12)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Ensiksi nähdään, että

$$|f_{b,c}^1(0)| = |c| \leq 2^{-\frac{1}{b-1}} = 2^{-\frac{b-1+1}{b-1}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-\frac{1}{b-1}} < 2^{-\frac{1}{b-1}}. \quad (5.13)$$

Siis epäyhtälö (5.12) pätee arvolla $n = 1$. Oletetaan toisaalta, että epäyhtälö (5.12) pätee jollakin $n \in \mathbb{N}$. Nyt

$$|f_{b,c}^{n+1}(0)| \leq |f_{b,c}^n(0)| + |c| < 2^{-\frac{1}{b-1}} + 2^{-\frac{b}{b-1}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-\frac{1}{b-1}} + \frac{1}{2} \cdot 2^{-\frac{1}{b-1}} = 2^{-\frac{1}{b-1}}.$$

Siis epäyhtälö (5.12) pätee myös arvolla $n+1$. Induktioperiaatteen nojalla se pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja siis jono $(f_{b,c}^n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ on rajoitettu. $\square$

Lauseessa 5.10 oletusta voitaisiin lieventää, eli luvun c voitaisiin sallia olevan kauempana origosta. Epäyhtälössä (5.13) tehdään nimittäin ”karkea” arvio

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{-\frac{1}{b-1}} < 2^{-\frac{1}{b-1}}.$$

Lauseen 5.10 ja Seurauksen 5.5 mukaan

$$2^{\frac{1}{b-1}} \geq \sup\{r > 0 : \overline{B}(0, r) \subset \mathcal{M}_b\} \geq 2^{-\frac{b}{b-1}}.$$

Luvun

$$\sup\{r > 0 : \overline{B}(0, r) \subset \mathcal{M}_b\}$$

arviointi voi kuitenkin olla vaikeaa. Näin ollen yhtälölle (4.18) voi olla vaikea keksiä vastinetta tapauksessa $b > 2$.

Viitteet

- [1] Ahlfors, L. *Complex Analysis, An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill, New York, 1979.
- [2] Bridy, A., Pérez, R. *A count of maximal small copies in Multibrot sets*. London Mathematical Society 2005.
<http://www.math.iupui.edu/~rperez/Papers/multibrotsFinal.pdf>
 (luettu 1.11.2011)
- [3] Erkama, T. *Fermat’n jälkeen*. Matematiikkalehti Solmu 3/2006.
<http://solmu.math.helsinki.fi/2006/3/erkama.pdf> (luettu 9.1.2011)
- [4] Doyady, A., Hubbard, J. H. *Exploring the Mandelbrot set. The Orsay Notes*.
<http://www.math.cornell.edu/~hubbard/OrsayEnglish.pdf>
 (luettu 7.10.2011)
- [5] Dewdney, A.K. *”Computer Recreations: A computer microscope zooms in for a look at the most complex object in mathematics.”* Sci Am 8/1985.
http://www.scientificamerican.com/media/inline/blog/File/Dewdney_Mandelbrot.pdf (luettu 25.3.2011)

- [6] Gautschi, W. *Numerical analysis, An Introduction*. Birkhäuser, Boston, 1997.
- [7] Lehtovirta, M. *Julian joukot polynomeille*. Pro gradu -tutkielma. Joensuun yliopisto, Matematiikan laitos, 2003.
- [8] Moler, C. *mandelbrot.pdf*. Verkkojulkaisu, 2011.
<http://www.mathworks.com/moler/exm/chapters/mandelbrot.pdf>
 (luettu 26.10.2011)
- [9] Nevanlinna, R., Paatero, V. *Funktioteoria*. Otava, Helsinki, 1963.
- [10] Lei, T. *Similarity Between the Mandelbrot Set and Julia Sets*. Commun. Math. Phys. 134, 587 – 617, 1990.
http://projecteuclid.org/DPubS/Repository/1.0/Disseminate?view=body&id=imagefirstpage_1&handle=euclid.cmp/1104201823
 (luettu 7.10.2011)
- [11] Andrade, L. *msetsv.m*. Matlab-funktio. 2002.
http://www.cs.uiuc.edu/homes/lukeo/static_courses/2006spring/CS257/lectures/msetsv.m (luettu 9.1.2011)
- [12] Pasek, C. *web_mandelbrot*. Zoomaustyökalu.
http://guciek.net/web_mandelbrot/en (luettu 30.9.2011)