Bergmanin avaruuden funktioiden nollakohdista

Pro gradu -tutkielma
Juha-Matti Huusko
175783
Itä-Suomen yliopisto
18. syyskuuta 2013

Sisältö

1 Johdanto

Tutkielman kirjoittaja tutustui tässä työssä Bergmanin avaruuksiin ja niiden nollakohtien ominaisuuksiin.

Työssä todistetuista tuloksista tärkeimmät ovat Lemma 6.3 ja Lause 6.5, jotka ovat kaksi tulosta avaruuden A^p_ω nollakohtajonoista ja -joukoista. Tuloksissa seurataan Horowitzia [3, 5, 6]. Klassisen Bergmanin avaruuden funktioiden nollakohtajoukkojen karakterisointi on osoittautunut hankalaksi ongelmaksi ja on edelleen ratkaisematta. Tutkielman tulokset kattavat vain pienen osan karakterisoinnista. Katso Huomautus 6.6.

Työssä todistetut Lause 5.2 ja Lause 5.3 ovat kaksi tulosta avaruuden BN_ω nollakohtajonoista ja -joukoista. Avaruuden BN_ω nollakohtajoukot voidaan karakterisoida täydellisesti. Tosin karakterisoinnin toinen osa jää tämän työn ulkopuolelle. Katso Huomautus 5.4.

Kirjoittajan täytyi ottaa tunnettuna Lemma 3.3, jonka todistaminen olisi vaatinut tuntemusta hyperbolisesta metriikasta.

Monet muut esitiedot (katso esimerkiksi Luku 4) on todistettu matematiikan kursseilla Joensuussa. Tämän vuoksi niiden todistuksia ei ole kirjoitettu tähän, mutta kirjallisuusviitteet on annettu.

2 Perusmääritelmät ja merkinnät

Merkintätavat noudattelevat lähdettä [10, s.5] tai ovat muuten yleisesti käytössä.

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nyt käytetään merkintöjä

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$;
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$.

Muita välejä merkitään vastaavasti. Integroitaessa käytetään suomalaisten sijoitusmerkkien sijaan hakasulkuja, esimerkiksi

$$\int_0^\pi r dr = \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Joukko

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

on *yksikkökiekko*. Joukko

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}, \quad r > 0,\, a \in \mathbb{C},$$

on *a-keskinen r-säteinen euklidinen kiekko*. Funktio

$$\omega : \mathbb{D} \to (0, \infty)$$

on *paino*, mikäli ω on integroituva. Tällöin, mikäli

$$\omega(z) = \omega(|z|)$$

kaikilla $z \in \mathbb{D}$, niin ω on *radiaalinen*. Mitta

$$dA(z) = \frac{rdrd\theta}{\pi} = \frac{dxdy}{\pi}$$

on *normalisoitu* joukon $\mathbb{D}$ *Lebesguen pinta-alamitta*. Nyt

$$\int_{\mathbb{D}} dA(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 rdrd\theta = 1. \tag{2.1}$$

Yleisemmin, jos $d\sigma(z) = a(re^{i\theta})rdrd\theta$ jollakin funktiolla $a : \mathbb{D} \to [0, \infty)$ ja

$$\int_{\mathbb{D}} d\sigma(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 a(re^{i\theta})rdrd\theta = 1,$$

niin mittaa $d\sigma(z)$ kutsutaan joukon $\mathbb{D}$ *todennäköisyysmitaksi*.

Olkoot $A \subset \mathbb{R}$ ja $f, g : A \to \mathbb{R}$. Jos on olemassa $C > 0$ siten, että

$$f(x) \leq Cg(x)$$

kaikilla $x \in A$, niin merkitään $f(x) \lesssim g(x), x \in A$. Jos $A = (a, b)$, missä $a, b \in \mathbb{R}$, ja on olemassa $c \in (a, b)$ siten, että $f(x) \lesssim g(x), x \in [c, b)$, niin merkitään $f(x) \lesssim g(x), x \to b^-$. Jos $f(x) \lesssim g(x)$ ja $f(x) \gtrsim g(x)$, niin merkitään $f(x) \asymp g(x)$.

Kirjain $C = C(\cdot)$ tarkoittaa vakiota, jonka suuruus riippuu suluissa olevista parametreista.

Määritelmä 2.1. Asetetaan $\log^+ : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\log^+ 0 = 0$, $\log^+ x = \max(0, \log x)$.

Määritelmä 2.2. [10, sivut 5, 30 ja 47] Olkoon $0 < p < \infty$ ja ω paino.

(i) Asetetaan

$$||f||_{A^p_\omega}^p := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \omega(z) dA(z)$$

kaikilla $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ ja edelleen

$$A^p_\omega := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : ||f||_{A^p_\omega} < \infty\}.$$

Avaruutta A^p_ω kutsutaan *painotetuksi Bergmanin avaruudeksi*.

Jos $\omega(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$ jollakin $-1 < \alpha < \infty$, niin merkitään $||\cdot||_{A^p_\omega} = ||\cdot||_{A^p_\alpha}$ ja $A^p_\omega = A^p_\alpha$ ja käytetään nimitystä *klassinen painotettu Bergmanin avaruus*. Erityisesti siis esimerkiksi tilanteessa $\alpha = 0$ pätee

$$||f||_{A^p_0}^p = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1 - |z|^2)^0 dA(z) = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z).$$

(ii) Asetetaan

$$||f||_{BN_\omega} := \int_{\mathbb{D}} \log^+ |f(z)| \omega(z) dA(z)$$

kaikilla $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ ja edelleen

$$BN_\omega := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : ||f||_{BN_\omega} < \infty\}.$$

Avaruutta BN_ω kutsutaan *ω-Bergman-Nevanlinnan luokaksi.*

Jos $\omega(z) = (1-|z|^2)^\alpha$ jollakin $-1 < \alpha < \infty$, niin merkitään $||\cdot||_{BN_\omega} = ||\cdot||_{BN_\alpha}$ ja $BN_\omega = BN_\alpha$ ja käytetään nimitystä *α-Bergman-Nevanlinnan luokka.* Erityisesti siis esimerkiksi tilanteessa $\alpha = 0$ pätee

$$||f||_{BN_0} = \int_{\mathbb{D}} \log^+ |f(z)|(1-|z|^2)^0 dA(z) = \int_{\mathbb{D}} \log^+ |f(z)| dA(z).$$

(iii) Asetetaan

$$||f||^p_{L^p_\omega} := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \omega(z) dA(z)$$

kaikilla joukossa $\mathbb{D}$ Lebesguen mielessä mitallisilla funktioilla f ja edelleen

$$L^p_\omega := \{f \text{ mitallinen joukossa } \mathbb{D} : ||f||_{L^p_\omega} < \infty\}.$$

(iv) Asetetaan $L^p = L^p_\omega$, kun $\omega \equiv 1$.

Lause 2.3. *Olkoon $1 \leq p < \infty$. Tällöin kuvaus $||\cdot||_{L^p_\omega} : L^p_\omega \to [0,\infty)$ toteuttaa seuraavat ehdot:*

(i) $||f||_{L^p_\omega} = 0$ *jos ja vain jos on olemassa nollamittainen joukko $E \subset \mathbb{D}$ siten, että $f(z) = 0$ kaikilla $\mathbb{D} \setminus E$;*

(ii) $||\alpha f||_{L^p_\omega} = |\alpha| \cdot ||f||_{L^p_\omega}$ *kaikilla $f \in L^p_\omega$;*

(iii) $||f+g||_{L^p_\omega} \leq ||f||_{L^p_\omega} + ||g||_{L^p_\omega}$ *kaikilla $f, g \in L^p_\omega$.*

Lauseen 2.3 kohdan (a) ehdot (i) ja (ii) ovat triviaaleja ja (iii) seuraa Minkowskin epäyhtälöstä.

Kun $1 \leq p < \infty$, niin $||\cdot||_{L^p_\omega}$ on normi avaruudessa $L^p_\omega/\sim$, joka koostuu ekvivalenssiluokista, jotka määrää relaatio $\sim$, jolle $f \sim g$, jos ja vain jos $||f-g||_{L^p_\omega} = 0$.

Määritelmä 2.4. Olkoon $0 < p < \infty$ ja olkoon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono avaruuden L^p_ω funktioita. Jono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on *Cauchy-jono*, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että

$$||f_n - f_m||^p_{L^p_\omega} < \varepsilon$$

aina kun $n, m \geq N(\varepsilon)$.

Lause 2.5. *[8, The Riesz-Fischer Theorem, s.398] Olkoon $1 \leq p < \infty$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avaruuden L^p Cauchy-jono. Tällöin on olemassa $f \in L^p$ siten, että*

$$||f_n - f||^p_{L^p} \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Toisin sanoen avaruus L^p on täydellinen.

Huomautus 2.6. Lauseen 2.5 funktion f ei tarvitse olla yksikäsitteinen. Funktioille $f_n = \frac{1}{n}$ pätee

$$||f_n - g_j||_{L^p}^p \to 0,$$

kun $n \to \infty$, esimerkiksi funktioilla $g_1 \equiv 0$ ja $g_2 : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g_2(0) &= 1; \\ g_2(z) &= 0, \quad z \neq 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Seuraus 2.7. *Olkoon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avaruuden L^p_ω Cauchy-jono. Tällöin on olemassa $f \in L^p_\omega$ siten, että*

$$||f_n - f||_{L^p_\omega}^p \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Toisin sanoen avaruus L^p_ω on täydellinen.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Nyt ω on paino eli $\omega : \mathbb{D} \to (0, \infty)$ on integroituva. Oletuksen nojalla on olemassa $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\int_{\mathbb{D}} |f_n(z) - f_m(z)|^p \omega(z) dA(z) = \int_{\mathbb{D}} |f_n(z)\omega(z)^{\frac{1}{p}} - f_m(z)\omega(z)^{\frac{1}{p}}|^p dA(z) < \varepsilon$$

aina, kun $n, m \geq N(\varepsilon)$. Siis jono $(f_n\omega^{\frac{1}{p}})_{n\in\mathbb{N}}$ on avaruuden L^p Cauchy-jono. Lauseen 2.5 nojalla on olemassa $g \in L^p$ siten, että

$$||f_n\omega^{\frac{1}{p}} - g||_{L^p}^p \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Nyt, koska $\omega(z) > 0$ kaikilla $z \in \mathbb{D}$, voidaan asettaa $f = g/\omega^{\frac{1}{p}} \in L^p_\omega$. Siis

$$||f_n - f||_{L^p_\omega}^p = \int_{\mathbb{D}} |f_n(z) - f(z)|^p \omega(z) dA(z) = \int_{\mathbb{D}} |f_n(z)\omega(z)^{\frac{1}{p}} - g(z)|^p dA(z) \to 0,$$

kun $n \to \infty$. $\square$

Lemma 2.8 on jatkuvaa painoa koskeva mukaelma tuloksesta [2, Proposition 1.1., s.2].

Lemma 2.8. *Olkoon $p > 0$, ω jatkuva paino ja $K \subset \mathbb{D}$ kompakti. Tällöin on olemassa $C = C(p, \omega, K) > 0$ siten, että*

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \leq C||f||_{A^p_\omega} \tag{2.3}$$

kaikilla $f \in A^p_\omega$.

Todistus. Olkoon $f \in A^p_\omega$ mielivaltainen. Funktion $|f|^p$ subharmonisuuden nojalla

$$|f(z)|^p \lesssim \int_{D\left(0, \frac{1+|z|}{2}\right)} |f(w)|^p dA(w) \quad \leq \left(\min_{|\xi|\leq\frac{1+|z|}{2}} \omega(\xi)\right)^{-1} \int_{D\left(0, \frac{1+|z|}{2}\right)} |f(w)|^p dA(w). \tag{2.4}$$

Tässä

$$\left(\min_{|\xi|\leq\frac{1+|z|}{2}} \omega(\xi)\right)^{-1} \leq C(K)$$

kaikilla $z \in K$ jollakin $C(K) > 0$. Minimi

$$\min_{|\xi| \leq \frac{1+|z|}{2}} \omega(\xi)$$

on olemassa ja positiivinen, koska $D\left(0, \frac{1+|z|}{2}\right)$ on kompakti, ω on jatkuva ja ω saa painona positiivisia arvoja. Toisaalta

$$\int_{D\left(0, \frac{1+|z|}{2}\right)} |f(w)|^p dA(w) \leq ||f||^p_{A^p_\omega}.$$

Siis

$$|f(z)| \leq C(p, \omega, K)||f||^p_{A^p_\omega}$$

kaikilla $z \in K$, joten

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C(p, \omega, K)||f||^p_{A^p_\omega}$$

pätee. □

Lause 2.9. *Olkoon $p > 0$ ja ω jatkuva paino. Tällöin avaruus A^p_ω on avaruuden L^p_ω suljettu lineaarinen aliavaruus.*

Todistus. Olkoon $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jono avaruudessa A^p_ω ja oletetaan, että on olemassa $f \in L^p_\omega$ siten, että

$$||f_n - f||_{L^p_\omega} \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Lemman 2.8 nojalla

$$\sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \to 0,$$

kun $n \to \infty$ kaikilla joukon $\mathbb{D}$ kompakteilla osajoukoilla K. Siis $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti joukon $\mathbb{D}$ kompakteissa osajoukoissa funktiota f kohti. Koska funktiot f_n ovat analyyttisiä, niin Weierstrassin lauseen nojalla ne suppenevat kohti analyyttistä funktiota f. Siis $f \in A^p_\omega$. □

Lause 2.9 on todistettu tilanteessa $0 < p < \infty$ ja $\omega = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha$, $-1 < \alpha < \infty$, lähteessä [2, Proposition 1.2., s.3].

Lause 2.10. *Olkoon $p > 0$ ja ω jatkuva paino. Olkoon $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avaruuden A^p_ω Cauchy-jono. Tällöin on olemassa $f \in A^p_\omega$ siten, että*

$$||f_n - f||^p_{A^p_\omega} \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Toisin sanoen avaruus A^p_ω on täydellinen.

Todistus. Avaruuden A^p_ω Cauchy-jonot ovat avaruuden L^p_ω Cauchy-jonoja ja suppenevat Lauseen 2.7 nojalla avaruudessa L^p_ω. Nyt Lauseen 2.9 nojalla nämä jonot suppenevat kohti avaruuden A^p_ω alkioita. □

Seuraus 2.11. *Olkoon ω jatkuva paino. Tällöin pari $(A^p_\omega, ||\cdot||_{A^p_\omega})$ on Banachin avaruus, kun $1 \leq p < \infty$.*

Määritelmä 2.12. [10, s. 30] Olkoon $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ ja olkoon $r \in (0,1)$. Nyt luku $n(r)$ on funktion f nollakohtien lukumäärä kiekossa $D(0,r)$ monikerrat laskien. Toisaalta $n(0) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ on funktion f nollakohdan kertaluku origossa. Jos halutaan täsmentää, mistä funktiosta on kyse, merkitään $n(r) = n(r,f)$. Funktiota $n : [0,1) \to \mathbb{Z}$ kutsutaan *lukumääräfunktioksi.*

Edelleen $N : (0,1) \to [0,\infty)$

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(s) - n(0,f)}{s} ds + n(0,r) \log r$$

on *integroitu lukumääräfunktio* ja käytetään merkintää $N(r) = N(r,f)$. (Nevanlinnan luokkaa koskevissa kirjoissa funktio N laskee meromorfisen funktion f napoja. Tällöin funktion f nollakohtia laskee funktio $N(r, \frac{1}{f})$.)

Jos $f(0) \neq 0$, niin

$$n(0,r) = 0 \text{ kaikilla } r \in [0, r_0] \text{ jollakin } r_0 > 0. \tag{2.5}$$

Tällöin nähdään, että

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(s)}{s} ds.$$

Määritelmä 2.13. [1, s.172] Määritellään kaikilla $a \in \mathbb{D}$ funktio φ_a asettamalla $\varphi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}.$$

Lemma 2.14. *Olkoon $a \in \mathbb{D}$ mielivaltainen. Tällöin funktiolla φ_a on seuraavat ominaisuudet:*

(i) *$\varphi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ on analyyttinen bijektio eli konformikuvaus;*

(ii) $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$;

(iii) *$\varphi_a(0) = a$ ja $\varphi_a(a) = 0$ eli φ_a kuvaa pisteet 0 ja a toisilleen;*

(iv) $\varphi_a'(z) = \dfrac{|a|^2 - 1}{(1 - \bar{a}z)^2}$;

(v) $|\varphi_a'(z)| = \dfrac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2}$;

(vi) $1 - |\varphi_a(z)|^2 = (1 - |z|^2)|\varphi_a'(z)|$;

Funktiota φ_a käsitellään muun muassa lähteessä [1, s. 173]. Lähteessä todistetaan kohdat (i) ja (ii). Kohdat (iii)-(vi) ovat suoria laskuja.

3 Invariantit painot

Määritelmä 3.1. [10, s.8] Olkoon $a \in \mathbb{D}$ ja $r \in (0,1)$. Joukko

$$\Delta(a,z) = \{z \in \mathbb{D} : |\varphi_a(z)| < r\}$$

on *a-keskinen r-säteinen pseudohyperbolinen kiekko*

Määritelmä 3.2. [10, s.8] Funktio $\omega : \mathbb{D} \to (0,\infty)$ on *invariantti paino*, jos ω on integroituva ja kaikilla $r \in (0,1)$ on olemassa $C = C(r) > 0$ siten, että kaikilla $a \in \mathbb{D}$

$$\frac{1}{C}\omega(a) \le \omega(z) \le C\omega(a)$$

kaikilla $z \in \Delta(a,r)$. Kaikkien invarianttien painojen joukkoa merkitään $\mathcal{I}nv$.

Lemma 3.3. *[10, Lemma 1.8., s.15] Olkoon $\omega \in \mathcal{I}nv$. Tällöin on olemassa $C : \mathbb{D} \to [1,\infty)$ siten, että*

$$\omega(u) \le C(z)\omega(\varphi_u(z)), \tag{3.1}$$

kaikilla $z, u \in \mathbb{D}$, missä

$$\int_{\mathbb{D}} \log C(z) dA(z) < \infty. \tag{3.2}$$

Määritelmän 3.2 ja Lemman 3.3 väitteen sisällön ymmärtämiseksi tarkastellaan Lauseita 3.4 ja 3.5, jotka kertovat, mitä pseudohyperboliset kiekot ovat.

Lause 3.4. *Olkoon $a \in \mathbb{D}$ ja $r \in (0,1)$. Pseudohyperbolinen kiekko $\Delta(a,r)$ on euklidinen kiekko, jonka keskipiste ja säde ovat*

$$C = \frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a \quad \textit{ja} \quad R = \frac{1-|a|^2}{1-r^2|a|^2}r$$

vastaavasti.

Lause 3.5. *Euklidisen kiekon $D(C,R) \subset \mathbb{D}$ pseudohyperbolinen keskipiste ja säde ovat*

$$a = \frac{(1+R^2-|C|^2) - \sqrt{(1+R^2-|C|^2)^2 - 4|C|^2}}{2|C|}$$

ja

$$r = \frac{(1+R^2-|C|^2) - \sqrt{(1+R^2-|C|^2)^2 - 4R^2}}{2R}$$

vastaavasti.

Lauseen 3.4 todistus. Johdetaan aluksi kaksi yhtälöä, nimittäin (3.3) ja (3.4). Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Nyt

$$|\alpha-\beta|^2 = (\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\beta)} = |\alpha|^2 - (\alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha}) + |\beta|^2.$$

Koska $z + \overline{z} = 2\Re(z) = 2\Re(\overline{z})$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, saadaan

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 - |\alpha - \beta|^2 = 2\Re(\alpha\overline{\beta}) = 2\Re(\overline{\alpha}\beta). \tag{3.3}$$

Tämä on kosinilause. Nimittäin, jos $\alpha = ae^{it}$ ja $\beta = be^{is}$, missä $a, b, t, s \in \mathbb{R}$, ja merkitään $\gamma = s - t$ ja $c = |\alpha - \beta|$ niin saadaan $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$.

Sijoittamalla $\alpha = 1$ ja $\beta = \overline{a}z$ yhtälöön (3.3) saadaan

$$1 + |a|^2|z|^2 - |1 - \overline{a}z|^2 = 2\Re(\overline{a}z).$$

Sijoittamalla $\alpha = z$ ja $\beta = a$ yhtälöön (3.3) saadaan

$$|z|^2 + |a|^2 - |z - a|^2 = 2\Re(\overline{a}z).$$

Vähentämällä kaksi viimeisintä yhtälöä toisistaan saadaan

$$1 - |z|^2 - |a|^2 + |a|^2|z|^2 - |1 - \overline{a}z|^2 + |z - a|^2 = 0,$$

mikä sievenee muotoon

$$|1 - \overline{a}z|^2 = |z - a|^2 + (1 - |a|^2)(1 - |z|^2). \tag{3.4}$$

Olkoon $r > 0$ ja $a \in \mathbb{D}$ mielivaltainen. Nyt yhtälön (3.4) nojalla

$$|\varphi_a(z)|^2 = \frac{|z - a|^2}{|1 - \overline{a}z|^2} = \frac{|z - a|^2}{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2) + |z - a|^2} = r^2.$$

Tämä voidaan ekvivalentisti kirjoittaa

$$|z - a|^2(1 - r^2) = (r^2 - |a|^2r^2)(1 - |z|^2),$$

mistä saadaan

$$|z - a|^2 = \frac{r^2 - |a|^2r^2}{1 - r^2} - \frac{r^2 - |a|^2r^2}{1 - r^2}|z|^2.$$

Nyt yhtälön (3.3) nojalla

$$|z|^2 + |a|^2 - 2\Re(a\overline{z}) = \frac{r^2 - |a|^2r^2}{1 - r^2} - \frac{r^2 - |a|^2r^2}{1 - r^2}|z|^2,$$

mistä saadaan

$$|z|^2\left(1 + \frac{r^2 - |a|^2r^2}{1 - r^2}\right) - 2\Re(a\overline{z}) = \frac{r^2 - |a|^2r^2}{1 - r^2} - |a|^2,$$

mikä sievenee muotoon

$$|z|^2\left(\frac{1 - |a|^2r^2}{1 - r^2}\right) - 2\Re(a\overline{z}) = \frac{r^2 - |a|^2}{1 - r^2}.$$

Kertomalla tämä puolittain tekijällä

$$A = \frac{1 - r^2}{1 - |a|^2r^2} > 0$$

saadaan

$$|z|^2 - 2\Re(Aa\overline{z}) = \frac{r^2 - |a|^2}{1 - |a|^2 r^2}.$$

Näin ollen

$$|z|^2 - 2\Re(Aa\overline{z}) + |Aa|^2 = \frac{r^2 - |a|^2}{1 - |a|^2 r^2} + A^2|a|^2.$$

ja yhtälön (3.3) perusteella saadaan

$$|z - Aa|^2 = \frac{r^2 - |a|^2}{1 - |a|^2 r^2} + A^2|a|^2.$$

Siis

$$|z - Aa|^2 = \frac{(r^2 - |a|^2)(1 - |a|^2 r^2) + (1 - r^2)^2 |a|^2}{(1 - |a|^2 r^2)^2},$$

joten

$$|z - Aa|^2 = \frac{r^2 - |a|^2 r^4 - |a|^2 + |a|^4 r^2 + |a|^2 - 2|a|^2 r^2 + r^4 |a|^2}{(1 - |a|^2 r^2)^2},$$

mikä sievenee muotoon

$$|z - Aa|^2 = \frac{r^2(1 - |a|^2)^2}{(1 - |a|^2 r^2)^2}$$

Nyt $C = Aa$, oikea puoli on R^2 ja todistus on valmis. □

Lauseen 3.5 todistus. Olkoon $C \in [0, 1)$ siten, että $a \in [0, 1)$. Kaavoista

$$C = \frac{1 - r^2}{1 - r^2 a^2}\, a \quad \text{ja} \quad R = \frac{1 - a^2}{1 - r^2 a^2}\, r,$$

saadaan

$$C + R = \frac{a - r^2 a + r - r a^2}{1 - r^2 a^2} = \frac{(a + r)(1 - ra)}{(1 - ra)(1 + ra)} = \frac{a + r}{1 + ra}$$

ja

$$C - R = \frac{a - r^2 a - r + r a^2}{1 - r^2 a^2} = \frac{(a - r)(1 + ra)}{(1 - ra)(1 + ra)} = \frac{a - r}{1 - ra}.$$

Näin ollen

$$a + r = C + R + raC + raR$$

ja

$$a - r = C - R - raC + raR.$$

Laskemalla nämä yhtälöt puolittain yhteen ja jakamalla luvulla 2 saadaan

$$a = C + raR. \tag{3.5}$$

Vastaavasti erotuksella ja jakamalla luvulla 2 saadaan

$$r = R + raC. \tag{3.6}$$

Nämä yhtälöt ovat jossain mielessä symmetrisiä. Olkoon nimittäin $P(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 + x_3 x_1 x_4 - x_1$. Nyt yhtälö (3.5) on $P(a, C, r, R) = 0$ ja yhtälö (3.6) on $P(r, R, a, C) = 0$.

Ratkaisemalla r yhtälöstä (3.6) saadaan

$$r = \frac{R}{1 - aC}.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (3.5) saadaan

$$a = C + \frac{R^2 a}{1 - aC}.$$

Kertomalla tämä puolittain luvulla $1 - aC$ saadaan

$$a - a^2 C = C - aC^2 + R^2 a,$$

mistä saadaan keskipisteelle a toisen asteen yhtälö

$$0 = Ca^2 - (1 + R^2 - C^2)a + C.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava antaa

$$a = \frac{(1 + R^2 - C^2) \pm \sqrt{(1 + R^2 - C^2)^2 - 4C^2}}{2C}.$$

Jos $C = 0$, niin osoittaja on $1 + R^2 \pm (1 + R^2) = 0$. Tämän vuoksi täytyy olla

$$a = \frac{(1 + R^2 - C^2) - \sqrt{(1 + R^2 - C^2)^2 - 4C^2}}{2C}.$$

Ratkaisemalla a yhtälöstä (3.5) saadaan

$$a = \frac{C}{1 - rR}.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (3.6) saadaan

$$r = R + \frac{C^2 r}{1 - rR}.$$

Kertomalla tämä puolittain luvulla $1 - rR$ saadaan

$$r - r^2 R = R - rR^2 + C^2 r,$$

mistä saadaan säteelle r toisen asteen yhtälö

$$0 = Rr^2 - (1 + R^2 - C^2)r + R.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava antaa

$$r = \frac{(1 + R^2 - C^2) \pm \sqrt{(1 + R^2 - C^2)^2 - 4R^2}}{2R}.$$

Jos $C = 0$, niin osoittaja on $1 + R^2 \pm (1 - R^2)$. Nyt, koska $R \in [0, 1)$, niin osoittajan täytyy olla $1 + R^2 - (1 - R^2) = 2R^2$. Näin ollen

$$r = \frac{(1 + R^2 - C^2) - \sqrt{(1 + R^2 - C^2)^2 - 4R^2}}{2R}.$$

Yleinen tapaus saadaan kiertämällä tarkasteltavana olevan euklidisen kiekon keskipiste janalle $[0, 1]$. $\square$

4 Esitietoja

Määritelmä 4.1. Olkoon $[a, b] \subset \mathbb{R}$ väli ja $n \in \mathbb{N}$. Olkoot $a_j \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq n+1$, siten, että

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} = b.$$

Tällöin joukko

$$P = \{a_j : 0 \leq j \leq n+1\}$$

on välin $[a, b]$ *ositus*. Osituksen P *karkeus* on luku

$$|P| = \max_{0 \leq j \leq n} |a_{j+1} - a_j|$$

eli suurin osituksen pisteiden välinen etäisyys.

Määritelmä 4.2. Olkoon $[a, b] \subset \mathbb{R}$ väli, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funktioita ja

$$P = \{a_j \in \mathbb{R} : 0 \leq j \leq n+1\}$$

välin $[a, b]$ ositus. Tällöin käytetään merkintää

$$S(f, g, P, [a, b]) = \sum_{j=0}^{n} f(t_j)(g(a_{j+1}) - g(a_j)),$$

missä $t_j \in (a_j, a_{j+1})$ kaikilla j. Mikäli on olemassa luku A siten, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\sup_{t_j \in (a_j, a_{j+1})} |S(f, g, P, [a, b]) - A| < \varepsilon$$

kaikilla välin $[a, b]$ osituksilla P, joille pätee $|P| < \delta$, niin sanotaan, että f on *g-Riemann-Stieltjes-integroituva välillä* $[a, b]$ ja lukua A merkitään

$$A = \int_a^b f(x) dg(x).$$

Lause 4.3 (Riemann-Stieltjes-integraalin ominaisuuksia).
[11, Examples 1.2.2, s.8; Theorem 1.2.7., s.9]

(i) *Jos* $f \in \mathcal{C}([a, b])$ *ja* $g \in \mathcal{C}^1([a, b])$, *niin*

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

(ii) *Jos on olemassa pisteet* $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n+1} = b$ *siten, että* g *on vakio väleillä* (a_j, a_{j+1}), *niin jokainen* $f \in \mathcal{C}([a, b])$ *on g-Riemann-Stieltjes-integroituva välillä* $[a, b]$ *ja*

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \sum_{j=0}^{n+1} f(a_j) d_j,$$

missä $d_0 = g(a^+) - g(a)$, $d_j = g(a_j^+) - g(a_j^-)$, *kun* $1 \leq j \leq n$, *ja* $d_{n+1} = g(b) - g(b^-)$. *Tässä* $g(x^+)$ *ja* $g(x^-)$ *tarkoittavat funktion* g *oikean ja vasemmanpuoleisia raja-arvoja pisteessä* x *vastaavasti.*

(ii) *Oletetaan, että f on g-Riemann-integroituva välillä $[a,b]$. Tällöin g on f-Riemann-integroituva välillä $[a,b]$ ja*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = [f(x)g(x)]_{x=a}^b - \int_a^b g(x)df(x).$$

Esimerkki 4.4. Yhtälössä 5.2 funktio n (Määritelmä 2.12) toteuttaa Lauseen 4.3 ehdon (ii) välillä $[0,r] \subset (0,1)$ ja funktio $\log \frac{r}{t}$ on jatkuva, joten voidaan päätellä

$$\int_0^1 \sum_{|z_k|<r} \log \frac{r}{|z_k|} r\omega(r)dr = \int_0^1 \int_0^r \log \frac{r}{t} r\omega(r)dn(t)dr. \tag{4.1}$$

Lause 4.5 (Fubinin lause). *[11, Theorem 4.1.6., s.69]*
Olkoot $(E_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ ja $(E_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ σ-äärellisiä mitta-avaruuksia ja olkoon f mitallinen funktio parissa $(E_1 \times E_1, \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1)$. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja:

(i) *f on $\mu_1 \times \mu_2$-integroituva;*

(ii) $\displaystyle\int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x_1, x_2)| \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) < \infty;$

(iii) $\displaystyle\int_{E_2} \left(\int_{E_1} |f(x_1, x_2)| \mu_1(dx_1) \right) \mu_2(dx_2) < \infty.$

Asetetaan seuraavaksi

$$\Lambda_1 = \left\{ x_1 \in E_1 : \int_{E_2} |f(x_1, x_2)| \mu_2(dx_2) < \infty \right\}$$

ja

$$\Lambda_2 = \left\{ x_2 \in E_2 : \int_{E_1} |f(x_1, x_2)| \mu_1(dx_1) < \infty \right\}$$

ja määritellään f_j joukossa E_j, $j \in \{1,2\}$, asettamalla

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \int_{E_2} f(x_1, x_2)\mu_2(dx_2), \text{ jos } x_1 \in \Lambda_1; \\ f_1(x_1) &= 0 \text{ muutoin}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

ja

$$\begin{aligned} f_2(x_2) &= \int_{E_1} f(x_1, x_2)\mu_1(dx_1), \text{ jos } x_2 \in \Lambda_2; \\ f_2(x_2) &= 0 \text{ muutoin}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Tällöin f_j on mitallinen $\mathbb{R}$-arvoinen funktio parissa $(E_j, \mathcal{B}_j)$. Edelleen, jos f on $\mu_1 \times \mu_2$-integroituva, niin $\mu_j(E_j \setminus \Lambda_j) = 0$, $f_j \in L^1(\mu_j)$ ja

$$\int_{E_j} f_j(x_j)\mu_j(dx_j) = \int_{E_1 \times E_2} f(x_1, x_2)(\mu_1 \times \mu_2)(dx_1 \times dx_2)$$

arvoilla $j \in \{1,2\}$.

Fubinin lauseen mukaan yhtäsuuruudet

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} f(z,\zeta) dA(z) \right) dA(\zeta) = \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} f(z,\zeta) dA(\zeta) \right) dA(z)$$

ja

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dy \right) dx,$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pätevät, kun kaikki integraalit suppenevat. Tällöin siis integrointijärjestystä voi vaihtaa.

Kun integrointirajat eivät ole vakioita, Fubinin lausetta sovellettaessa rajat luonnollisesti muuttuvat. Jos esimerkiksi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on integroituva, esimerkiksi $f(r,t) \equiv rt + r^2 - 2$, niin

$$\int_0^1 \int_0^r f(r,t) dt dr = \int_0^r \int_t^1 f(r,t) dr dt.$$

Nimittäin vasemmalla puolella pätee $0 \leq t \leq r \leq 1$, joten oikealla puolella $t \leq r \leq 1$ ja $0 \leq t \leq r$.

Lemma 4.6 (Jensenin epäyhtälö välille)**.** *Olkoon* $\varphi : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ *konveksi ja* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *integroituva. Tällöin*

$$\varphi \left(\int_0^1 f(t) dt \right) \leq \int_0^1 \varphi(f(t)) dt. \tag{4.4}$$

Todistus. Olkoon

$$\alpha = \int_0^1 f(t) dt$$

ja

$$y = m(x - \alpha) + \varphi(\alpha)$$

suora, joka leikkaa funktion φ kuvaajan pisteessä $(\alpha, \varphi(\alpha))$ ja on kuvaajan alapuolella. Nyt funktion φ konveksisuuden nojalla

$$\varphi(f(t)) \geq m(f(t) - \alpha) + \varphi(\alpha),$$

kaikilla $t \in [0,1]$, joten ottamalla puolittain määrätty integraali tällä välillä saadaan

$$\int_0^1 \varphi(f(t)) dt \geq m \int_0^1 f(t) dt - \alpha m + \varphi(\alpha) = \varphi \left(\int_0^1 f(t) dt \right).$$

□

Lemma 4.7 (Jensenin epäyhtälö)**.** *Olkoon* $\varphi : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ *konveksi,* $d\mu$ *todennäköisyysmitta joukossa* $\mathbb{D}$ *ja* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ μ*-integroituva. Tällöin*

$$\varphi \left(\int_{\mathbb{D}} f(t) d\mu(t) \right) \leq \int_{\mathbb{D}} \varphi(f(t)) d\mu(t). \tag{4.5}$$

Todistus. Olkoon

$$\alpha = \int_{\mathbb{D}} f(t) d\mu(t)$$

ja

$$y = m(x - \alpha) + \varphi(\alpha)$$

suora, joka leikkaa funktion φ kuvaajan pisteessä $(\alpha, \varphi(\alpha))$ ja on kuvaajan alapuolella. Nyt funktion φ konveksisuuden nojalla

$$\varphi(f(t)) \geq m(f(t) - \alpha) + \varphi(\alpha),$$

kaikilla $t \in \mathbb{D}$, joten ottamalla puolittain määrätty integraali yksikkökiekon yli saadaan

$$\int_{\mathbb{D}} f(t) d\mu(t) \geq m \int_{\mathbb{D}} f(t) d\mu(t) - \alpha m + \varphi(\alpha) = \varphi\left(\int_{\mathbb{D}} f(t) d\mu(t)\right).$$

□

Lemma 4.8 (Jensenin kaava)**.** *[9, Theorem 15.18., s.307] Olkoon $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ ja olkoon $f(0) \neq 0$. Tällöin*

$$\log|f(0)| + \sum_{|z_k|<r} \log \frac{r}{|z_k|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| d\theta,$$

missä pisteet z_k ovat funktion f nollakohdat monikerrat laskien kiekossa $D(0, r)$, kaikilla $r \in (0, 1)$.

Lemma 4.9. *[7, Lemma 2.23, s.16] Olkoon $a_n \in \mathbb{D} \backslash \{0\}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja:*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$;

(ii) *tulo* $\prod_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *suppenee;*

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \log|a_n| > -\infty$.

Lemma 4.10. *[1, Theorem 8.1.9., s.261] Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin. Olkoot $f_j : U \to \mathbb{C}$ analyyttisiä siten, että*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|$$

suppenee tasaisesti joukon U kompakteissa osajoukoissa. Tällöin osatulojen

$$F_N(z) = \prod_{j=1}^{N} (1 + f_j(z))$$

jono suppenee tasaisesti joukon U kompakteissa osajoukoissa. Erityisesti näiden osatulojen jonon raja-funktio F on joukossa analyyttinen funktio.

Funktio F häviää pisteessä $z_0 \in U$, jos ja vain jos $f_j(z_0) = -1$ jollakin j. Tässä tilanteessa nollakohdalle z_0 funktion F kertaluku on funktioiden $1 + f_j$ kertalukujen summa.

Lemma 4.11. *[7, Lause 2.21, s.12] Olkoon*

$$h(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - re^{i\theta}|^{\lambda+1}},$$

missä $r \in [0, 1)$ *ja* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

(i) $h(r) \asymp 1$, *kun* $\lambda < 0$ *ja* $r \to 1^-$;

(ii) $h(r) \asymp \log \frac{1}{1-r}$, *kun* $\lambda = 0$ *ja* $r \to 1^-$;

(iii) $h(r) \asymp \frac{1}{(1-r)^\lambda}$, *kun* $\lambda > 0$ *ja* $r \to 1^-$.

Lemma 4.12. *Funktioille* log *ja* $\log^+$ *(Määritelmä 2.1) pätee*

(i) $\log^+ x = 0$, *kun* $x \in [0, 1]$;

(ii) $\log^+ x = \log x$, *kun* $x \geq 1$;

(iii) $\log^+$ *on kasvava;*

(iv) $\log^+ xy \leq \log^+ x + \log^+ y$, *kun* $x, y \in [0, \infty)$;

(v) $\log^+ \leq x$, *kun* $x \geq 0$;

(vi) $1 - \frac{1}{x} \leq \log x$, *kun* $x \geq 1$;

(vii) $1 - x \leq \log \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}(1 - x)$, *kun* $0 < x \leq 1$.

Todistus. Kohdat (i)-(iii) ovat triviaaleja.

Kohdan (iv) todistamiseksi olkoot $x, y \in (0, 1)$ mielivaltaisia. Logaritmille pätee

$$\log xy = \log x + \log y.$$

Jos $x, y \geq 1$, niin saadaan

$$\log^+ xy = \log^+ x + \log^+ y.$$

Jos taas $x \geq 1, y < 1$, niin saadaan

$$\log^+ xy < \log^+ x = \log^+ x + \log^+ y$$

funktion $\log^+$ kasvavuuden nojalla. Jos taas $x, y < 1$, niin

$$\log^+ xy = 0 \leq 0 = \log^+ x + \log^+ y.$$

Kohta (v) pätee tilanteessa $x \in [0, 1]$ muodossa $0 \leq x$. Toisaalta tilanteessa $x > 1$ nähdään eksponenttifunktion sarjakehitelmän avulla, että $x \leq e^x$. Ottamalla tästä puolittain logaritmi, saadaan $\log^+ x = \log x \leq x$.

Kohta (vi) seuraa kohdasta (vii) muuttujanvaihdolla $x = \frac{1}{y}$.

Kohdan (vii) todistamiseksi tarkastellaan funktioita

$$h(x) = \log \frac{1}{x} + x - 1 = -\log x + x - 1$$

ja

$$g(x) = \frac{1}{x}(1-x) - \log\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + \log x.$$

Nyt $h'(x) = -\frac{1}{x} + 1 \le 0$, kun $0 < x \le 1$. Siis välillä $(0,1]$ funktio h on vähenevä ja $h(1) = 0$, joten $h(x) \ge 0$, kun $0 < x \le 1$. Tästä seuraa ensimmäinen epäyhtälö. Toisaalta

$$g'(x) = -x^{-2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \le 0,$$

kun $0 < x \le 1$. Siis välillä $(0,1]$ funktio g on vähenevä ja $g(1) = 0$, joten $g(x) \ge 0$, kun $0 < x \le 1$. Tästä seuraa toinen epäyhtälö. □

5 Avaruuden BN_ω funktioiden nollakohdista

Määritelmä 5.1. [10, s.14] Olkoon ω radiaalinen paino. Tällöin sen *liittopaino* $\omega^\star : \mathbb{D} \to (0,\infty)$ määritellään asettamalla

$$\omega^\star(z) = \int_{|z|}^{1} \omega(s) \log\frac{s}{|z|} s\,ds, \quad z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}.$$

Lause 5.2. *[10, Proposition 3.16., s.47] Olkoon ω radiaalinen paino, $f \in BN_\omega$, $f(0) \ne 0$ ja $\{z_k\}$ funktion f nollakohtajoukko. Tällöin*

$$\sum_k \omega^\star(z_k) < \infty. \tag{5.1}$$

Lauseen 5.2 epäyhtälö (5.1) on Lemman 5.3 mukaan ekvivalentti ehtojen *2.* ja *3.* kanssa.

Lemma 5.3. *[10, Lemma 3.17., s.48] Olkoon ω radiaalinen paino ja merkitään $\widehat{\omega}(r) = \int_r^1 \omega(s)ds$. Olkoon $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(0) \ne 0$ ja olkoon (z_k) funktion f nollakohtajono. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja:*

1. $\sum_k \omega^\star(z_k) < \infty$;
2. $\int_0^1 N(r)\omega(r)dr < \infty$;
3. $\int_0^1 n(r)\widehat{\omega}(r)dr < \infty$.

Huomautus 5.4. Jos ω on radiaalinen, avaruuden BN_ω nollakohtajoukot voidaan karakterisoida täydellisesti. Nimittäin, mikäli ehto (5.1) on voimassa, voidaan kontstruoida $f \in BN_\omega$, joka häviää pisteissä z_k, eikä muualla. Tulos on lähteessä [10, Proposition 3.16. todistus, s.47]. Konstruktio perustuu lähteisiin [2, s. 131-132] ja [10, Lemma 2.3., s.21] .

Lauseen 5.2 todistus. Riemann-Stieltjes-integraalin ominaisuuksien ja Fubinin lauseen nojalla

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sum_{|z_k|<r} \log \frac{r}{|z_k|} r\omega(r)dr &= \int_0^1 \int_0^r \log \frac{r}{t} r\omega(r)dn(t)dr \\
&= \int_0^r \int_t^1 \log \frac{r}{t} r\omega(r)drdn(t) \\
&= \int_0^r \omega^\star(t)dn(t) \\
&= \sum_{|z_k|<r} \omega^\star(|z_k|). \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

Toisaalta Jensenin kaavan nojalla

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \sum_{|z_k|<r} \log \frac{r}{|z_k|} r\omega(r)dr \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)| \right) r\omega(r)dr \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| r\omega(r)d\theta dr - \log |f(0)| \int_0^1 r\omega(r)dr. \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

Koska ω on radiaalinen

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| r\omega(r)d\theta dr \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \omega(re^{i\theta}) \frac{rd\theta dr}{\pi} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \log |f(z)| \omega(z)dA(z) \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \log^+ |f(z)| \omega(z)dA(z) \\
&= \frac{1}{2} ||f||_{BN_\omega}. \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

Koska $f(0) \neq 0$, niin yhdistämällä epäyhtälöt (5.2), (5.3) ja (5.4) saadaan

$$
\sum_{|z_k|<r} \omega^\star(|z_k|) \leq \frac{1}{2} ||f||_{BN_\omega} - \log |f(0)| \int_0^1 r\omega(r)dr < \infty. \qquad (5.5)
$$

□

Lemman 5.3 todistus. Olkoon $\rho_0 \in (0, 1)$ kiinnitetty ja $\rho \in (\rho_0, 1)$. Osittaisintegroinnilla saadaan

$$
\begin{aligned}
\int_{\rho_0}^{\rho} N(r)\omega(r)dr &= \left[N(r) \int_1^r \omega(s)ds \right]_{r=\rho_0}^{\rho} - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{n(r)}{r} \int_1^r \omega(s)dsdr \\
&= -N(\rho)\widehat{\omega}(\rho) + N(\rho_0)\widehat{\omega}(\rho_0) + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{n(r)}{r} \widehat{\omega}(r)dr \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

Oletetaan, että $\rho_0 \geq \frac{1}{2}$. Tällöin pätee $\frac{1}{r} \leq 2$ kaikilla $r \in (\rho_0, r)$. Olettaen, että (3) on voimassa, yhtälöstä (5.6) saadaan

$$\begin{aligned}\int_{\rho_0}^{\rho} N(r)\omega(r)dr &= -N(\rho)\widehat{\omega}(\rho) + N(\rho_0)\widehat{\omega}(\rho_0) + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{n(r)}{r}\widehat{\omega}(r)dr \\ &\leq N(\rho_0)\widehat{\omega}(\rho_0) + 2\int_{\rho_0}^{\rho} n(r)\widehat{\omega}(r)dr \\ &\leq N(\rho_0)\widehat{\omega}(\rho_0) + 2\int_{0}^{1} n(r)\widehat{\omega}(r)dr = C(\rho_0, \omega) < \infty. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Antamalla $\rho \to 1^-$ nähdään, että

$$\int_{\rho_0}^{1} N(r)\omega(r)dr < \infty,$$

jolloin

$$\int_{0}^{1} N(r)\omega(r)dr < \infty$$

eli (2) on voimassa.

Toisaalta $\frac{1}{r} \geq 1$ kaikilla $r \in (\rho_0, \rho)$. Olettaen, että (2) on voimassa, yhtälöstä (5.6) saadaan

$$\begin{aligned}\infty > C(\rho_0, \omega) &= \int_{\rho_0}^{1} N(r)\omega(r)dr \\ &\geq \int_{\rho_0}^{\rho} N(r)\omega(r)dr \\ &= -N(\rho)\widehat{\omega}(\rho) + N(\rho_0)\widehat{\omega}(\rho_0) + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{n(r)}{r}\widehat{\omega}(r)dr \\ &\geq -N(\rho)\widehat{\omega}(\rho) + \int_{\rho_0}^{\rho} n(r)\widehat{\omega}(r)dr. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Ehdosta (2) seuraa, että $N(\rho)\widehat{\omega}(\rho) \to 0$, kun $\rho \to 1^-$. Nimittäin, koska $N(r)$ on kasvava funktio, niin

$$0 \leq N(\rho)\widehat{\omega}(\rho) = N(\rho)\int_{\rho}^{1} \omega(r)dr \leq \int_{\rho}^{1} N(r)\omega(r)dr \to 0, \quad \rho \to 0.$$

Näin ollen antamalla $\rho \to 1^-$ epäyhtälössä (5.8) saadaan

$$\infty > C(\rho_0, \omega) \geq \int_{\rho_0}^{1} n(r)\widehat{\omega}(r)dr,$$

joten

$$\int_{0}^{1} n(r)\widehat{\omega}(r)dr < \infty$$

eli (3) on voimassa. Siis ehdot (2) ja (3) ovat ekvivalentteja.

Toisaalta osittaisintegroimalla nähdään, että

$$\begin{aligned}\int_{\rho_0}^{\rho} n(r)\widehat{\omega}(r)dr &= \left[n(r)\int_1^r \widehat{\omega}(s)ds\right]_{r=\rho_0}^{\rho} - \int_{\rho_0}^{\rho}\int_1^r \widehat{\omega}(s)dsdn(r)\\ &= -n(\rho)\int_{\rho}^{1}\widehat{\omega}(s)ds + n(\rho_0)\int_{\rho_0}^{1}\widehat{\omega}(s)ds + \sum_{\rho_0<|z_k|<\rho}\int_{|z_k|}^{1}\widehat{\omega}(s)ds. \qquad (5.9)\end{aligned}$$

Tässä osittaisintegroimalla ja koska $\widehat{\omega}(1)=0$ saadaan

$$\begin{aligned}\int_{|z_k|}^{1}\widehat{\omega}(s)ds &= [\widehat{\omega}(s)(s-|z_k|)]_{s=|z_k|}^{1} - \int_{|z_k|}^{1}(-\omega(s))(s-|z_k|)ds\\ &= \int_{|z_k|}^{1}\omega(s)(s-|z_k|)ds. \qquad (5.10)\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\int_{|z_k|}^{1}\widehat{\omega}(s)ds \asymp \omega^\star(z_k), \quad |z_k|\to 1^-. \qquad (5.11)$$

Tämän tarkastamiseksi olkoon $t=|z_k|$. Nyt yhtälö (5.11) on

$$\int_t^1 \omega(s)(s-t)ds \asymp \int_t^1 \omega(s)\log\frac{s}{t}sds, \quad t\to 1^-. \qquad (5.12)$$

Voidaan olettaa, että $t\geq \frac{1}{2}$. Nyt $\frac{1}{2}\leq t\leq s\leq 1$. Arvolla $x=\frac{t}{s}\in[\frac{1}{2},1]$ saadaan Lemmasta 4.12 (vii) epäyhtälö

$$1-\frac{t}{s}\leq \log\frac{s}{t}\leq \frac{s}{t}\left(1-\frac{t}{s}\right) \qquad (5.13)$$

Kertomalla tämä puolittain luvulla s ja ottamalla huomioon, että $\frac{s}{t}\leq 2$, saadaan

$$s-t\leq s\log\frac{s}{t}\leq 2(s-t). \qquad (5.14)$$

Siis

$$\int_t^1 \omega(s)(s-t)ds \leq \int_t^1 \omega(s)\log\frac{s}{t}sds \leq 2\int_t^1 \omega(s)(s-t)ds, \qquad (5.15)$$

kun $t\in(\frac{1}{2},1]$, ja ehto (5.12) eli (5.11) seuraa.

Nyt yhtälöstä (5.9) nähdään, että (1) ja (3) ovat ekvivalentteja. Tarkastetaan tämä. Oletetaan, että (3) on voimassa. Nyt, koska $n(r)$ on kasvava,

$$0\leq n(\rho)\int_\rho^1 \widehat{\omega}(s)ds \leq \int_\rho^1 n(s)\widehat{\omega}(s)ds \to 0,$$

kun $\rho\to 1^-$. Siis, kun yhtälössä (5.9) annetaan $\rho\to 1$, niin nähdään, että

$$\infty > \int_{\rho_0}^1 n(r)\widehat{\omega}dr = n(\rho_0)\int_{\rho_0}^1 \widehat{\omega}(s)ds + \sum_{\rho_0<|z_k|}\int_{|z_k|}^1 \widehat{\omega}(s)ds.$$

Näin ollen (1) on voimassa.

Oletetaan, että (1) on voimassa. Nyt yhtälöiden (5.9) ja (5.11) nojalla

$$\begin{aligned}\int_{\rho_0}^{\rho} n(r)\widehat{\omega}(r)dr &\le n(\rho_0)\int_{\rho_0}^{1}\widehat{\omega}(s)ds + \sum_{\rho_0<|z_k|<\rho}\int_{|z_k|}^{1}\widehat{\omega}(s)ds \\ &\le n(\rho_0)\int_{\rho_0}^{1}\widehat{\omega}(s)ds + \sum_{k}\int_{|z_k|}^{1}\widehat{\omega}(s)ds \\ &\asymp n(\rho_0)\int_{\rho_0}^{1}\widehat{\omega}(s)ds + \sum_{k}\omega^{\star}(z_k) = C(\rho_0,\omega) < \infty. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Antamalla $\rho \to 1^-$ nähdään, että (3) on voimassa. □

6 Avaruuden A^p_ω funktioiden nollakohdista

Lemma 6.1. *Olkoon* $0 < p < \infty$ *ja* $\omega \in \mathcal{I}nv$. *Tällöin* $A^p_\omega \subset BN_0$.
[10, Lemma 3.2, s.30]

Todistus. Olkoon $f \in A^p_\omega$ mielivaltainen. Lemman 4.12 (iv) nojalla

$$\log^+|f| = \frac{1}{p}\log^+\left(|f|^p\frac{\omega}{\omega}\right) \le \frac{1}{p}\log^+(|f|^p\omega) + \frac{1}{p}\log^+\omega.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}}\log^+|f(z)|dA(z) \le \frac{1}{p}&\int_{\mathbb{D}}\log^+|f(z)|^p\omega(z)dA(z) \\ +\frac{1}{p}&\int_{\mathbb{D}}\log^+\frac{1}{\omega(z)}dA(z).\end{aligned} \tag{6.1}$$

Nyt, koska $\log^+ x \le x$, $x \ge 0$, (Lemma 4.12 (v)), niin

$$\int_{\mathbb{D}}\log^+|f(z)|^p\omega(z)dA(z) \le \int_{\mathbb{D}}|f(z)|^p\omega(z)dA(z) = ||f||^p_{A^p_\omega}.$$

Koska ω on invariantti, niin löytyy Lemman 3.3 mukainen $C : \mathbb{D} \to [1,\infty)$, jolle

$$\int_{\mathbb{D}}\log C(z)dA(z) < \infty$$

ja

$$\omega(u) \le C(w)\omega(\varphi_u(w))$$

eli

$$\frac{1}{\omega(\varphi_u(w))} \le \frac{C(w)}{\omega(u)}.$$

kaikilla $u, w \in \mathbb{D}$. Asettamalla $\varphi_u(w) = z$ eli $w = \varphi_u(z)$ saadaan

$$\frac{1}{\omega(z)} \leq \frac{C(\varphi_u(z))}{\omega(u)}$$

kaikilla $u, w \in \mathbb{D}$. Nyt Lemman 4.12 (iv) nojalla

$$\log^+ \frac{1}{\omega(z)} \leq \log^+ \frac{1}{\omega(u)} + \log^+ C(\varphi_u(z)) = \log^+ \frac{1}{\omega(u)} + \log C(\varphi_u(z)),$$

koska $C : \mathbb{D} \to [1, \infty)$, joten

$$\int_{\mathbb{D}} \log^+ \frac{1}{\omega(z)} dA(z) \leq \int_{\mathbb{D}} \log^+ \frac{1}{\omega(u)} dA(z) + \int_{\mathbb{D}} \log C(\varphi_u(z)) dA(z).$$

Nyt muuttujanvaihdolla $z = \varphi_u(w)$ eli $w = \varphi_u(z)$, jolla on Jakobin determinantti $|\varphi_u'(w)|$, saadaan

$$\int_{\mathbb{D}} \log C(\varphi_u(z)) dA(z) = \int_{\mathbb{D}} \log C(w) |\varphi_u'(w)|^2 dA(w).$$

Tässä Lemman 2.14 (v) nojalla

$$|\varphi_u'(w)|^2 = \left(\frac{1 - |u|^2}{|1 - \overline{u}w|^2} \right)^2 \leq \frac{(1 + |u|)^2 (1 - |u|)^2}{(1 - |u|)^2 (1 - |u|)^2} = \frac{(1 + |u|)^2}{(1 - |u|)^2},$$

koska $|1 - \overline{u}w| \geq 1 - |\overline{u}w| \geq 1 - |u|$. Näin ollen

$$\int_{\mathbb{D}} \log C(\varphi_u(z)) dA(z) \leq \frac{(1 + |u|)^2}{(1 - |u|)^2} \int_{\mathbb{D}} \log C(w) dA(w).$$

Siis

$$\begin{aligned} ||f||_{BN_0} = \int_{\mathbb{D}} \log^+ |f(z)| dA(z) \leq \frac{1}{p} ||f||_{A^p_\omega}^p & \\ + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{D}} \log^+ \frac{1}{\omega(u)} dA(z) & \\ + \frac{1}{p} \frac{(1 + |u|)^2}{(1 - |u|)^2} \int_{\mathbb{D}} \log C(w) dA(w) < \infty. & \end{aligned} \tag{6.2}$$

□

Lemma 6.2. *Olkoon $h : (0, 1) \to [0, \infty)$ kasvava ja olkoot $a, b : (0, 1) \to [0, \infty)$ siten, että*

$$\int_0^1 a(r) dr = \int_0^1 b(r) dr = 1.$$

Oletetaan, että on olemassa $x \in (0, 1)$ siten, että $a(r) \leq b(r), r \in (0, x)$ ja $a(r) \geq b(r), r \in (x, 1)$. Tällöin

$$\int_0^1 a(r) h(r) dr \geq \int_0^1 b(r) h(r) dr.$$

Todistus. Koska $a(r) - b(r) \leq 0, \quad r \in (0, x)$, ja $a(r) - b(r) \geq 0, \quad r \in (x, 1)$, niin

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 a(r)h(r)dr - \int_0^1 b(r)h(r)dr \\
&= \int_0^1 (a(r) - b(r))h(r)dr \\
&= \int_0^x (a(r) - b(r))h(r)dr + \int_x^1 (a(r) - b(r))h(r)dr \\
&\geq h(x) \int_0^x (a(r) - b(r))dr + h(x) \int_x^1 (a(r) - b(r))dr \\
&= h(x) \left(\int_0^1 a(r)dr - \int_0^1 b(r)dr \right) \\
&= 0. \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

□

Lemma 6.3. *[10, Lemma 3.3., s.31] Olkoon $0 < p < q < \infty$, $\omega \in \mathcal{I}nv$ ja $\{z_k\}$ funktion $f \in A^p_\omega$ nollakohtajoukko monikerrat laskien. Olkoon*

$$g(z) = |f(z)|^p \prod_k \frac{1 - \frac{p}{q} + \frac{p}{q}|\varphi_{z_k}(z)|^q}{|\varphi_{z_k}(z)|^p}.$$

Tällöin on olemassa $C = C(p, q, \omega) > 0$ siten, että

$$||g||_{L^1_\omega} = \int_{\mathbb{D}} |g(z)|\omega(z)dA(z) \leq C||f||^p_{A^p_\omega}. \qquad (6.4)$$

Edelleen pätee seuraavaa.

(i) *Jos $0 < p < q \leq 2$, niin $C = C(\omega)$.*

(ii) *Jos $2 < q < \infty$ ja $\frac{q}{p} \geq 1 + \varepsilon$, niin $C = C_1 q e^{C_1 q}$, missä $C_1(\varepsilon, \omega)$.*

Todistus. Tarkastellaan lukua $g(0)$. Oletetaan, että $f(0) \neq 0$. Lemman 6.1 nojalla $f \in BN_0$. Lemman 4.8 nojalla

$$\sum_{|z_k|<r} \log \frac{r}{|z_k|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sum_{|z_k|<r} \log \frac{r}{|z_k|} r dr &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \log |f(z)| dA(z) - \int_0^1 \log |f(0)| r dr \qquad (6.5) \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \log^+ |f(z)| dA(z) - \frac{\log |f(0)|}{2} \\
&\leq \frac{1}{2} ||f||_{BN_0} - \frac{\log |f(0)|}{2} < \infty.
\end{aligned}$$

Toisaalta Lemman 4.12 (vii) nojalla

$$\int_0^1 \sum_{|z_k|<r} \log \frac{r}{|z_k|} r dr \geq \int_0^1 \sum_{|z_k|<r} \left(1 - \frac{|z_k|}{r}\right) r dr = \int_0^1 \sum_{|z_k|<r} (r - |z_k|) dr. \tag{6.6}$$

Nyt Riemann-Stieltjes-integraalin ominaisuuksien ja Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sum_{|z_k|<r} (r - |z_k|) dr &= \int_0^1 \int_0^r (r-t) dn(t) dr \\
&= \int_0^r \int_t^1 (r-t) dr dn(t) \\
&= \int_0^r \left[\frac{1}{2}(r-t)^2\right]_{r=t}^1 dn(t) \\
&= \int_0^r \frac{1}{2}(1-t)^2 dn(t) \\
&= \sum_k \frac{1}{2}(1-|z_k|)^2 && (6.7)
\end{aligned}$$

Siis yhdistämällä epäyhtälöt (6.5) – (6.7) saadaan

$$\sum_k (1-|z_k|)^2 \leq ||f||_{BN_0} - \log|f(0)| < \infty. \tag{6.8}$$

Tarkastellaan funktiota

$$1 - \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} r^{pn}}{r^p},$$

missä $n > 1$. L'Hospitalin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} r^{pn}}{r^p} \bigg/ -(1-r)^2 \\
&\asymp -\frac{pr^{pn-1+p} - pr^{p-1}(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} r^{pn})}{r^{2p}} \bigg/ 2(1-r) \\
&= \frac{pr^{p-1-2p}}{2}\left(r^{pn} - 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} r^{pn}\right) \bigg/ (r-1) \\
&\asymp \frac{p}{2}(pnr^{pn-1} - pr^{pn-1}) \bigg/ 1 \\
&\asymp \frac{p^2(n-1)}{2} \in (0, \infty), && (6.9)
\end{aligned}$$

kun $r \to 1^-$. Siis

$$1 - \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} r^{pn}}{r^p} \asymp -(1-r)^2,$$

kun $r \to 1^-$. Siis koska

$$\sum_k (1-|z_k|)^2$$

suppenee, niin

$$\sum_k \left(1 - \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}|z_k|^{pn}}{|z_k|^p}\right)$$

suppenee, joten Lemman 4.9 nojalla

$$\prod_k \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}|z_k|^{pn}}{|z_k|^p}$$

suppenee. Nyt Riemann-Stieltjes integraalin ominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned}
\sum_k \log\left(\frac{1 - \frac{p}{q} + \frac{p}{q}|z_k|^q}{|z_k|^p}\right) &= \int_0^1 \log\left(\frac{1 - \frac{p}{q} + \frac{p}{q}r^q}{r^p}\right) dn(r) \\
&= \left[\log\left(\frac{1 - \frac{p}{q} + \frac{p}{q}r^q}{r^p}\right) n(r)\right]_{r=0}^1 - \int_0^1 \alpha(r)n(r)dr \\
&= -\int_0^1 \alpha(r)n(r)dr, \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

missä sijoitustermi häviää yhtälön (2.5) nojalla, koska $f(0) \neq 0$, ja

$$\begin{aligned}
\alpha(r) &= \frac{d}{dr}\log\left(\frac{1 - \frac{p}{q} + \frac{p}{q}r^q}{r^p}\right) = \frac{d}{dr}\left[\log\left(1 - \frac{p}{q} + \frac{p}{q}r^q\right) - p\log r\right] \\
&= \frac{pr^{q-1}}{1 - \frac{p}{q} + \frac{p}{q}r^q} - \frac{p}{r} = \frac{p}{r}\left(\frac{r^q}{1 - \frac{p}{q} + \frac{p}{q}r^q} - 1\right) \\
&= \frac{p}{r}\left(\frac{r^q - 1 + \frac{p}{q} - \frac{p}{q}r^q}{1 - \frac{p}{q} + \frac{p}{q}r^q}\right) = \frac{p}{r}\left(\frac{\frac{q}{p}r^q - \frac{q}{p} + 1 - r^q}{\frac{q}{p} - 1 + r^q}\right) \\
&= -\frac{p}{r}\frac{(\frac{q}{p} - 1)(1 - r^q)}{\frac{q}{p} - 1 + r^q}. \qquad (6.11)
\end{aligned}$$

Siis

$$\sum_k \log\left(\frac{1 - \frac{p}{q} + \frac{p}{q}|z_k|^q}{|z_k|^p}\right) = \int_0^1 \frac{(\frac{q}{p} - 1)(1 - r^q)}{\frac{q}{p} - 1 + r^q}\frac{pn(r)}{r}dr. \qquad (6.12)$$

Olkoon

$$u(r) = \frac{(\frac{q}{p} - 1)(1 - r^q)}{\frac{q}{p} - 1 + r^q}, \quad r \in (0,1). \qquad (6.13)$$

Nyt

$$\begin{aligned}
u'(r) &= -\left(\frac{q}{p}-1\right)\frac{-qr^{q-1}\left(\frac{q}{p}-1+r^q\right)-(1-r^q)qr^{q-1}}{\left(\frac{q}{p}-1+r^q\right)^2} \\
&= \left(\frac{q}{p}-1\right)\frac{qr^{q-1}}{\left(\frac{q}{p}-1+r^q\right)^2}\left(\frac{q}{p}-1+r^q+1-r^q\right) \\
&= \frac{q}{p}\left(\frac{q}{p}-1\right)\frac{qr^{q-1}}{\left(\frac{q}{p}-1+r^q\right)^2}. \qquad (6.14)
\end{aligned}$$

Nyt

$$\int_0^1 -u'(r)dr = u(0)-u(1) = 1-0 = 1.$$

Lisäksi $-u'(r) > 0$, kun $r \in (0,1)$. Siis $-u'(r)dr$ on välin $(0,1)$ todennäköisyysmitta. Olkoon nyt

$$d\sigma(z) = -u'(|z|)\frac{dA(z)}{2|z|}.$$

Nähdään, että

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} d\sigma(z) &= \int_{\mathbb{D}} -u'(|z|)\frac{dA(z)}{2|z|} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{-u'(r)}{2r}\frac{rdrd\varphi}{\pi} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^1 -u'(r)dr\right) = 1. \qquad (6.15)
\end{aligned}$$

Funktion $-u'$ positiivisuuden nojalla $d\sigma$ on positiivinen yksikkökiekossa ja siten todennäköisyysmitta.

Nyt yhtälöstä (6.12) saadaan yhtälön (6.14) nojalla osittaisintegroimalla

$$\begin{aligned}
\sum_k \log\left(\frac{1-\frac{p}{q}+\frac{p}{q}|z_k|^q}{|z_k|^p}\right) &= \int_0^1 \frac{(\frac{q}{p}-1)(1-r^q)}{\frac{q}{p}-1+r^q}\frac{pn(r)}{r}dr \\
&= \left[\frac{(\frac{q}{p}-1)(1-r^q)}{\frac{q}{p}-1+r^q}pN(r)\right]_{r=0}^1 - \int_0^1 u'(r)pN(r)dr \\
&= -\int_0^1 u'(r)pN(r)dr. \qquad (6.16)
\end{aligned}$$

Koska $f(0) \neq 0$, niin osittaisintegroimalla, Riemann-Stieltjes-integraalin ominaisuuksien ja Lemman 4.8 nojalla

$$
\begin{aligned}
N(r) &= \int_0^r \frac{n(s)-n(0)}{s}ds + n(0)\log r \\
&= \int_0^r \frac{n(s)}{s}ds \\
&= -\left[\log\frac{r}{s}n(s)\right]_{s=0}^r + \int_0^r \log\frac{r}{s}dn(s) \\
&= \int_0^r \log\frac{r}{s}dn(s) \\
&= \sum_k \log\frac{r}{|z_k|} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - \log|f(0)|. \qquad (6.17)
\end{aligned}
$$

Siis

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1 u'(r)pN(r)dr &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \log|f(re^{i\theta})|^p(-u'(r))\frac{rdrd\theta}{2r\pi} \\
&\quad - \log|f(0)|^p\int_0^1 -u'(r)dr \\
&= \int_{\mathbb{D}} \log|f(z)|^p d\sigma(z) - \log|f(0)|^p. \qquad (6.18)
\end{aligned}
$$

Yhdistämällä (6.16) ja (6.18) päätellään, että

$$
\begin{aligned}
\log(g(0)) &= \log\left(|f(0)|^p\prod_k\left(\frac{1-\frac{p}{q}+\frac{p}{q}|z_k|^q}{|z_k|^p}\right)\right) \\
&= \log|f(0)|^p + \sum_k \log\left(\frac{1-\frac{p}{q}+\frac{p}{q}|z_k|^q}{|z_k|^p}\right) = \int_{\mathbb{D}}\log|f(z)|^p d\sigma(z). \qquad (6.19)
\end{aligned}
$$

Korvataan nyt f funktiolla $f\circ\varphi_\zeta$. Funktion f nollakohdat olivat jonossa (z_k). Olkoon $w_k = \varphi_\zeta(z_k)$ kaikilla k. Nyt funktion $f\circ\varphi_\zeta$ nollakohdat ovat jonossa (w_k). Uudeksi funktioksi $\widetilde{g}$ saadaan

$$
\widetilde{g}(z) = |f(\varphi_\zeta(z))|^p\prod_k \frac{1-\frac{p}{q}+\frac{p}{q}|\varphi_{w_k}(z)|^q}{|\varphi_{w_k}(z)|^p}.
$$

Edelleen arvolla $z=0$ saadaan, koska $\varphi_\zeta(0)=\zeta$,

$$
\widetilde{g}(0) = |f(\zeta)|^p\prod_k \frac{1-\frac{p}{q}+\frac{p}{q}|w_k|^q}{|w_k|^p}.
$$

Nyt $|w_k| = |\varphi_\zeta(z_k)| = |\varphi_{z_k}(\zeta)|$ kaikilla k, joten

$$
\widetilde{g}(0) = |f(\zeta)|^p\prod_k \frac{1-\frac{p}{q}+\frac{p}{q}|\varphi_{z_k}(\zeta)|^q}{|\varphi_{z_k}(\zeta)|^p} = g(\zeta).
$$

Siis yhtälöstä (6.19) saadaan

$$\log(g(\zeta)) = \log(\widetilde{g}(0)) = \int_{\mathbb{D}} \log|f(\varphi_\zeta(z))|^p d\sigma(z), \quad f(\zeta) \neq 0. \tag{6.20}$$

Oletetaan, että $0 < q \leq 2$. Väitetään, että on olemassa yksikäsitteinen piste $x = x(p,q) \in (0,1)$ siten, että $-u'(x) = 2x, 2r \leq -u'(r)$ välillä $(0,x]$, ja $2r \geq -u'(r)$ välillä $[x,1)$. Ensiksi huomataan, että

$$-u'(r) = \frac{q}{p}\left(\frac{q}{p} - 1\right) \frac{qr^{q-1}}{\left(\frac{q}{p} - 1 + r^q\right)^2} = 2r,$$

jos ja vain jos

$$\frac{q^2}{p}\left(\frac{q}{p} - 1\right) = 2r^{2-q}\left(\frac{q}{p} - 1\right)^2 + 4r^2\left(\frac{q}{p} - 1\right) + 2r^{q+2}. \tag{6.21}$$

Oletetaan, että $q < 2$. Nyt oikea puoli on kasvava, häviää origossa ja saa pisteessä 1 arvon

$$2\left(\frac{q}{p} - 1\right)^2 + 4\left(\frac{q}{p} - 1\right) + 2 = 2\left(\frac{q}{p} - 1 + 1\right)^2 = 2\left(\frac{q}{p}\right)^2.$$

Nyt

$$2\left(\frac{q}{p}\right)^2 - \frac{q^2}{p}\left(\frac{q}{p} - 1\right) = \frac{q^2}{p}\left(\frac{2}{p} - \frac{q}{p} + 1\right) = \frac{q^2}{p}\left(\frac{2 - q + p}{p}\right) > 0.$$

Siis tilanteessa $q < 2$ yhtälöllä (6.21) on täsmälleen yksi ratkaisu välillä $(0,1)$ eli väitetyn pisteen x olemassaolo seuraa.

Oletetaan, että $q = 2$. Nyt yhtälö (6.21) on muotoa

$$\frac{4^2}{p}\left(\frac{2}{p} - 1\right) = 2\left(\frac{2}{p} - 1\right)^2 + 4r^2\left(\frac{2}{p} - 1\right) + 2r^4 = 2\left(\frac{2}{p} - 1 + r^2\right)^2. \tag{6.22}$$

Oikea puoli on kasvava. Jos $r = 0$, niin vasen puoli on oikeaa suurempi muodossa

$$\frac{2}{p} > \frac{2}{p} - 1.$$

Jos $r = 1$, niin vasen puoli on oikeaa pienempi muodossa

$$\frac{2}{p} - 1 < \frac{2}{p}.$$

Siis myös tilanteessa $q = 2$ yhtälöllä (6.21) on täsmälleen yksi ratkaisu välillä $(0,1)$ eli väitetyn pisteen x olemassaolo seuraa arvoilla $q \leq 2$.

Nyt Lemman 6.2 nojalla

$$\int_0^1 h(r)(-u'(r))dr \leq \int_0^1 h(r) \cdot 2rdr$$

kaikilla kasvavilla funktioilla $h(r) : (0,1) \to [0,\infty)$. Koska Jensenin kaavan nojalla

$$\int_0^{2\pi} \log |f(\varphi_\zeta(re^{i\theta}))|^p d\theta$$

on kasvava, kun $r \in (0,1)$, niin

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \log |f(\varphi_\zeta(re^{i\theta}))|^p d\theta(-u'(r))dr \leq \int_0^1 \int_0^{2\pi} \log |f(\varphi_\zeta(re^{i\theta}))|^p d\theta \cdot 2rdr$$

eli

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \log |f(\varphi_\zeta(re^{i\theta}))|^p \left(\frac{-u'(r)}{2r}\right) \frac{d\theta r dr}{\pi} \leq \int_0^1 \int_0^{2\pi} \log |f(\varphi_\zeta(re^{i\theta}))|^p \frac{d\theta r dr}{\pi}$$

eli

$$\int_{\mathbb{D}} \log |f(\varphi_\zeta(z))|^p d\sigma(z) \leq \int_{\mathbb{D}} \log |f(\varphi_\zeta(z))|^p dA(z). \tag{6.23}$$

Yhdistämällä yhtälö (6.20) ja epäyhtälö (6.23) saadaan

$$\log(g(\zeta)) \leq \int_{\mathbb{D}} \log(|f(\varphi_\zeta(z))|^p) dA(z), \quad f(\zeta) \neq 0. \tag{6.24}$$

Kertomalla tämä puolittain luvulla $\log \omega(z)$ saadaan

$$\log(g(\zeta)\omega(\zeta)) \leq \int_{\mathbb{D}} \log(|f(\varphi_\zeta(z))|^p \omega(\zeta)) dA(z) \tag{6.25}$$

$$= \int_{\mathbb{D}} \log\left(|f(\varphi_\zeta(z))|^p \omega(\zeta) \frac{1-|z|^2}{C(z)}\right) dA(z) + C_1, \tag{6.26}$$

missä C on funktio Lemmasta 3.3 ja siten

$$\begin{aligned} C_1 = C_1(\omega) &= \int_{\mathbb{D}} \log\left(\frac{C(z)}{1-|z|^2}\right) dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \log(C(z)) dA(z) - \int_{\mathbb{D}} \log(1-|z|^2) dA(z) \in (0,\infty). \end{aligned} \tag{6.27}$$

Tarkistetaan, että todella $C_1 \in (0,\infty)$. Ensimmäinen integraali on äärellinen ei-negatiivinen luku. Nimittäin $C(z) \geq 1$ kaikilla $z \in \mathbb{D}$ ja epäyhtälö (3.2) pätee.

Tarkastellaan jälkimmäistä integraalia kohdassa (6.27). Olkoon $h(x) = x \log x - x$. Nyt

$$\frac{d}{dx} h(x) = \log x.$$

Edelleen $h(1) = -1$ ja

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} x \log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$

Siis

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \log(1-|z|^2)dA(z) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \log(1-r^2)\frac{rdrd\theta}{\pi} \\
&= -\int_0^1 -2r\log(1-r^2)dr \\
&= -\int_0^1 -2rh'(1-r^2) \\
&= -\lim_{r\to 1-} h(1-r^2) + h(1-0^2) = -1. \qquad (6.28)
\end{aligned}$$

Nyt Jensenin epäyhtälön ja epäyhtälön (3.1) nojalla

$$\begin{aligned}
g(\zeta)\omega(\zeta) &\le e^{C_1}\int_{\mathbb{D}} |f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\frac{1-|z|^2}{C(z)}dA(z) \\
&\le e^{C_1}\int_{\mathbb{D}} |f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\varphi_\zeta(z))(1-|z|^2)dA(z), \qquad (6.29)
\end{aligned}$$

kun ζ ei ole funktion f nollakohta. Integroimalla tätä epäyhtälöä päätellään, että

$$||g||_{L^1_\omega} = \int_{\mathbb{D}} g(\zeta)\omega(\zeta)d\zeta \le e^{C_1}\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} |f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\varphi_\zeta(z))(1-|z|^2)dA(z)dA(\zeta). \qquad (6.30)$$

Tehdään muuttujanvaihto $\varphi_\zeta(z) = u$ eli $z = \varphi_\zeta(u)$. Nyt Jakobin determinantiksi saadaan $|\varphi'_\zeta(u)|^2$. Fubinin lauseella saadaan

$$||g||_{L^1_\omega} \le e^{C_1}\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} |f(u)|^p\omega(u)(1-|\varphi_\zeta(u)|^2)|\varphi'_\zeta(u)|^2dA(\zeta)dA(u) \qquad (6.31)$$

Nyt $(1-|\varphi_\zeta(u)|^2) = (1-|u|^2)|\varphi'_\zeta(u)|$ ja $|\varphi'_\zeta(u)| = (1-|\zeta|^2)/|1-\overline{\zeta}u|^2$, joten käyttämällä Lemmaa 4.11 (iii) saadaan

$$\begin{aligned}
||g||_{L^1_\omega} &\le e^{C_1}\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} |f(u)|^p\omega(u)(1-|u|^2)|\varphi'_\zeta(u)|^3dA(\zeta)dA(u) \\
&= e^{C_1}\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} |f(u)|^p\omega(u)\frac{(1-|u|^2)(1-|\zeta|^2)^3}{|1-\overline{\zeta}u|^6}dA(\zeta)dA(u) \\
&= e^{C_1}\int_{\mathbb{D}} |f(u)|^p\omega(u)(1-|u|^2)\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|\zeta|^2)^3}{|1-\overline{\zeta}u|^6}dA(\zeta)dA(u) \\
&\le e^{C_1}||f||^p_{A^p_\omega}\int_{\mathbb{D}}(1-|u|^2)\int_0^1(1-s^2)^3\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|1-use^{-i\theta}|^6}dsdA(u) \\
&\lesssim ||f||^p_{A^p_\omega}\int_{\mathbb{D}}(1-|u|^2)\int_0^1(1-s|u|)^3\frac{1}{(1-s|u|)^5}dsdA(u) \\
&= ||f||^p_{A^p_\omega}\int_{\mathbb{D}}(1-|u|)\int_0^1\frac{ds}{(1-|u|s)^2}dA(u) \lesssim ||f||^p_{A^p_\omega}. \qquad (6.32)
\end{aligned}$$

kaikilla $u \in \mathbb{D}$. Nyt kohta (i) on todistettu.

Olkoon $q \geq 2$. Nyt

$$-u'(r) = \frac{q}{p}\left(\frac{q}{p} - 1\right)\frac{qr^{q-1}}{\left(\frac{q}{p} - 1 + r^q\right)^2} \leq \frac{q^2}{q-p}r^{q-1} \leq \frac{q^2}{q-p}r, \quad 0 \leq r \leq 1 \tag{6.33}$$

ja siten

$$d\sigma(z) = -u'(|z|)\frac{dA(z)}{2|z|} \leq \frac{q^2}{q-p}|z|\frac{dA(z)}{2|z|} = \frac{q^2}{2(q-p)}dA(z), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{6.34}$$

Epäyhtälöstä (6.20) seuraa

$$\begin{aligned}\log g(\zeta)\omega(\zeta) &= \int_{\mathbb{D}} \log\left(|f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\right)d\sigma(z)\\ &\leq \int_{\mathbb{D}} \log\left(|f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\frac{1-|z|^2}{C(z)}\right)d\sigma(z)\\ &+ \int_{\mathbb{D}} \log\left(\frac{C(z)}{1-|z|^2}\right)d\sigma(z).\end{aligned} \tag{6.35}$$

Tässä C on funktio Lemmasta 3.3. Nyt epäyhtälön (6.34) nojalla

$$\int_{\mathbb{D}} \log\frac{C(z)}{1-|z|^2}d\sigma(z) \leq \frac{q^2}{2(q-p)}\int_{\mathbb{D}} \log\frac{C(z)}{1-|z|^2}dA(z) = C_1(q,p,\omega) < \infty.$$

Siis

$$\log g(\zeta)\omega(\zeta) \leq \int_{\mathbb{D}} \log\left(|f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\frac{1-|z|^2}{C(z)}\right)d\sigma(z) + C_1, \tag{6.36}$$

joten

$$g(\zeta)\omega(\zeta) \leq e^{C_1}\exp\int_{\mathbb{D}} \log\left(|f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\frac{1-|z|^2}{C(z)}\right)d\sigma(z). \tag{6.37}$$

Koska $d\sigma(z)$ on todennäköisyysmitta joukossa $\mathbb{D}$ ja eksponenttifunktio on konveksi, niin Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}g(\zeta)\omega(\zeta) &\leq e^{C_1}\exp\int_{\mathbb{D}} \log\left(|f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\frac{1-|z|^2}{C(z)}\right)d\sigma(z)\\ &\leq e^{C_1}\int_{\mathbb{D}} \exp\log\left(|f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\frac{1-|z|^2}{C(z)}\right)d\sigma(z)\\ &= e^{C_1}\int_{\mathbb{D}} |f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\frac{1-|z|^2}{C(z)}d\sigma(z).\end{aligned} \tag{6.38}$$

Nyt epäyhtälön (6.34) nojalla muistaen, että C on funktio Lemmasta 3.3, saadaan

$$\begin{aligned}g(\zeta)\omega(\zeta) &= \frac{q^2}{2(q-p)}e^{C_1}\int_{\mathbb{D}} |f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\frac{1-|z|^2}{C(z)}dA(z)\\ &\leq \frac{q^2}{2(q-p)}e^{C_1}\int_{\mathbb{D}} |f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\varphi_\zeta(z))(1-|z|^2)dA(z),\end{aligned} \tag{6.39}$$

kun $f(\zeta) \neq 0$. Epäyhtälöstä (6.29) seurasi

$$||g||_{L^1_\omega} \leq C(\omega)||f||_{A^p_\omega},$$

joten epäyhtälöstä (6.39) seuraa

$$||g||_{L^1_\omega} \leq \frac{q^2}{2(q-p)} e^{C_1} C(\omega)||f||_{A^p_\omega}.$$

Siis

$$||g||_{L^1_\omega} \leq C_2||f||_{A^p_\omega},$$

missä

$$C_2 = C_2(q,p,\omega) = \frac{q^2}{2(q-p)} e^{C_3(q,p,\omega)} > 0$$

on vakio.

Nyt on tarkasteltu tapaukset $0 < q \leq 2$ ja $q \geq 2$. Siis (6.4) pätee kaikilla $0 < p < q < \infty$. Todistetaan vielä väite (ii). Oletetaan, että $2 < q < \infty$ ja $\frac{q}{p} \geq 1 + \varepsilon > 1$. Nyt

$$\begin{aligned} -u'(r) &= \frac{q}{p}\left(\frac{q}{p} - 1\right) \frac{qr^{q-1}}{\left(\frac{q}{p} - 1 + r^q\right)^2} \\ &\leq \frac{q}{p}\left(\frac{q}{p} - 1\right) \frac{qr}{\left(\frac{q}{p} - 1\right)^2} \\ &= \frac{\frac{q}{p}}{\frac{q}{p} - 1} qr \\ &\leq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} qr. \end{aligned} \tag{6.40}$$

Viimeisen epäyhtälön näkemiseksi tarkastellaan funktiota $h(x) : [1+\varepsilon, \infty) \to (1, \infty)$,

$$h(x) = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Nyt

$$h'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$$

kaikilla $x > 1$, joten h on vähenevä ja siten

$$h(x) \leq h(1+\varepsilon) = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$$

kaikilla $x \in [1+\varepsilon, \infty)$. Sijoittamalla $x = \frac{q}{p}$ tästä saadaan epäyhtälöketjun (6.40) viimeinen epäyhtälö. Nyt epäyhtälöketjun (6.40) nojalla

$$d\sigma(z) = -u'(|z|)\frac{dA(z)}{2|z|} \leq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} q|z|\frac{dA(z)}{2|z|} = \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} q\,dA(z), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{6.41}$$

Epäyhtälöstä (6.20) seuraa

$$\begin{aligned}\log g(\zeta)\omega(\zeta) &= \int_{\mathbb{D}} \log\left(|f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\right) d\sigma(z)\\ &\leq \int_{\mathbb{D}} \log\left(|f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\frac{1-|z|^2}{C(z)}\right) d\sigma(z)\\ &+ \int_{\mathbb{D}} \log\left(\frac{C(z)}{1-|z|^2}\right) d\sigma(z).\end{aligned} \tag{6.42}$$

Tässä C on funktio Lemmasta 3.3. Nyt epäyhtälön (6.41) nojalla

$$\int_{\mathbb{D}} \log\frac{C(z)}{1-|z|^2} d\sigma(z) \leq \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} q \int_{\mathbb{D}} \log\frac{C(z)}{1-|z|^2} dA(z) = C_1(\varepsilon,\omega) < \infty.$$

Siis

$$\log g(\zeta)\omega(\zeta) \leq \int_{\mathbb{D}} \log\left(|f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\frac{1-|z|^2}{C(z)}\right) d\sigma(z) + C_1, \tag{6.43}$$

joten

$$g(\zeta)\omega(\zeta) \leq e^{C_1} \exp\int_{\mathbb{D}} \log\left(|f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\frac{1-|z|^2}{C(z)}\right) d\sigma(z). \tag{6.44}$$

Koska $d\sigma(z)$ on todennäköisyysmitta joukossa $\mathbb{D}$ ja eksponenttifunktio on konveksi, niin Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}g(\zeta)\omega(\zeta) &\leq e^{C_1} \exp\int_{\mathbb{D}} \log\left(|f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\frac{1-|z|^2}{C(z)}\right) d\sigma(z)\\ &\leq e^{C_1} \int_{\mathbb{D}} \exp\log\left(|f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\frac{1-|z|^2}{C(z)}\right) d\sigma(z)\\ &= e^{C_1} \int_{\mathbb{D}} |f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\frac{1-|z|^2}{C(z)} d\sigma(z).\end{aligned} \tag{6.45}$$

Nyt epäyhtälön (6.41) nojalla muistaen, että C on funktio Lemmasta 3.3, saadaan

$$\begin{aligned}g(\zeta)\omega(\zeta) &= \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} q e^{C_1} \int_{\mathbb{D}} |f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\zeta)\frac{1-|z|^2}{C(z)} dA(z)\\ &\leq \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} q e^{C_1} \int_{\mathbb{D}} |f(\varphi_\zeta(z))|^p\omega(\varphi_\zeta(z))(1-|z|^2) dA(z),\end{aligned} \tag{6.46}$$

kun $f(\zeta) \neq 0$. Epäyhtälöstä (6.29) seurasi

$$||g||_{L^1_\omega} \leq C(\omega)||f||_{A^p_\omega},$$

joten epäyhtälöstä (6.39) seuraa

$$||g||_{L^1_\omega} \leq \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} q e^{C_1} C(\omega)||f||_{A^p_\omega}.$$

Siis

$$||g||_{L^1_\omega} \leq C_4||f||_{A^p_\omega},$$

missä

$$C_4 = C_4(\varepsilon,\omega) = \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}qe^{qC_5(\varepsilon,\omega)} > 0$$

on vakio. Tähän päättyy todistus. $\square$

Määritelmä 6.4. Olkoon X avaruus joukon $\mathbb{D}$ analyyttisiä funktioita. Joukko $\{z_k\}$ on X-*nollakohtajoukko*, jos on olemassa $f \in X$ siten, että f häviää täsmälleen pisteissä z_k eikä muualla.

Lause 6.5. *[10, Theorem 3.5., s.38] Olkoon* $0 < p < \infty$ *ja* $\omega \in \mathcal{I}nv$. *Olkoon* (z_k) *mielivaltainen funktion* $f \in A^p_\omega$ *nollakohta-joukon osajoukko ja olkoon*

$$H(z) = \prod_k B_k(z)(2 - B_k(z)), \quad B_k = \frac{|z_k|}{z_k}\varphi_{z_k}, \tag{6.47}$$

missä $|z_k|/z_k = 1$, *jos* $z_k = 0$. *Silloin on olemassa vakio* $C = C(\omega) > 0$ *siten, että* $||f/H||^p_{A^p_\omega} \leq C||f||^p_{A^p_\omega}$. *Erityisesti jokaisen* $A^p_\omega-$*nollakohtajoukon osajoukko on* $A^p_\omega-$*nollakohtajoukko.*

Huomautus 6.6. Lause 6.5 kertoo, että jokaisen $A^p_\omega-$ nollakohtajoukon osajoukko on $A^p_\omega-$nollakohtajoukko. Lisäksi, jos halutaan faktoroida f muotoon

$$f = \frac{f}{H} \cdot H,$$

niin tiedetään, että jos $f \in A^p_\omega$, niin myös $\frac{f}{H} \in A^p_\omega$. Kuitenkaan Lauseen 6.5 perusteella ei vielä tiedetä, päteekö $H \in A^p_\omega$.

Avaruuden $A^p = A^p_0$ nollakohtien karakterisointi on avoin ongelma. [10, s.37]

Lähteessä [10] Lauseen 6.5 todistuksessa seurataan Horowitzia [3, 5, 6].

Huomautus 6.7. Lähteessä [10, Theorem 3.5., s.38] valittiin Lauseen 6.5 funktiot B_k eri tavalla:

$$B_k = \frac{z_k}{|z_k|}\varphi_{z_k}.$$

Valitsemalla kuten yhtälössä (6.47) voidaan funktion H analyyttisyyden todistuksessa toimia, kuten lähteessä [3, Lemma 7.5.].

Todistus. Tarkastellaan aluksi funktion H analyyttisyyttä lähteen [3, Lemma 7.5.] mukaisesti. Nyt

$$\begin{aligned}
1 - B_k(z)(2 - B_k(z)) &\le |1 - |B_k(z)(2 - B_k(z))|| \\
&\le |1 - B_k(z)(2 - B_k(z))| \\
&= |1 - B_k(z)|^2 \\
&= \left|1 - \frac{|z_k|}{z_k}\frac{z_k - z}{1 - \overline{z_k}z}\right|^2 \\
&= \left|\frac{z_k - |z_k|^2 z - |z_k| z_k + |z_k| z}{z_k(1 - \overline{z_k}z)}\right|^2 \\
&= \left|\frac{(1 - |z_k|)(z_k + z|z_k|)}{z_k(1 - \overline{z_k}z)}\right|^2 \\
&= (1 - |z_k|)^2 \left|\frac{1 - z\frac{|z_k|}{z_k}}{1 - \overline{z_k}z}\right|^2 \\
&\le (1 - |z_k|)^2 \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|}\right)^2 \\
&\le (1 - |z_k|)^2 \left(\frac{2}{1 - |z|}\right)^2 \\
&\le (1 - |z_k|)^2 \left(\frac{2}{1 - r}\right)^2, \qquad (6.48)
\end{aligned}$$

kun $|z| \le r$. Olettaen, että $f(0) \neq 0$, yhtälön (6.8) nojalla

$$\sum_k (1 - |z_k|)^2 < \infty$$

ja siten Weierstrassin M-testin nojalla

$$\sum_k (1 - B_k(z)(2 - B_k(z))) \qquad (6.49)$$

suppenee tasaisesti kiekossa $z \in D(0, r)$ ja siten Lemman 4.10 nojalla

$$\prod_k (1 - B_k(z)(2 - B_k(z)))$$

suppenee tasaisesti kiekossa $z \in D(0, r)$. Tässä $r \in (0, 1)$ oli mielivaltainen, joten sarja (6.49) suppenee tasaisesti yksikkökiekon kompakteissa osajoukoissa. Lemman 4.10 nojalla H suppenee tasaisesti yksikkökiekon kompakteissa osajoukoissa ja H on yksikkökiekossa analyyttinen funktio.

Koska kolmioepäyhtälön nojalla $|2 - B_k(z)| \ge 2 - |B_k(z)| = 2 - |\varphi_{z_k}(z)|$, niin

$$\frac{|f(z)|}{\prod_k |\varphi_{z_k}(z)|(2 - |\varphi_{z_k}(z)|)} \ge \left|\frac{f(z)}{H(z)}\right|. \qquad (6.50)$$

Kun huomioidaan epäyhtälö (6.50), niin Lause 6.5 seuraa Lemmasta 6.8. □

Lemma 6.8. *[10, Lemma 3.6., s.38] Olkoon* $0 < p < \infty$ *ja* $\omega \in \mathcal{I}nv$. *Olkoon* $\{z_k\}$ *mielivaltainen funktion* $f \in A^p_\omega$ *nollakohtajoukon osajoukko ja asetetaan*

$$\widehat{f}(z) = \frac{|f(z)|}{\prod_k |\varphi_{z_k}(z)|(2 - |\varphi_{z_k}(z)|)}.$$

Tällöin on olemassa vakio $C = C(\omega) > 0$ *siten, että*

$$||\widehat{f}||^p_{L^p_\omega} \leq C||f||^p_{A^p_\omega}.$$

Todistus. Oletetaan, että $f(0) \neq 0$. Nyt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\log\frac{1}{r(2-r)} &= -\frac{d}{dr}(\log r + \log(2-r)) \\ &= -\left(\frac{1}{r} + \frac{-1}{2-r}\right) \\ &= -\frac{2(1-r)}{2-r}\frac{1}{r} \end{aligned} \tag{6.51}$$

Nyt Riemann-Stieltjes-integraalin ominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned} \sum_k \log\frac{1}{|z_k|(2-|z_k|)} &= \int_0^1 \log\frac{1}{r(2-r)}dn(r) \\ &= \left[\log\frac{1}{r(2-r)}n(r)\right]_{r=0}^1 - \int_0^1 -\frac{2(1-r)}{2-r}\frac{n(r)}{r}dr \\ &= \int_0^1 \frac{2(1-r)}{2-r}\frac{n(r)}{r}dr. \end{aligned} \tag{6.52}$$

Merkitään

$$d\sigma_2(z) = \frac{dA(z)}{(2-|z|)^2|z|}.$$

Nyt

$$\int_{\mathbb{D}} d\sigma_2(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{drd\theta}{\pi(2-r)^2} = 2\int_0^1 \frac{dr}{(2-r)^2} = 2\left[\frac{1}{2-r}\right]_{r=0}^1 = 1, \tag{6.53}$$

joten, koska $d\sigma_2(z)$ on positiivinen kaikilla $z \in \mathbb{D}$, $d\sigma_2$ on todennäköisyysmitta joukossa $\mathbb{D}$.

Siis

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} \log|f(z)|d\sigma_2(z) - \log|f(0)| \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta \frac{dr}{(2-r)^2} - \log|f(0)| \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - \log|f(0)|\right] \frac{2dr}{(2-r)^2} \\
&= \int_0^1 N(r)\frac{2dr}{(2-r)^2} \\
&= \int_0^1 \int_0^r \frac{n(s)}{s}ds \frac{2dr}{(2-r)^2} \\
&= \left[\int_0^r \frac{n(s)}{s}ds\frac{2}{2-r}\right]_{r=0}^1 - \int_0^1 \frac{n(r)}{r}\frac{2}{2-r}dr \\
&= 2\int_0^1 \frac{n(s)}{s}ds - \int_0^1 \frac{n(r)}{r}\frac{2}{2-r}dr \\
&= \int_0^1 \frac{n(r)}{r}\cdot 2\left(1-\frac{1}{2-r}\right)dr \\
&= \int_0^1 \frac{2(1-r)}{2-r}\frac{n(r)}{r}dr. \qquad (6.54)
\end{aligned}
$$

Siis yhtälöiden (6.52) ja (6.54) nojalla

$$\sum_k \log\frac{1}{|z_k|(2-|z_k|)} = \int_{\mathbb{D}} \log|f(z)|\frac{dA(z)}{(2-|z|)^2|z|} - \log|f(0)|. \qquad (6.55)$$

Nyt

$$d\sigma_2(z) = -u_2'(|z|)\frac{dA(z)}{2|z|}, \qquad (6.56)$$

missä

$$-u_2'(z) = \frac{2}{(2-z)^2}$$

on funktion

$$u_2(z) = \frac{-z}{2-z}$$

derivaatta. Nyt

$$-u_2'(r) = \frac{2}{(2-r)^2} = 2r,$$

jos ja vain jos

$$1 = (r^2-4r+4)\cdot r$$

eli

$$r^3-4r^2+4r-1 = (r-1)(r^2-3r+1) = (r-1)\left(r-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(r-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 0.$$

Tämä toteutuu arvoilla $r_1 \approx 0,38$, $r_2 = 1$ ja $r_3 \approx 2,61$. Lisäksi

$$-u_2'(0) = \frac{1}{2} > 0 = 2 \cdot 0$$

ja

$$-u_2'(1) = 2 \leq 2 = 2 \cdot 1.$$

Löytyy siis yksikäsitteinen piste $x \in (0,1)$ siten, että $-u_2'(x) = 2x, 2r \leq -u_2'(r)$ välillä $(0,x]$, ja $2r \geq -u_2'(r)$ välillä $[x,1)$. Lisäksi

$$\int_0^1 -u_2'(r)dr = -u_2(1) + u_2(0) = 1 + 0.$$

Siis $-u_2'(r)dr$ on välin $(0,1)$ todennäköisyysmitta, kuten $2rdr$. Nyt Lemman 6.2 nojalla

$$\int_0^1 h(r)(-u_2'(r))dr \leq \int_0^1 h(r) \cdot 2rdr$$

kaikilla $h(r) : (0,1) \to [0,1)$, jotka ovat kasvavia. Koska Jensenin kaavan nojalla

$$\int_0^{2\pi} \log |f(\varphi_\zeta(re^{i\theta}))|^p d\theta$$

on kasvava, kun $r \in (0,1)$, niin

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \log |f(\varphi_\zeta(re^{i\theta}))|^p d\theta(-u'(r))dr \leq \int_0^1 \int_0^{2\pi} \log |f(\varphi_\zeta(re^{i\theta}))|^p d\theta \cdot 2rdr$$

eli

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \log |f(\varphi_\zeta(re^{i\theta}))|^p \left(\frac{-u'(r)}{2r}\right) \frac{d\theta rdr}{\pi} \leq \int_0^1 \int_0^{2\pi} \log |f(\varphi_\zeta(re^{i\theta}))|^p \frac{d\theta rdr}{\pi}$$

eli

$$\int_{\mathbb{D}} \log |f(z)| d\sigma_2(z) \leq \int_{\mathbb{D}} \log |f(z)| dA(z).$$

Siis yhtälön (6.55) nojalla

$$\begin{aligned} \sum_k \log \frac{1}{|z_k|(2-|z_k|)} &= \int_{\mathbb{D}} \log |f(z)| d\sigma_2(z) - \log |f(0)| \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} \log |f(z)| dA(z) - \log |f(0)|, \end{aligned} \tag{6.57}$$

kun $f(0) \neq 0$.

Korvaamalla yhtälössä (6.57) funktio f funktiolla $f \circ \varphi_\zeta$ saadaan

$$\log \widehat{f}(\zeta) = \log \frac{|f(\zeta)|}{\prod_k |\varphi_{z_k}(\zeta)|(2-|\varphi_{z_k}(\zeta)|)} \leq \int_{\mathbb{D}} \log |f(\varphi_\zeta(z))| dA(z) \tag{6.58}$$

kaikilla ζ, jotka ovat funktion f nollakohtien ulkopuolella. Siis

$$\log \widehat{f}(\zeta) \leq \int_{\mathbb{D}} \log |f(\varphi_\zeta(z))| dA(z), \quad f(\zeta) \neq 0. \tag{6.59}$$

Kertomalla puolittain luvulla $p > 0$ ja käyttämällä logaritmin laskusääntöjä saadaan

$$\log \widehat{f}(\zeta)^p \leq \int_{\mathbb{D}} \log |f(\varphi_\zeta(z))|^p dA(z), \quad f(\zeta) \neq 0. \tag{6.60}$$

Koska yhtälöstä (6.24) seurasi

$$||g||_{L^1_\omega} \leq C||f||^p_{L^p_\omega},$$

missä $C = C(\omega) > 0$, niin yhtälöstä (6.60) seuraa

$$||\widehat{f}^p||_{L^1_\omega} \leq C||f||^p_{L^p_\omega}.$$

Siis

$$||\widehat{f}||^p_{L^p_\omega} = ||\widehat{f}^p||_{L^1_\omega} \leq C||f||_{L^p_\omega}$$

jollakin $C = C(\omega) > 0$. $\square$

Viitteet

[1] R. E. Greene ja S. T. Krantz, *Function Theory of One Complex Variable.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997.

[2] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu, *Theory of Bergman Spaces*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 199, Springer, New York, Berlin, etc. 2000.

[3] C. Horowitz, *Zeros of functions in the Bergman spaces*, Duke Math. J. 41 (1974), 693—710.

[4] C. Horowitz, *Factorization theorems for functions in the Bergman spaces*, Duke Math. J. 44 (1977), no. 1, 201-–213.

[5] C. Horowitz, *Some conditions on Bergman space zero sets*, J. Anal. Math. 62 (1994), 323—348.

[6] C. Horowitz, *Zero sets and radial zero sets in function spaces*, J. Anal. Math. 65 (1995), 145—159.

[7] A. Reijonen, *Hardyn avaruuksiin ja Nevanlinnan luokkaan kuuluvien funktioiden karakterisointi Blaschketuloja apuna käyttäen*, Pro gradu -tutkielma, Itä-Suomen yliopisto 2013

[8] H. L. Royden, *Real Analysis.* The Macmillan Co., New York; Collier-Macmillan Ltd., Lontoo, 1963.

[9] W. Rudin, *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[10] J. Rättyä ja J. Pelaéz, *Weighted Bergman Spaces induced by rapidly increasing weights*, Mem. Amer. Math. Soc. (to appear)
`http://arxiv.org/pdf/1210.3311.pdf`
(luettu 28.6.2013)

[11] D. Stroock, *A Concise Introduction to the Theory of Integration*, 2.painos, Birkhauser, Boston, 1994.