Euklidinen geometria 2018

Sisältö

Esipuhe

Tämä geometrian kurssi pohjautuu Antti Viholaisen laatimaan kurssimateriaaliin.

Toisaalta jokaisella luennoitsijalla on omat vahvuutensa ja mieltymyksensä, joita tulisi hyödyntää ja tuoda esille. Tämän vuoksi syksyllä 2018 kurssilla käsitellään hieman enemmän

- Eukleideen alkeita
- klassisia tuloksia
- kompleksianalyysiä

Joensuussa 10.7.2018,
Juha-Matti Huusko

1 Tasogeometrian peruskäsitteitä

Tässä luvussa lähdemme liikkeelle geometrian perusteista ottamalla käyttöön muutamia *alkeiskäsitteitä* ja niiden välisiä suhteita määrittäviä *aksioomia.*

1.1 Alkeiskäsitteitä

Matematiikassa pyritään siihen, että kaikki käsitteet muodostavat käsitehierarkian, jossa alkeiskäsitteet oletetaan tunnetuiksi ja muut käsitteet määritellään niiden avulla. Esimerkiksi ympyrä määritellään seuraavasti:

Ympyrä on niiden tason pisteiden joukko, jotka ovat yhtä etäällä annetusta kiinnitetystä pisteestä.

Tässä määritelmässä käytetään siis käsitteitä taso, piste, joukko ja yhtä etäällä. Nämä käsitteet tulee siten esittää käsitehierarkiassa ennen ympyrän käsitettä.

Geometrian peruskäsitteet ovat *alkeiskäsitteitä*, joita ei määritellä. Näitä ovat: *piste, viiva, suora, taso.*

Eukleides tosin yritti määritellä muun muassa pisteen ja suoran käsitteet seuraavasti:

"Piste on se, jolla ei ole osia."

"Viiva on leveydetön pituus."

Nämä "määritelmät"ovat kuitenkin nykymatematiikan mukaan arveluttavia.

Geometriset käsitteet voivat siis olla joko alkeiskäsitteitä tai määriteltyjä käsitteitä. Käsitteiden edustajia (yksittäistapauksia) voidaan kutsua yläkäsitteellä *geometrinen objekti.* Esimerkiksi yksittäiset pisteet, suorat, tasot, kolmiot ja ympyrät ovat kaikki geometrisia objekteja.

1.2 Alkeiskäsitteisiin liittyviä aksioomia

Aksioomat ovat väittämiä, jotka oletetaan tosiksi. Yleensä ne kertovat alkeiskäsitteiden välisistä suhteista. Koska alkeiskäsitteillä ei ole määritelmiä, aksioomia on mahdoton todistaa.[1]

Kaikki aksioomat yhdessä muodostavat *aksioomajärjestelmän.* Aksioomajärjestelmän mahdollisia ominaisuuksia ovat seuraavat:

Ristiriidattomuus: Aksioomat eivät ole keskenään ristiriidassa eikä niistä voida johtaa keskenään ristiriidassa olevia väittämiä. *Riippumattomuus:* Mi-

[1] Filosofia on sitä, että pureskellaan, mutta ei koskaan nielaista. – Kauko Huusko

kään aksiooma ei seuraa muista aksioomista. *Täydellisyys:* Kaikki mahdolliset aksioomajärjestelmää koskevat väittämät voidaan osoittaa joko tosiksi tai epätosiksi.

Yleensä aksioomajärjestelmät ovat ristiriidattomia ja riippumattomia. Sen sijaan täydellisyysvaatimus on vaikeampi: Esimerkiksi Gödelin epätäydellisyyslauseen mukaan ei ole mahdollista konstruoida reaalilukuja sisältävää aksioomajärjestelmää, joka olisi täydellinen.

Meillä on siis alkeiskäsitteet piste, viiva, suora ja taso. Lähdemme käsittelemään geometristen objektien välisiä suhteita.

Aksiooma 1: Jokaista kahta pistettä A ja B kohti on olemassa tasan yksi suora l niin, että $A \in l$ ja $B \in l$. Tällöin sanotaan, että l on pisteiden A ja B kautta kulkeva suora. Merkitään $l = \overline{AB}$.

Aksiooma 2: Jokaisella suoralla on ainakin kaksi pistettä. Lisäksi

1.3 Eukleideen määritelmät

1. Piste on se, jolla ei ole osia.

2. Viiva on se, jolla on pituutta, mutta ei leveyttä.

3. Viivan päät ovat pisteitä.

4. Viiva on suora, jos kaikki sen pisteet ovat sen päiden välissä.

5. Pinta on se, jolla on pituutta ja leveyttä, mutta ei syvyyttä.

6. Pinnan reunoja ovat viivat.

7. Pinta on tasomainen, jos kaikki sen pisteitä yhdistävät suorat sisältyvät pintaan.

8. Tasokulma on kahden toisiaan leikkaavan eri viivan välinen alue.

9. Kun kulman rajaavat viivat ovat suoria, niin kulma on suoraviivainen.

10. Kun kaksi suoraa leikkaavat toisiaan niin, että kaikki syntyvät kulmat ovat yhtä suuret, niin kyseessäolevat kulmat ovat suoria kulmia. Lisäksi suorat kohtaavat kohtisuorasti ja ovat toistensa normaaleja.

11. Suoraa kulmaa suurempaa kulmaa sanotaan tylpäksi.

12. Suoraa kulmaa pienempää kulmaa sanotaan teräväksi.

13. Reuna on sellainen, joka on jonkun äärimmäinen.

14. Kuvio on alue, jota rajoittaa reuna.

15. Ympyrä on yhdestä viivasta koostuva tasokuvio, jolla on ominaisuus: tietystä pisteestä (ympyrän keskipiste) viivalle piirretyt suorat viivat (ympyrän säteet) ovat yhtä pitkiä.

16. Edellisessä lauseessa mainittu tietty piste on ympyrän keskipiste.

17. Ympyrän halkaisija on sellainen suora viiva, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta ja jonka päät ovat ympyrän kehällä.

18. Puoliympyrä on ympyrän kehän ja halkaisijan rajaama kuvio.

19. Monikulmio on kuvio, jonka reuna koostuu suorista viivoista. Esimerkiksi kolmion reuna koostuu kolmesta janasta, nelikulmion reuna neljästä janasta ja viisikulmion viidestä janasta.

20. Kolmioita koskevia nimityksiä:
    Jos kolmiossa kaikki kolme sivua ovat yhtä pitkät, kolmio on tasasivuinen.
    Jos kolmiossa vähintään kaksi sivua ovat yhtä pitkiä, kolmio on tasakylkinen.

21. Lisää kolmioita koskevia nimityksiä:
    Jos kolmiolla on suora kulma, niin kolmio on suorakulmainen.
    Jos kolmiolla on tylppä kulma, niin kolmio on tylppäkulmainen.
    Jos kolmiolla on vain teräviä kulmia, niin kolmio on teräväkulmainen.

22. Kolmioita koskevia nimityksiä:
    Jos nelikulmion sivut ovat yhtä pitkät ja kulmat ovat yhtä suuret, nelikulmio on neliö.
    Jos nelikulmion kulmat ovat yhtä suuret, nelikulmio on suorakulmio.
    Jos nelikulmion sivut ovat yhtä pitkät, nelikulmio on neljäkäs.
    Jos nelikulmion vastakkaiset sivut ovat yhtä suuria ja vastakkaiset kulmat yhtä suuria, nelikulmio on suunnikas.

23. Yhdensuuntaiset suorat ovat suoria viivoja, joilla on ominaisuus: vaikka suoria jatkettaisiin kuinka pitkiksi tahansa kumpaankin suuntaan, niin ne eivät kohtaa kummallakaan suunnalla.

Postulaatteja

Kolme ensimmäistä postulaattia ovat ol

1. Kahden eri pisteen kautta kulkee vähintään yksi suora.

2. Janaa voi jatkaa kumpaankin suuntaan yli päätepisteidensä.

3. Annettua kahta pistettä A ja B kohti on olemassa ympyrä, jonka keskipiste on A ja joka kulkee pisteen B kautta.

4. Kaikki suorat kulmat ovat yhtä suuria.

5. Olkoon niin, että suora l leikkaa suoria m ja n. Oletetaan, että toisella puolella suoraa l sisemmät kohtaamiskulmat ovat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa. Tällöin, jos tällä puolella suoraa l suoria m ja n jatketaan, niin ne lopulta kohtaavat.

Yleisiä huomioita

1. Kolmannen kanssa yhtä suuret ovat keskenään yhtäsuuret. Eli jos tarkastellaan objekteja x, y, z ja $x = z$ ja $y = z$, niin $x = y$.

2. Jos yhtä suuriin lisätään yhtä suuret, saadaan yhtä suuret. Eli jos $x = y$ ja $a = b$, niin $x + a = y + b$.

3. Jos yhtä suurista vähennetään yhtä suuret, saadaan yhtä suuret. Eli jos $x = y$ ja $a = b$, niin $x - a = y - b$.

4. Objektit, jotka saadaan siirrettyä päällekäin, ovat yhtä suuret keskenään.

5. Kokonaisuus on suurempi kuin osa.[2]

Propositio 1.3.1 *Annetulle janalle voidaan konstruoida tasasivuinen kolmio.*

Konstruktio. Olkoon annettuna jana AB. Piirrä ympyrät $C(A, AB)$ ja $C(B, BA)$ ja olkoon C näiden leikkauspiste. Tällöin $\triangle ABC$ on tasasivuinen.

Nimittäin, saman ympyrän säteinä $AB = AC$. Toisaalta saman ympyrän säteinä $AB = BC$. Näin ollen $AC = AB = BC$ eli kolmion $\triangle ABC$ kaikki sivut ovat yhtä pitkät.

Propositio 1.3.2 *Annettu jana voidaan siirtää alkamaan annetusta pisteestä.*

Konstruktio. Olkoon annettu piste A ja annettu jana BC. Piirrä jana AC.

Piirrä tasasivuinen kolmio $\triangle ACD$. Jatka janat DA ja DC janan AC yli puolisuoriksi $\overrightarrow{DA}$ ja $\overrightarrow{DC}$.

Piirrä ympyrä $C(C, CB)$ ja olkoon $E = C(C, CB) \cap \overrightarrow{DC}$. Piirrä $C(D, DE)$ ja olkoon $F = C(D, DE) \cap \overrightarrow{DA}$. Tällöin AF on etsitty jana.

Nimittäin, saman ympyrän säteinä $CB = CE$. Tasasivuisen kolmion sivuina $DC = DA$. Saman ympyrän säteinä $DE = DF$.

Näin ollen $AF = DF - DA = DE - DC = CE = CB$.

[2]Tässä puhutaan siis äärellisistä geometrisista objekteista.
Nykymatematiikassa määritellään:
1) Kaksi joukkoa ovat yhtämahtavia, jos niiden välillä on olemassa bijektio.
2) Joukko on ääretön, jos se on yhtämahtava aidon osajoukkonsa kanssa.
Esim. tarkastellaan joukkoja $\mathbb{N}$ ja $B = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Nyt $B \subsetneq N$ ja $f : N \to B$, $f(x) = 2x$ on bijektio. Näin ollen N on yhtämahtava aidon osajoukkonsa B kanssa. Näin ollen luonnollisten lukujen joukko N on ääretön.

Propositio 1.3.3 *Pidemmästä janasta voidaan erottaa lyhyemmän janan pituinen osa.*

Konstruktio. Olkoon annettu janat AB ja CD, niin että jälkimmäinen on lyhyempi.

Olkoon $AE = CD$. Piirrä ympyrä $C(A, AE)$ ja olkoon $F = C(A, AE) \cap AB$.

Nyt saman ympyrän säteinä $AF = AE$. Siis $AF = AE = CD$. Siis $CD = AE \subset AB$.

Propositio 1.3.4 (SKS) *Jos kahdessa kolmiossa kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret, niin myös kolmas sivu ja muut kulmat ovat pareittain yhtäsuuret.*

Todistus. Olkoot annetut kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ siten, että $AB = DE$, $BC = EF$ ja $\angle ABC = \angle DEF$.

Siirrä kolmio $\triangle DEF$ niin, että piste E osuu pisteen B päälle. Kierrä edelleen kolmiota $\triangle DEF$ niin, että DE menee puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ päälle.

Nyt, koska $AB = DE$, niin pisteet B ja E ovat päällekäin.

Koska $\angle ABC = \angle DEF$, niin jana EF on puolisuoralla BC.

Koska $BC = EF$, niin piste E on pisteen C päällä.

Koska kolmiot ovat täsmälleen päällekäin, niin pätee myös $AC = DF$, $\angle BCA = \angle EFD$ ja $\angle CAB = \angle \mathrm{FDE}$.

□

Propositio 1.3.5 *Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret.*

Todistus. Olkoon kolmiossa $\triangle ABC$ yhtä pitkät sivut $AB = AC$ ja kantana BC. Tulee osoittaa $\angle ABC = \angle ACB$.

Jatka sivut AB ja AC puolisuoriksi $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$. Valitse puolisuoralta $\overrightarrow{AB}$ jokin piste D siten, että $\overrightarrow{ABD}$. Valitse puolisuoralta $\overrightarrow{AC}$ piste E siten, että $AD = AE$.

Nyt $\{BA, \angle BAE, AE\} = \{CA, \angle CAD, AD\}$, joten (SKS) $\triangle BAE \cong \triangle CAD$. Erityisesti $\angle DBC = \angle ECB$.

Nyt $\{DB, \angle DBC, BC\} = \{EC, \angle ECB, CB\}$, joten (SKS) $\triangle DCB \cong \triangle ECB$. Erityisesti $\angle EBC = \angle DCB$.

Nyt $\triangle BAE \cong \triangle CAD$ perusteella $\angle EBA = \angle DCA$. Koska $\angle EBC = \angle DCB$, niin myös
$\angle CBA = \angle EBA - \angle EBC = \angle DCA - \angle DCB = \angle BCA$. □

Propositio 1.3.6 *Jos kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, niin kolmio on tasakylkinen.*

Todistus. Olkoon kolmiossa $\triangle ABC$ kannan BC viereisille kulmille $\angle ABC = \angle ACB$. Tulee osoittaa, että $AB = AC$.

Antiteesi. Olkoon $AB > AC$ ja olkoon $D \in AB$ siten, että $DB = AC$. Piirrä jana DC.

Nyt koska $\{DB, \angle DBC, BC\} = \{AC, \angle ACB, CB\}$, niin $\triangle DCB \cong \triangle ACB$. Erityisesti $\angle BCD = \angle CBD$.

Mutta nyt $\angle ACB = \angle ABC = \angle DCB < \angle ACB$, sillä kulma $\angle DCB$ on kulman $\angle ACB$ osa. Tämä on ristiriita. Siis antiteesi on väärä ja väite on totta. □