

Käänteismatriisi

Juha-Matti Huusko

Tarkastellaan seuraavaksi muun muassa

- käänteismatriisin A^{-1} määritelmä;
- käänteismatriisin A^{-1} sovelluksia;
- milloin A^{-1} on olemassa;
- miten A^{-1} lasketaan, kun $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$;
- miten A^{-1} voidaan laskea yleisesti;
- käänteismatriisin laskukaavoja
- käänteismatriisin yleistys *pseudoinverssi* (olemassa aina!).
- suoran sovittaminen pistejoukkoon

Käänteismatriisin A^{-1} määritelmä

Määritelmä 5.1

Olkoon A neliömatriisi. Jos on olemassa samankokoinen neliömatriisi B , jolle $BA = AB = I$, niin tällöin B on matriisin A *käänteismatriisi* (*inverse matrix*). Tällöin merkitään $B = A^{-1}$.

Esimerkki 5.2

Koska

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

niin

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Luonnollisesti $A^{-1} = B$ jos ja vain jos $B^{-1} = A$. Siis $(A^{-1})^{-1} = A$.

Käänteismatriisin A^{-1} määritelmä

Esimerkki 5.3 (Matlab)

```
>> [1,2;3,4]*[-2,1;3/2,-1/2]
```

```
ans =
```

1	0
0	1

```
>> [-2,1;3/2,-1/2]*[1,2;3,4]
```

```
ans =
```

1	0
0	1

Tietokoneella yleensä $A^{-1} = \text{inv}(A)$.

Esimerkki 5.4 (Matlab)

```
>> inv([1,2;3,4])
```

```
ans =
```

-2	1
3/2	-1/2

Käänteismatriisin sovelluksia

Jos käänteismatriisi A^{-1} on olemassa, niin matriisiyhtälöitä voidaan ratkaista kätevästi

$$\begin{aligned}A\bar{x} &= \bar{b} && ||A^{-1}. \\A^{-1}A\bar{x} &= A^{-1}\bar{b} \\I\bar{x} &= A^{-1}\bar{b} \\ \bar{x} &= A^{-1}\bar{b}.\end{aligned}$$

Voidaan myös tehdä sievennyksiä ja ratkaista monimutkaisempia yhtälöitä

$$\begin{aligned}ABXC &= EU && ||A^{-1}. \\BXC &= A^{-1}EU && ||B^{-1}. \\XC &= B^{-1}A^{-1}EU && || \cdot C^{-1} \\X &= B^{-1}A^{-1}EUC^{-1}\end{aligned}$$

Käänteismatriisin kaava, koko 2x2

Lause 5.5

Kokoa 2×2 olevan matriisin

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

käänteismatriisi on

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Todistus.

Lasketaan matriisien tulo BA . Saadaan

$$BA = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da - bc & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$



Käänteismatriisin kaava, koko 2x2

Todistus.

Edelleen

$$BA = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & db - bd \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Lasketaan muutkin termit. Saadaan

$$BA = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}.$$

Siis

$$BA = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vastaavasti voidaan laskemalla tarkistaa, että $AB = I$. Siis $B = A^{-1}$ eli lause on todistettu. □

Käänteismatriisin kaava, koko 2×2

Lause 5.6

Kokoa 2×2 olevan matriisin

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

käänteismatriisi on

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Nähdään, että 2×2 tilanteessa A^{-1} on olemassa jos ja vain jos

$$\det(A) = ad - bc \neq 0.$$

Osoittautuu, että tämä pätee yleisesti.

Käänteismatriisin "kaava", koko $n \times n$

Lasketaan

- matriisi A
- alimatriisit A_{ij} (rivi i ja sarake j poistettu)
- luvut $\det(A_{ij})$
- kofaktorimatriisi $(\text{cof}(A))_{ij} = ((-1)^{i+j} A_{ij})_{ij}$
- adjungoitu matriisi $\text{adj}(A) = \text{cof}(A)^T$
- käänteismatriisi $\text{inv}(A) = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$

Käänteismatriisin "kaava", koko $n \times n$

Esimerkki 5.7

matriisi ja alimatriisien determinantit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, (\det(A_{ij}))_{ij} = \begin{pmatrix} |4| & |3| \\ |2| & |1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

kofaktorimatriisi ja adjungoitu matriisi

$$\text{cof}(A) = ((-1)^{i+j} \det(A_{ij}))_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

käänteismatriisi

$$\text{inv}(A) = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

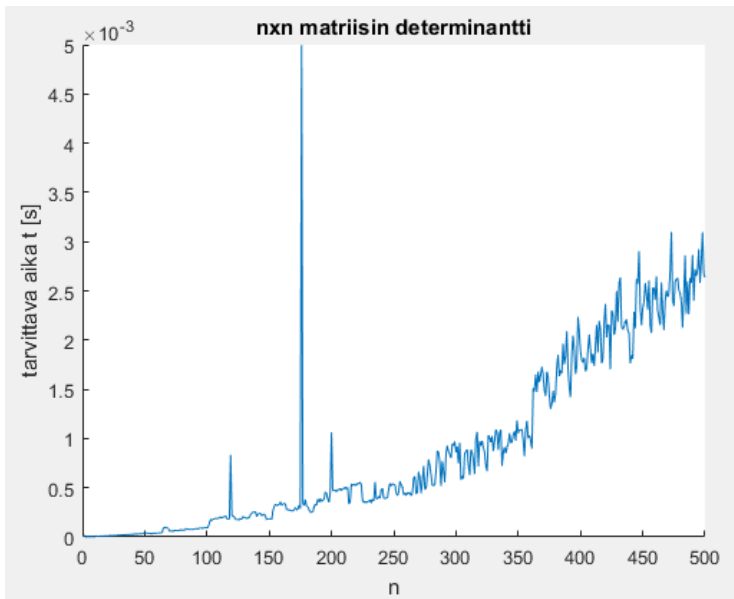
Käänteismatriisin "kaava", koko $n \times n$

Siis käänteismatriisin alkiot saadaan kaavalla

$$(A^{-1})_{ji} = \frac{1}{\det(A)} ((-1)^{i+j} \det(A_{ij}))$$

Mutta kaava on ongelmallinen sillä jokaista käänteismatriisin alkiota varten täytyisi laskea determinantti.

Käänteismatriisin "kaava", koko $n \times n$



Käänteismatriisin "kaava", koko $n \times n$

Jos A on kokoa 500×500 , niin kaavaa käytettäessä täytyisi laskea 500×500 kappaletta 499×499 -determinantteja.

Suoralla laskulla (ilman niksejä) aikaa kuluisi noin $500^4 \cdot 0.0025 / (60 * 60 * 24 * 365) = 4.95$ vuotta.

Käänteismatriisin "kaava", koko $n \times n$

Lasketaan

- matriisi A
- alimatriisit A_{ij} (rivi i ja sarake j poistettu)
- luvut $\det(A_{ij})$
- kofaktorimatriisi $\text{cof}(A) = ((-1)^{i+j} A_{ij})_{ij}$
- adjungoitu matriisi $\text{adj}(A) = \text{cof}(A)^T$
- käänteismatriisi $\text{inv}(A) = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$

Determinantin laskeminen kehittämismenetelmällä on hidasta.

Käytännössä determinantit lasketaan eliminoimalla.

Kohta nähdään, että käänteismatriisi voidaan myös laskea eliminoimalla. Siis menetelmällä on lähinnä teoreettinen merkitys.

Käänteismatriisin "kaava", koko $n \times n$

Esimerkki 5.8

matriisi ja alimatriisien determinantit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & -11 & 12 \\ 13 & -14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, (\det(A_{ij}))_{ij} = \begin{pmatrix} |A_{11}| & |A_{12}| & |A_{13}| & |A_{14}| \\ |A_{21}| & |A_{22}| & |A_{23}| & |A_{24}| \\ |A_{31}| & |A_{32}| & |A_{33}| & |A_{34}| \\ |A_{41}| & |A_{42}| & |A_{43}| & |A_{44}| \end{pmatrix},$$

missä

$$\begin{aligned} |A_{11}| &= \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & -11 & 12 \\ -14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} -11 & 12 \\ 15 & 16 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 10 & 12 \\ -14 & 16 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 10 & -11 \\ -14 & 15 \end{vmatrix} \\ &= \dots = -4464. \end{aligned}$$

Ja $|A_{11}|$ lisäksi vielä täytyy laskea 15 muuta samanlaista determinanttia!

Lause 5.9

Olkoot A ja B samankokoisia neliömatriiseja ja c vakio. Tällöin

- $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- $(cA)^{-1} = A^{-1}c^{-1} \stackrel{c \text{ on vakio}}{=} c^{-1}A^{-1}$;
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
- lausekkeelle $(A + B)^{-1}$ ei ole erityistä kaavaa.

Lause 5.10

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ käänttyvä ja $u, v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Oletetaan, että $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$. Tällöin

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} + \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u}.$$

Lause on hyödyllinen säätöteoriassa. Oletetaan, että hetkellä t_1 systeemin tilaa kuvaa matriisi A ja että systeemin säätämisessä käytetään matriisia A^{-1} . Hetkellä t_2 systeemin tila on muuttunut asteen 1 termillä uv^T ja on siis $A + uv^T$. Uusi säädöissä tarvittava matriisi $(A + uv^T)^{-1}$ voidaan laskea kaavan avulla.

Häirityn matriisin käänteismatriisi

Todistus.

$$\begin{aligned} & (A + uv^T) \left(A^{-1} + \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u} \right) \\ &= I + uv^T A^{-1} - \frac{u \cdot \mathbf{1} \cdot v^T A^{-1} + uv^T A^{-1} uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u} \\ &= I + uv^T A^{-1} - \frac{u(\mathbf{1} + v^T A^{-1}u)v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u} \\ &= I + uv^T A^{-1} - uv^T A^{-1} = I. \end{aligned}$$

Tulo toisinpäin on myös I (laske). Lause on todistettu. □

Käänteismatriisi eliminaatiomenetelmän avulla

Yhtälöryhmiä voidaan ratkaista Gauss-Jordan-eliminointimenetelmällä

Esimerkki 5.11

Ratkaistaan

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 10x_3 = 5 & R_1 \\ -4x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 2 & R_2 \\ 2x_1 + 9x_2 + 2x_3 = -3 & R_3. \end{cases}$$

Eliminoidaan

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 10x_3 = 5 & R'_1 \leftarrow R_1 \\ 17x_2 - 33x_3 = 22 & R'_2 \leftarrow R_2 + 4R_1 \\ 5x_2 + 22x_3 = -13 & R'_3 \leftarrow R_3 - 2R_1. \end{cases}$$

Seuraavaksi $R''_3 = R'_3 - \frac{5}{17}R'_2$, jolloin saadaan kolmiomuoto. Sitten takaisinsijoitus.

Käänteismatriisi eliminaatiomenetelmän avulla

Sama lasku voidaan tehdä laajennetuilla matriiseilla.

Matriisiyhtälön $A\bar{x} = \bar{b}$ laajennettu matriisi on $(A | \bar{b})$.

Esimerkki 5.12

Ratkaistaan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -10 & 5 \\ -4 & 9 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 2 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$$

Eliminoidaan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -10 & 5 \\ 0 & 17 & -33 & 22 \\ 0 & 5 & 22 & -13 \end{array} \right) \begin{array}{l} R'_1 \leftarrow R_1 \\ R'_2 \leftarrow R_2 + 4R_1 \\ R'_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \end{array}$$

Siis lasketaan kuten aiemmin, mutta merkitsemättä muuttujia.

Kääntematriisi eliminaatiomenetelmän avulla

Rivioperaatiot voidaan tehdä alkeismatriiseilla kertomalla

Esimerkki 5.13

Ratkaistaan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ -4 & 9 & 7 \\ 2 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Eliminoidaan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ -4 & 9 & 7 \\ 2 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Sievennyksen jälkeen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 0 & 17 & -33 \\ 2 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 22 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Käänteismatriisi eliminaatiomenetelmän avulla

Esimerkki 5.14

Sievennyksen jälkeen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 0 & 17 & -33 \\ 2 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 22 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Eliminoidaan lisää

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 0 & 17 & -33 \\ 2 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Sievennyksen jälkeen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 0 & 17 & -33 \\ 0 & 5 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 22 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Käänteismatriisi eliminaatiomenetelmän avulla

Eliminoimalla kolmiomuotoon, edelleen diagonaaliomuotoon ja edelleen skaalaamalla diagonaalialkiot saadaan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -53/11 \\ -1 \\ -13/11 \end{pmatrix},$$

mistä ratkaisu näkyy suoraan. Käytettyjen alkeismatriisien tulo on

$$\dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -81/55 & -86/55 & -104/55 \\ -2/5 & -2/5 & -3/5 \\ -18/55 & -13/55 & -17/55 \end{pmatrix}$$

Käänteismatriisi eliminaatiomenetelmän avulla

Siis alkeismatriisien tulolla

$$\begin{pmatrix} -81/55 & -86/55 & -104/55 \\ -2/5 & -2/5 & -3/5 \\ -18/55 & -13/55 & -17/55 \end{pmatrix}$$

kertomalla puolittain vasemmalta yhtälöä

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ -4 & 9 & 7 \\ 2 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

saadaan ratkaisu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -53/11 \\ -1 \\ -13/11 \end{pmatrix}.$$

Käänteismatriisi eliminaatiomenetelmän avulla

Siis alkeismatriisien tulolla

$$B = \begin{pmatrix} -81/55 & -86/55 & -104/55 \\ -2/5 & -2/5 & -3/5 \\ -18/55 & -13/55 & -17/55 \end{pmatrix}$$

kertomalla vasemmalta yhtälöä $A\bar{x} = \bar{b}$, missä

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ -4 & 9 & 7 \\ 2 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

saadaan $BA\bar{x} = B\bar{b}$, missä $BA = I$ on yksikkömatriisi.

Käänteismatriisi eliminaatiomenetelmän avulla

Nähdään, että seuraava lause pätee.

Lause 5.15

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ neliömatriisi ja $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ vektori.

Matriisiyhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu jos ja vain jos on olemassa alkeismatriisit E_1, E_2, \dots, E_m siten, että niiden tulo

$$B = E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1$$

toteuttaa $BA = I$. Tällöin $\bar{x} = B\bar{b}$.

Lauseen viimeinen yhtälö saadaan laskulla

$$\bar{x} = I\bar{x} = BA\bar{x} = B\bar{b}.$$

Selvästi lauseen matriisi $B = A^{-1}$.

Käänteismatriisi eliminoimalla 3x3 matriisille

```
A=rand(3)
B=[A,eye(3)]
B=[1,0,0;-B(2,1)/B(1,1),1,0;-B(3,1)/B(1,1),0,1]*B
B=[1,0,0;0,1,0;0,-B(3,2)/B(2,2),1]*B
B=[1/B(1,1),0,0;0,1/B(2,2),0;0,0,1/B(3,3)]*B
B=[1,0,-B(1,3);0,1,-B(2,3);0,0,1]*B
B=[1,-B(1,2)/B(2,2),0;0,1,0;0,0,1]*B
inv(A)
```

Lause 5.16

Olkoon A neliömatriisi. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

- *käänteismatriisi A^{-1} on olemassa;*
- *yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu;*
- *A on alkeismatriisien tulo;*
- $\det(A) \neq 0$.

Todistus.

Ohitetaan. □

Esimerkki 5.17 (200x200 matriisi)

Selvitä Matlabilla, kuinka kauan kuluu siihen, kun määritetään 200×200 matriisin käänteismatriisi.

Ratkaisu 1. Arvotaan yksi matriisi ja mitataan aika.

```
A=rand(200); %arvotaan matriisi
tic          %käynnistetään kello
B=inv(A);    %lasketaan käänteismatriisi
aika=toc     %pysäytetään kello
aika =
    0.0072
```

Käänteismatriisin laskemisen aikavaativuus

Esimerkki 5.18 (200×200 matriisi)

Selvitä Matlabilla, kuinka kauan kuluu siihen, kun määritetään 200×200 matriisin käänteismatriisi.

Ratkaisu 2. Suoritetaan mittaus 10 kertaa ja otetaan keskiarvo.

```
aika=zeros(1,10); %alustus
for k=1:10 %aiempi mittaus 10 kertaa
    A=rand(200);
    tic
    B=inv(A);
    aika(k)=toc;
end
keskiarvo=mean(aika) %lasketaan keskiarvo
keskihajonta=std(aika) %lasketaan keskihajonta
keskiarvo =
    0.0013
keskihajonta =
    1.0386e-04
```

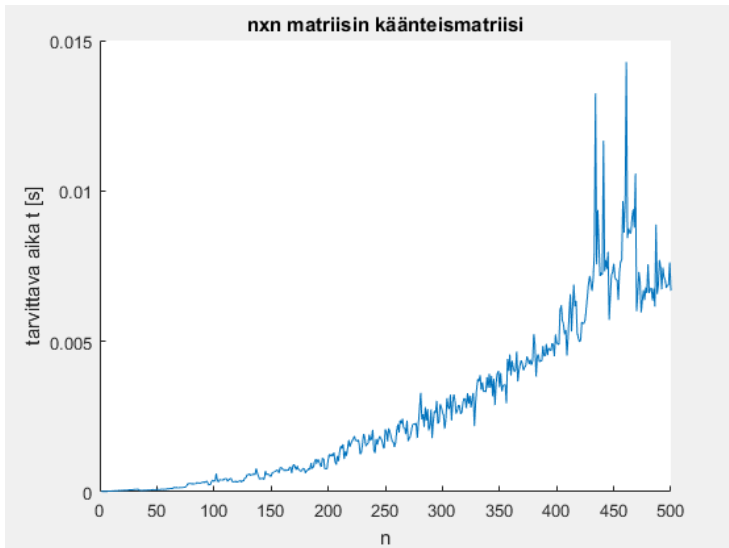
Esimerkki 5.19 (matriisit $1 \times 1, 2 \times 2, \dots, n_{\max} \times n_{\max}$)

Kuinka käänteismatriisin laskemiseen tarvittava aika riippuu $n \times n$ matriisin koosta n ?

Ratkaisu 1. Käytetään Ratkaisun 2 menetelmää matriiseille kokoa $1 \times 1, 2 \times 2, \dots, n_{\max} \times n_{\max}$.

Piirretään kuva, jossa $x = n = 1, 2, \dots, n_{\max}$ ja y on tarvittava aika.

Käänteismatriisin laskemisen aikavaativuus

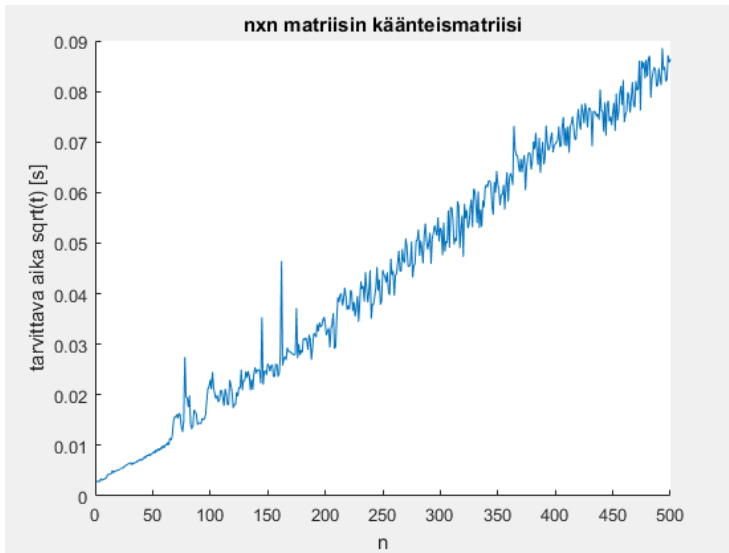


Esimerkki 5.20 (matriisit $1 \times 1, 2 \times 2, \dots, n_{\max} \times n_{\max}$)

Kuinka käänteismatriisin laskemiseen tarvittava aika riippuu $n \times n$ matriisin koosta n ?

Ratkaisu 1. Kuin edellä, mutta kuvassa $x = n = 1, 2, \dots, n_{\max}$
 $y = \sqrt{\text{tarvittava aika}}$

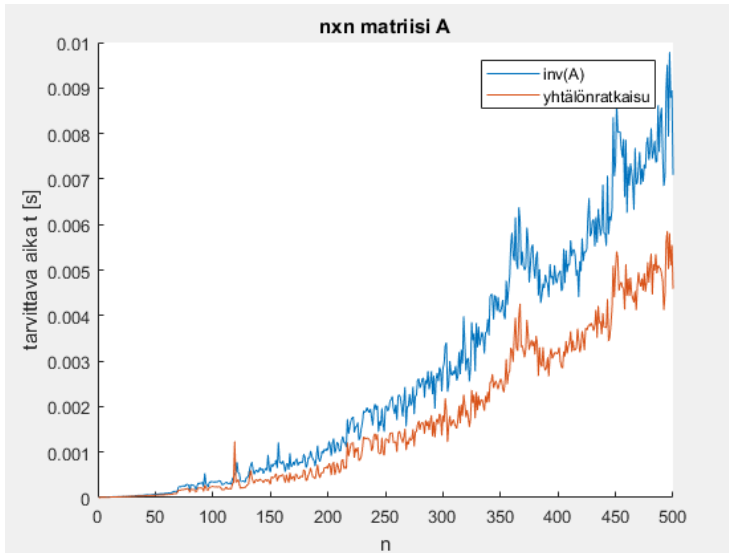
Käänteismatriisin laskemisen aikavaativuus



Esimerkki 5.21 ($\text{inv}(A)$ vs yhtälön $A\bar{x} = \bar{b}$ ratkaisu)

Olkoon A kokoa $n \times n$. Kumpi on nopeampi laskea: käänteismatriisi $\text{inv}(A)$ vai yhtälön $A\bar{x} = \bar{b}$ ratkaisu?

Käänteismatriisin laskemisen aikavaativuus



Olkoon A kokoa $n \times n$.

Johtopäätökset.

käänteismatriisin A^{-1} laskemisen keskimääräinen aikavaativuus on $O(n^2)$.

yhtälön $A\bar{x} = \bar{b}$ ratkaisemisen keskimääräinen aikavaativuus on myös $O(n^2)$.

Jos $100 \leq n \leq 500$, niin Matlab ratkaisee yhtälön $A\bar{x} = \bar{b}$ noin puolet nopeammin kuin laskee käänteismatriisin A^{-1} . Siis Matlab käyttää muuta menetelmää kuin $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$.

Huom. Vaaditun ajan Cn^2 kerroin C riippuu ohjelmistosta, laitteistosta jne.

Pseudoinverssi - käänteismatriisin yleistys

Lause 5.22

Olkoon A neliömatriisi, jolle on olemassa käänteismatriisi $B = A^{-1}$. Tällöin

- $ABA = A$;
- $BAB = B$;
- $(\overline{AB})^T = AB$;
- $(\overline{BA})^T = BA$.

Tässä $\overline{x + iy} = x - iy$ on kompleksikonjugointi, jota ei tarvita, jos A ja B ovat reaalisia.

Todistus.

Pätee $AB = I$. Kertomalla oikealta matriisilla A saadaan $ABA = A$. Pätee $AB = I$. Ottamalla puolittain konjugaatti ja transpoosi saadaan $(\overline{AB})^T = I = AB$, sillä konjugaatti ja transpoosi eivät muuta yksikkömatriisia. Muut kohdat vastaavasti. □

Pseudoinverssi - käänteismatriisin yleistys

Lause 5.23

Olkoon A mikä tahansa matriisi. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen matriisi G , jolle pätee

- $AGA = A$;
- $GAG = B$;
- $(\overline{AG})^T = AG$;
- $(\overline{GA})^T = GA$.

Määritelmä 5.24

Edellisen lauseen matriisi G on matriisin A *pseudoinverssi* (*pseudoinverse*)
Merkitään $G = \text{pinv}(A)$.

Pseudoinverssi on siis käänteismatriisin yleistys. Jos käänteismatriisi on olemassa, niin se on sama kuin pseudoinverssi.

Pseudoinverssi - käänteismatriisin yleistys

Pseudoinverssi lasketaan seuraavasti. Jokaiselle matriisille A on olemassa pääakselihajotelma (*singular value decomposition*)

$$A = U\overline{S}V^T.$$

Tässä S on diagonaalinen. Tällöin

$$G = \text{pinv}(A) = VS'\overline{U}^T.$$

Matriisi S' saadaan matriisista S pitämällä nollat nollina ja muuttamalla muut luvut käänteisluvuikseen.

Esimerkki 5.25

Sovitetaan suora pistejoukkoon $(2, 1)$, $(4, 2)$, $(6, 4)$.

Suoran yhtälö on muotoa $y = ax + b$ eli $ax + b = y$. Haluttaisiin

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 4a + b = 2 \\ 6a + b = 4 \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Päädyttiin matriisiyhtälöön $Ax = v$.

Esimerkki 5.26

Päädettiin matriisiyhtälöön $Ax = v$.

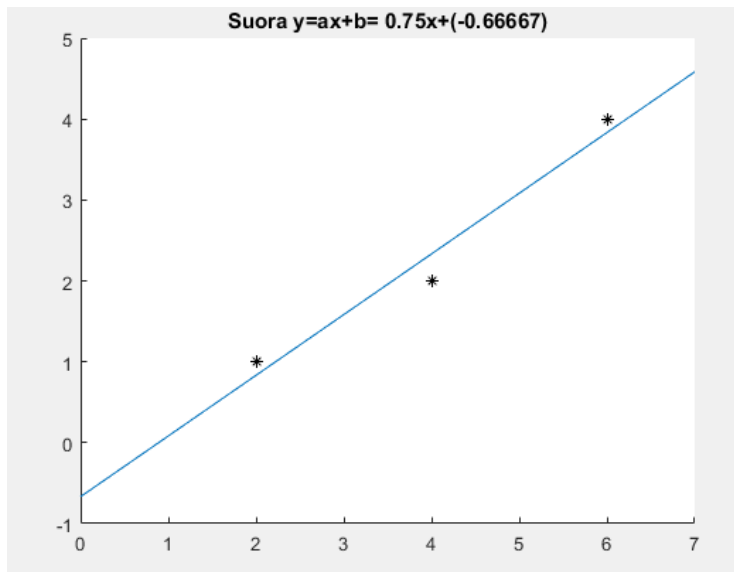
Jos A on neliömatriisi ja A^{-1} on olemassa, niin yhtälön $Ax = v$ ratkaisu on $x = A^{-1}v$ eli $x = \text{inv}(A)v$.

Nyt A ei ole neliömatriisi, joten käänteismatriisia $A^{-1} = \text{inv}(A)$ ei ole olemassa. Kuitenkin pseudoinverssi $\text{pinv}(A)$ on olemassa. Sen avulla saadaan kompromissiratkaisu $\hat{x} = \text{pinv}(A)v$.

Matlab:

```
A=[2,1;4,1;6,1];  
v=[1;2;4];  
x=pinv(A)*v;  
a=x(1),b=x(2)  
t=linspace(0,7,100);  
y=a*t+b;  
figure, hold on  
plot([2,4,6],[1,2,4], 'k*')  
plot(t,y)  
title(['Suora y=ax+b= ', num2str(a), 'x+( ', num2str(b), ')'])
```

Pseudoinverssin sovellus



Pseudoinverssin sovellus

Huom. Suoran sovitustehtävissä yhtälöstä $Ax = v$ seuraa $A^T Ax = A^T v$ ja edelleen $x = (A^T A)^{-1} A^T v$. Siis $\text{pinv}(A) = (A^T A)^{-1} A^T$. (ei välttämättä päde aina) Matlab:

```
>> pinv(A)  
ans =
```

```
-0.2500    -0.0000    0.2500  
 1.3333     0.3333   -0.6667
```

```
>> inv(A'*A)*A'  
ans =
```

```
-0.2500     0.0000     0.2500  
 1.3333     0.3333   -0.6667
```

- jos A ja B ovat samankokoisia neliömatriiseja joille $BA = AB = I$, niin matriisin A käänteismatriisi on $A^{-1} = \text{inv}(A) = B$;
matriisi ja käänteismatriisi kumoavat toisensa;
- sovelluksia: yhtälönratkaisu, sievennykset;
- A^{-1} on olemassa, jos ja vain jos $\det A \neq 0$ eli yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu;
- A^{-1} :lle on olemassa (ei tehokas) laskukaava;
- A^{-1} saadaan eliminointimenetelmällä;
- toteuttaa joitakin laskukaavoja;
- A^{-1} aikavaativuus $O(n^2)$;
- yleistys, pseudoinverssi, $\text{pinv}(A)$ olemassa aina;
- suoran sovittaminen pistejoukkoon: yhtälö $Ax = v$, ratkaisu $x = \text{pinv}(A)v$ tai $x = (A^T A)^{-1} A^T v$