

Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, missä luonnollinen luku $n \geq 2$. Tällöin sanotaan, että $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on n muuttujan reaaliarvoinen funktio.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, missä luonnollinen luku $n \geq 2$. Tällöin sanotaan, että $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on n muuttujan reaaliarvoinen funktio.

Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ määrittelyjoukoksi A valitaan laajin mahdollinen joukko, jossa funktio on määritelty. Merkitään $M_f = A$.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, missä luonnollinen luku $n \geq 2$. Tällöin sanotaan, että $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on n muuttujan reaaliarvoinen funktio.

Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ määrittelyjoukoksi A valitaan laajin mahdollinen joukko, jossa funktio on määritelty. Merkitään $M_f = A$.

Funktion kuvaaja on n -dimensioinen pinta avaruudessa $\mathbb{R}^{n+1}$. Esimerkiksi kahden muuttujan tapauksessa, eli kun $n = 2$, funktion kuvaaja on pinta avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, missä luonnollinen luku $n \geq 2$. Tällöin sanotaan, että $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on n muuttujan reaaliarvoinen funktio.

Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ määrittelyjoukoksi A valitaan laajin mahdollinen joukko, jossa funktio on määritelty. Merkitään $M_f = A$.

Funktion kuvaaja on n -dimensioinen pinta avaruudessa $\mathbb{R}^{n+1}$. Esimerkiksi kahden muuttujan tapauksessa, eli kun $n = 2$, funktion kuvaaja on pinta avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Funktion kuvajoukko $f(M_f)$ koostuu funktion f kuvapisteistä.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$ on yhden muuttujan reaaliarvoinen funktio. Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, xe^x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$ on yhden muuttujan reaaliarvoinen funktio. Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, xe^x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Pätee $e^1 \approx 2,7$. Esimerkiksi pisteet $(1, e^1)$ ja $(2, 2e^2)$ kuuluvat kuvaajalle. Toisaalta piste $(2, 3)$ ei kuulu kuvaajalle, koska $2e^2 \neq 3$.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$ on yhden muuttujan reaaliarvoinen funktio. Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, xe^x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Pätee $e^1 \approx 2,7$. Esimerkiksi pisteet $(1, e^1)$ ja $(2, 2e^2)$ kuuluvat kuvaajalle. Toisaalta piste $(2, 3)$ ei kuulu kuvaajalle, koska $2e^2 \neq 3$.

Kysymys. Kumpi pisteistä $(-1, -1e)$ tai $(-1, -1/e)$ kuuluu kuvaajalle?

Esimerkki

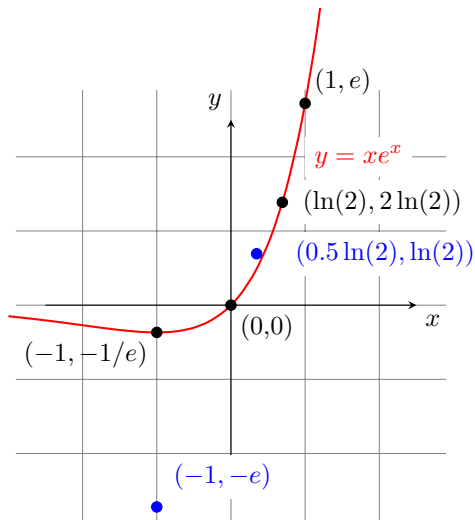
Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$ on yhden muuttujan reaaliarvoinen funktio. Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, xe^x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Pätee $e^1 \approx 2,7$. Esimerkiksi pisteet $(1, e^1)$ ja $(2, 2e^2)$ kuuluvat kuvaajalle. Toisaalta piste $(2, 3)$ ei kuulu kuvaajalle, koska $2e^2 \neq 3$.

Kysymys. Kumpi pisteistä $(-1, -1e)$ tai $(-1, -1/e)$ kuuluu kuvaajalle?

Kysymys. Kuuluuko piste $(\ln(2), 2\ln(2))$ kuvaajalle? Entä $(0.5\ln(2), \ln(2))$?



Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$ on yhden muuttujan reaaliarvoinen funktio.
Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, xe^x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xe^y$ on kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio.
Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, y, xe^y) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xe^y$ on kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio. Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, y, xe^y) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^y$ on kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio. Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, y, xe^y) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Esimerkiksi pisteet $(0, 0, 0)$ ja $(1, 2, e^2)$ kuuluvat kuvaajalle.

Esimerkki

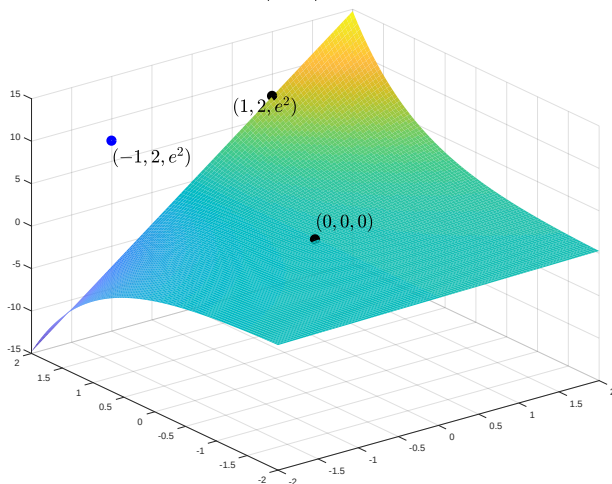
Funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xe^y$ on kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio. Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, y, xe^y) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Esimerkiksi pisteet $(0, 0, 0)$ ja $(1, 2, e^2)$ kuuluvat kuvaajalle.

Toisaalta piste $(-1, 2, e^2)$ ei kuulu kuvaajalle, koska $-e^2 \neq e^2$.

Funktion $f(x, y) = xe^y$ kuvaaja



Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + y^2 + z^2$ on kolmen muuttujan reaaliarvoinen funktio.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + y^2 + z^2$ on kolmen muuttujan reaaliarvoinen funktio.

Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, y, z, x^2 + y^2 + z^2) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Funktion kuvaajaa ei osata piirtää. Funktiota voi havainnollistaa piirtämällä pisteisiin (x, y, z) pisteitä jollakin sopivalla “värillä, joka kuvaa arvoa $f(x, y, z)$ ”.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + y^2 + z^2$ on kolmen muuttujan reaaliarvoinen funktio.

Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, y, z, x^2 + y^2 + z^2) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Funktion kuvaajaa ei osata piirtää. Funktiota voi havainnollistaa piirtämällä pisteisiin (x, y, z) pisteitä jollakin sopivalla “värillä, joka kuvaa arvoa $f(x, y, z)$ ”.

Esimerkiksi, jos $f(x, y, z) \in [m, M]$ niin väli $[m, M]$ voidaan samaistaa johonkin väriskaalaan, esimerkiksi



Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ havainnollistus

