

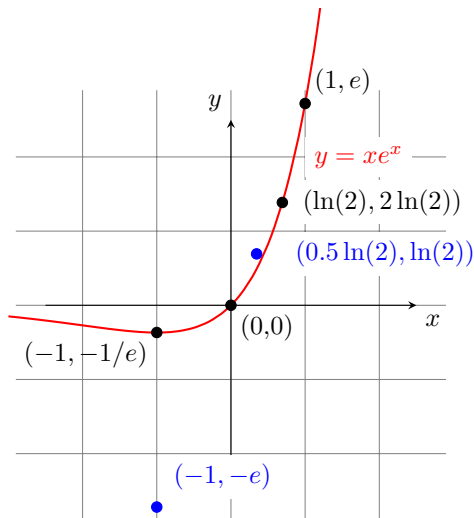
Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



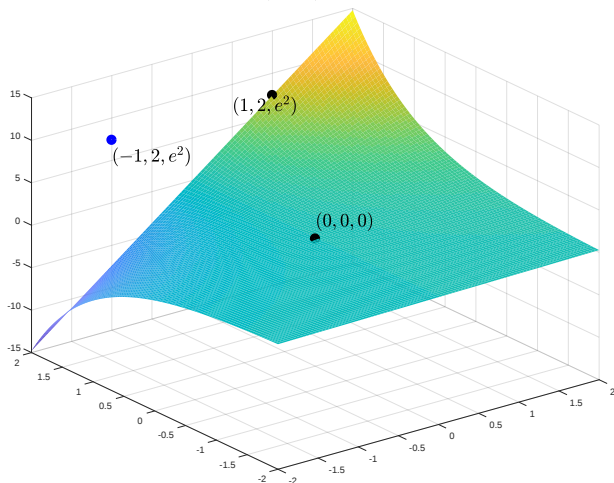
UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$ on yhden muuttujan reaaliarvoinen funktio.



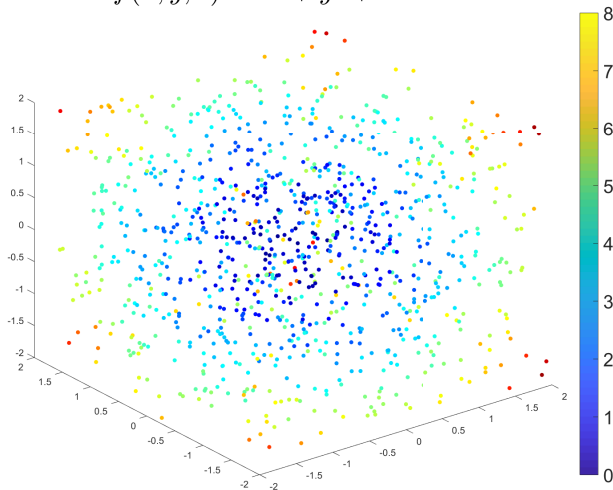
Funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xe^y$ on kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio.

Funktion $f(x, y) = xe^y$ kuvaaja



Funktio $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ on kolmen muuttujan reaaliarvoinen funktio.

Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ havainnollistus



Mainitut funktiot olivat muotoa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, eli kunkin funktion arvo oli jokin reaaliluku.

Mainitut funktiot olivat muotoa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, eli kunkin funktion arvo oli jokin reaaliluku.

Funktion arvot voivat olla myös vektoreita.

Mainitut funktiot olivat muotoa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, eli kunkin funktion arvo oli jokin reaaliluku.

Funktion arvot voivat olla myös vektoreita.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x^2, e^x)$ on yhden muuttujan **vektoriarvoinen** funktio. Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, x^2, e^x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Lienee kuitenkin helpompi ajatella, että $t \in \mathbb{R}$ on jokin **parametri** joka kuvautuu tason pisteelle $(x, y) = (t^2, e^t)$.

Mainitut funktiot olivat muotoa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, eli kunkin funktion arvo oli jokin reaaliluku.

Funktion arvot voivat olla myös vektoreita.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x^2, e^x)$ on yhden muuttujan **vektoriarvoinen** funktio. Funktion kuvaaja on joukko

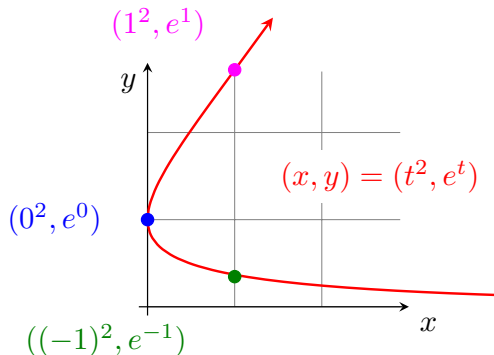
$$\{(x, x^2, e^x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Lienee kuitenkin helpompi ajatella, että $t \in \mathbb{R}$ on jokin **parametri** joka kuvautuu tason pisteelle $(x, y) = (t^2, e^t)$.

Saadaan siis parametrinen käyrä

$$\{(t^2, e^t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^2, e^t)$ on yhden muuttujan vektoriarvoinen funktio eli parametrinen käyrä.



Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$ on kahden muuttujan vektoriarvoinen funktio. Nyt lähtö- ja maalijoukko ovat samat, joten funktio on **vektorikenttä**. Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, y, x + y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$ on kahden muuttujan vektoriarvoinen funktio. Nyt lähtö- ja maalijoukko ovat samat, joten funktio on **vektorikenttä**. Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, y, x + y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Nyt kuvaaja on avaruudessa $\mathbb{R}^4$, joten siitä ei osata piirtää kuvaa. Funktiota voi havainnollistaa piirtämällä eräisiin pisteisiin (x, y) kuvavektorin $(x + y, x - y)$

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$ on kahden muuttujan vektoriarvoinen funktio. Nyt lähtö- ja maalijoukko ovat samat, joten funktio on **vektorikenttä**. Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, y, x + y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Nyt kuvaaja on avaruudessa $\mathbb{R}^4$, joten siitä ei osata piirtää kuvaa. Funktiota voi havainnollistaa piirtämällä eräisiin pisteisiin (x, y) kuvavektorin $(x + y, x - y)$ tai jonkin sopivan vektorin, esimerkiksi $0.1(x + y, x - y)$,

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$ on kahden muuttujan vektoriarvoinen funktio. Nyt lähtö- ja maalijoukko ovat samat, joten funktio on **vektorikenttä**. Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, y, x + y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Nyt kuvaaja on avaruudessa $\mathbb{R}^4$, joten siitä ei osata piirtää kuvaa. Funktiota voi havainnollistaa piirtämällä eräisiin pisteisiin (x, y) kuvavektorin $(x + y, x - y)$ tai jonkin sopivan vektorin, esimerkiksi $0.1(x + y, x - y)$, tai vaikkapa yksikkövektorin $(x + y, x - y)/|(x + y, x - y)|$, jonka väri riippuu vektorin $(x + y, x - y)$ pituudesta $|(x + y, x - y)|$.

Esimerkki

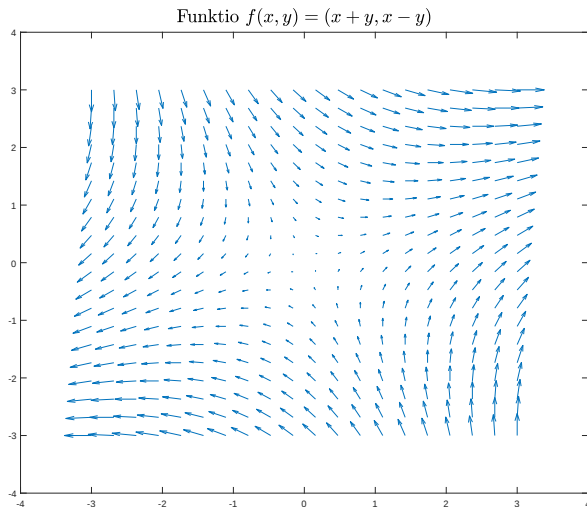
Funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$ on kahden muuttujan vektoriarvoinen funktio. Nyt lähtö- ja maalijoukko ovat samat, joten funktio on **vektorikenttä**. Funktion kuvaaja on joukko

$$\{(x, y, x + y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Nyt kuvaaja on avaruudessa $\mathbb{R}^4$, joten siitä ei osata piirtää kuvaa. Funktiota voi havainnollistaa piirtämällä eräisiin pisteisiin (x, y) kuvavektorin $(x + y, x - y)$

tai jonkin sopivan vektorin, esimerkiksi $0.1(x + y, x - y)$,

tai vaikkapa yksikkövektorin $(x + y, x - y)/|(x + y, x - y)|$, jonka väri riippuu vektorin $(x + y, x - y)$ pituudesta $|(x + y, x - y)|$.



Funktio $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = \frac{k}{r^2}(x, y, z),$$

missä $k \in \mathbb{R}$ ja $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ kuvaa origossa sijaitsevan pistevarauksen tuottamaa sähkökenttää.

Funktio $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = \frac{k}{r^2}(x, y, z),$$

missä $k \in \mathbb{R}$ ja $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ kuvaa origossa sijaitsevan pistevarauksen tuottamaa sähkökenttää.

Funktion f kuvaaja on avaruuden $\mathbb{R}^6$ osajoukko.

Funktio $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = \frac{k}{r^2}(x, y, z),$$

missä $k \in \mathbb{R}$ ja $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ kuvaa origossa sijaitsevan pistevarauksen tuottamaa sähkökenttää.

Funktion f kuvaaja on avaruuden $\mathbb{R}^6$ osajoukko.

Funktiota voi havainnollistaa piirtämällä eräisiin pisteisiin (x, y, z) kuvavektorin $k(x, y, z)/r^2$.

$$\text{Funktio } f(x, y, z) = (x, y, z)/r^2$$

