

# Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,  
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF  
EASTERN FINLAND

Olkoon  $A \subset \mathbb{R}^n$ , missä luonnollinen luku  $n \geq 2$ . Tällöin sanotaan, että  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  on  $n$  muuttujan reaaliarvoinen funktio.

Olkoon  $A \subset \mathbb{R}^n$ , missä luonnollinen luku  $n \geq 2$ . Tällöin sanotaan, että  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  on  $n$  muuttujan reaaliarvoinen funktio.

## Huomautus

Olkoon  $A \subset \mathbb{R}^2$  ja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  kahden muuttujan funktio. Kahden muuttujan funktiota voidaan havainnollistaa “korkeuskäyrillä”, joita sanotaan funktion **tasa-arvokäyriksi**. Funktion  $f$  tasa-arvokäyrät ovat muotoa

$$f(x, y) = c,$$

missä  $c \in \mathbb{R}$ . Täten yksi tasa-arvokäyrä koostuu niistä joukon  $A$  pisteistä  $(x, y)$ , joissa funktio  $f$  saa arvon  $c$ .

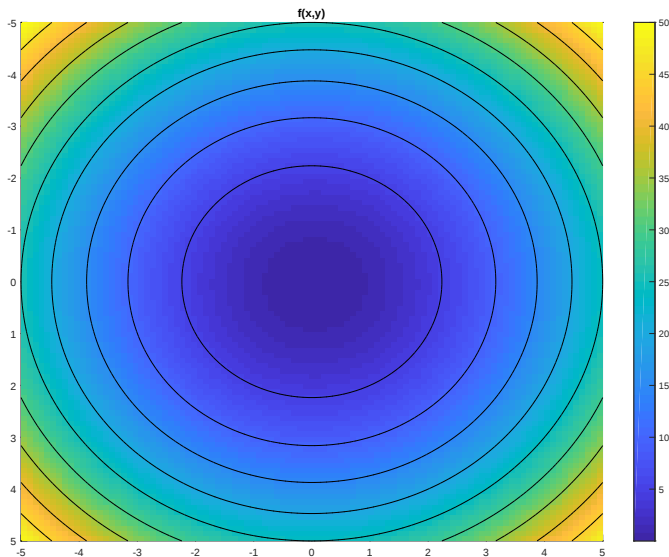
## Esimerkki

Funktio  $f$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2$  on kahden muuttujan funktio, jonka määrittelyjoukko on  $M_f = \mathbb{R}^2$  ja jonka kuvaaja on pinta  $z = x^2 + y^2$ .

## Esimerkki

Funktio  $f$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2$  on kahden muuttujan funktio, jonka määrittelyjoukko on  $M_f = \mathbb{R}^2$  ja jonka kuvaaja on pinta  $z = x^2 + y^2$ .

Funktion tasa-arvokäyrät ovat ympyröitä  $x^2 + y^2 = c$ , missä  $c \in \mathbb{R}$ . Funktion kuvaaja ja tasa-arvokäyriä on esitetty seuraavassa kuvassa.



## Esimerkki

Funktio  $f$ ,

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

on kolmen muuttujan funktio, jonka määrittelyjoukko on  $M_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  ja jonka kuvaaja on pinta

$$w = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

avaruudessa  $\mathbb{R}^4$ .

## Esimerkki

Funktio  $f$ ,

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

on kolmen muuttujan funktio, jonka määrittelyjoukko on  $M_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  ja jonka kuvaaja on pinta

$$w = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

avaruudessa  $\mathbb{R}^4$ . Funktion **tasa-arvopinnat** ovat muotoa

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = c, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{c^2},$$

missä  $c \in (0, \infty)$ . Nähdään, että tasa-arvopinnat ovat origokeskisiä pallokuoria.

## Esimerkki

Funktio  $f$ ,

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

on kolmen muuttujan funktio, jonka määrittelyjoukko on  $M_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  ja jonka kuvaaja on pinta

$$w = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

avaruudessa  $\mathbb{R}^4$ . Funktion **tasa-arvopinnat** ovat muotoa

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = c, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{c^2},$$

missä  $c \in (0, \infty)$ . Nähdään, että tasa-arvopinnat ovat origokeskisiä pallokuoria.

Funktio  $V(x, y, z)$  kuvaa origoon tuodun positiivisen varauksen tuottaman sähkökentän potentiaalia.

**Positiivisen varauksen tuottama sähkökenttä sekä tasapotentialipintoja.**

