

Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Huomautus

Tavanomaiset yhden muuttujan funktion raja-arvojen laskusäännöt pätevät myös useamman muuttujan funktiolle.

Huomautus

Tavanomaiset yhden muuttujan funktion raja-arvojen laskusäännöt pätevät myös useamman muuttujan funktiolle.

Tarkastellaan esimerkkinä kahden muuttujan funktioita.

Lause

Olkoon $A, B \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sekä $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ funktioita

Huomautus

Tavanomaiset yhden muuttujan funktion raja-arvojen laskusäännöt pätevät myös useamman muuttujan funktiolle.

Tarkastellaan esimerkkinä kahden muuttujan funktioita.

Lause

Olkoon $A, B \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sekä $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ funktioita siten, että f ja g ovat määritelty eräässä pisteen $(x_0, y_0) \in A \cap B$ ympäristössä. Olkoon

Huomautus

Tavanomaiset yhden muuttujan funktion raja-arvojen laskusäännöt pätevät myös useamman muuttujan funktiolle.

Tarkastellaan esimerkkinä kahden muuttujan funktioita.

Lause

Olkoon $A, B \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sekä $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ funktioita siten, että f ja g ovat määritelty eräässä pisteen $(x_0, y_0) \in A \cap B$ ympäristössä. Olkoon

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = a$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = b,$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$. Olkoon lisäksi $c \in \mathbb{R}$ vakio. Tällöin

Lause

$$(a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} c = c$$

Lause

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} c = c$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0$

Lause

$$(a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} c = c$$

$$(b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0$$

$$(c) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = a + b$$

Lause

$$(a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} c = c$$

$$(b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0$$

$$(c) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = a + b$$

$$(d) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) - g(x,y)) = a - b$$

Lause

$$(e) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} cf(x,y) = ca$$

Lause

$$(e) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} cf(x,y) = ca$$

$$(f) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y)g(x,y)) = ab$$

Lause

$$(e) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} cf(x,y) = ca$$

$$(f) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y)g(x,y)) = ab$$

$$(g) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{a}{b}, \text{ jos } b \neq 0$$

Lause

$$(e) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} cf(x,y) = ca$$

$$(f) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y)g(x,y)) = ab$$

$$(g) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{a}{b}, \text{ jos } b \neq 0$$

$$(h) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} F(f(x,y)) = F(a), \text{ jos } F \text{ on jatkuva.}$$

Esimerkki

Esimerkiksi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (x^2 y) = a^2 b$$

Esimerkki

Esimerkiksi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (x^2 y) = a^2 b$$

ja

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi/3, 2)} y \sin(x/y) = 2 \sin(\pi/6) = 1.$$

Todistus

Todistetaan malliksi väite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = a + b.$$

Todistus

Todistetaan malliksi väite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = a + b.$$

Todistuksia ei tarvitse osata tässä vaiheessa, niistä puhutaan enemmän analyysin kursseilla.

Todistus

Todistetaan malliksi väite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = a + b.$$

Todistuksia ei tarvitse osata tässä vaiheessa, niistä puhutaan enemmän analyysin kursseilla.

Idea. Saadaanko luku $f(x,y) + g(x,y)$ lähelle lukua $a + b$?

Todistus

Todistetaan malliksi väite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = a + b.$$

Todistuksia ei tarvitse osata tässä vaiheessa, niistä puhutaan enemmän analyysin kursseilla.

Idea. Saadaanko luku $f(x,y) + g(x,y)$ lähelle lukua $a + b$?

Kun $|(x,y) - (x_0,y_0)|$ on tarpeeksi pieni, niin $f(x,y) = a + v$, missä $|v| < 0.1$.

Todistus

Todistetaan malliksi väite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = a + b.$$

Todistuksia ei tarvitse osata tässä vaiheessa, niistä puhutaan enemmän analyysin kursseilla.

Idea. Saadaanko luku $f(x,y) + g(x,y)$ lähelle lukua $a + b$?

Kun $|(x,y) - (x_0,y_0)|$ on tarpeeksi pieni, niin $f(x,y) = a + v$, missä $|v| < 0.1$.

Kun $|(x,y) - (x_0,y_0)|$ on tarpeeksi pieni, niin $g(x,y) = b + v$, missä $|v| < 0.1$.

Todistus

Todistetaan malliksi väite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = a + b.$$

Todistuksia ei tarvitse osata tässä vaiheessa, niistä puhutaan enemmän analyysin kursseilla.

Idea. Saadaanko luku $f(x,y) + g(x,y)$ lähelle lukua $a + b$?

Kun $|(x,y) - (x_0,y_0)|$ on tarpeeksi pieni, niin $f(x,y) = a + v$, missä $|v| < 0.1$.

Kun $|(x,y) - (x_0,y_0)|$ on tarpeeksi pieni, niin $g(x,y) = b + v$, missä $|v| < 0.1$.

Siis kun $|(x,y) - (x_0,y_0)|$ on tarpeeksi pieni, niin $f(x,y) + g(x,y) = a + b + 2v$, missä $|2v| < 0.2$.

Todistus

Todistetaan malliksi väite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = a + b.$$

Todistuksia ei tarvitse osata tässä vaiheessa, niistä puhutaan enemmän analyysin kursseilla.

Idea. Saadaanko luku $f(x,y) + g(x,y)$ lähelle lukua $a + b$?

Kun $|(x,y) - (x_0,y_0)|$ on tarpeeksi pieni, niin $f(x,y) = a + v$, missä $|v| < 0.1$.

Kun $|(x,y) - (x_0,y_0)|$ on tarpeeksi pieni, niin $g(x,y) = b + v$, missä $|v| < 0.1$.

Siis kun $|(x,y) - (x_0,y_0)|$ on tarpeeksi pieni, niin $f(x,y) + g(x,y) = a + b + 2v$, missä $|2v| < 0.2$.

Siis todistus toimii.

Todistus

Kirjoitetaan todistus ε - δ -merkinnöillä.

Todistus

Kirjoitetaan todistus ε - δ -merkinnöillä.

Olkoon $\varepsilon > 0$ (esimerkiksi $\varepsilon = 0.2$).

Todistus

Kirjoitetaan todistus ε - δ -merkinnöillä.

Olkoon $\varepsilon > 0$ (esimerkiksi $\varepsilon = 0.2$).

Oletuksen nojalla löydetään $\delta_1 > 0$ siten, että

$$0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta_1 \quad \Leftrightarrow \quad |f(x, y) - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Todistus

Kirjoitetaan todistus ε - δ -merkinnöillä.

Olkoon $\varepsilon > 0$ (esimerkiksi $\varepsilon = 0.2$).

Oletuksen nojalla löydetään $\delta_1 > 0$ siten, että

$$0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta_1 \quad \Leftrightarrow \quad |f(x, y) - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Oletuksen nojalla löydetään $\delta_2 > 0$ siten, että

$$0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta_2 \quad \Leftrightarrow \quad |g(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Todistus

Siis, kun $0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, niin

Todistus

Siis, kun $0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, niin

$$|f(x, y) + g(x, y) - (a + b)|$$

Todistus

Siis, kun $0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, niin

$$|f(x, y) + g(x, y) - (a + b)| \leq |f(x, y) - a| + |g(x, y) - b|$$

Todistus

Siis, kun $0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, niin

$$|f(x, y) + g(x, y) - (a + b)| \leq |f(x, y) - a| + |g(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Todistus

Siis, kun $0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, niin

$$|f(x, y) + g(x, y) - (a + b)| \leq |f(x, y) - a| + |g(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tässä $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen. Siis

Todistus

Siis, kun $0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, niin

$$|f(x, y) + g(x, y) - (a + b)| \leq |f(x, y) - a| + |g(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tässä $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen. Siis

$$|f(x, y) + g(x, y) - (a + b)|$$

saadaan niin pieneksi kuin halutaan, kunhan vain

Todistus

Siis, kun $0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, niin

$$|f(x, y) + g(x, y) - (a + b)| \leq |f(x, y) - a| + |g(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tässä $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen. Siis

$$|f(x, y) + g(x, y) - (a + b)|$$

saadaan niin pieneksi kuin halutaan, kunhan vain

$$0 < |(x, y) - (x_0, y_0)|$$

on tarpeeksi pieni. Siis

Todistus

Siis, kun $0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, niin

$$|f(x, y) + g(x, y) - (a + b)| \leq |f(x, y) - a| + |g(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tässä $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen. Siis

$$|f(x, y) + g(x, y) - (a + b)|$$

saadaan niin pieneksi kuin halutaan, kunhan vain

$$0 < |(x, y) - (x_0, y_0)|$$

on tarpeeksi pieni. Siis

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x, y) + g(x, y)) = a + b.$$

Todistus

Siis, kun $0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, niin

$$|f(x, y) + g(x, y) - (a + b)| \leq |f(x, y) - a| + |g(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tässä $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen. Siis

$$|f(x, y) + g(x, y) - (a + b)|$$

saadaan niin pieneksi kuin halutaan, kunhan vain

$$0 < |(x, y) - (x_0, y_0)|$$

on tarpeeksi pieni. Siis

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x, y) + g(x, y)) = a + b.$$

