

Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Tarkastellaan seuraavaksi kahden muuttujan funktion jatkuvuutta. Tälle opintojaksolle riittävä määritelmä jatkuvuudelle on esitetty seuraavassa määritelmässä.

Tarkastellaan seuraavaksi kahden muuttujan funktion jatkuvuutta. Tälle opintojaksolle riittävä määritelmä jatkuvuudelle on esitetty seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä

Olkoon f eräässä pisteen (x_0, y_0) ympäristössä määritelty funktio. Funktio f on jatkuva pisteessä (x_0, y_0) , jos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Tarkastellaan seuraavaksi kahden muuttujan funktion jatkuvuutta. Tälle opintojaksolle riittävä määritelmä jatkuvuudelle on esitetty seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä

Olkoon f eräässä pisteen (x_0, y_0) ympäristössä määritelty funktio. Funktio f on jatkuva pisteessä (x_0, y_0) , jos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Siis raja-arvon täytyy

Tarkastellaan seuraavaksi kahden muuttujan funktion jatkuvuutta. Tälle opintojaksolle riittävä määritelmä jatkuvuudelle on esitetty seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä

Olkoon f eräässä pisteen (x_0, y_0) ympäristössä määritelty funktio. Funktio f on jatkuva pisteessä (x_0, y_0) , jos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Siis raja-arvon täytyy

(a) olla olemassa ja

Tarkastellaan seuraavaksi kahden muuttujan funktion jatkuvuutta. Tälle opintojaksolle riittävä määritelmä jatkuvuudelle on esitetty seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä

Olkoon f eräässä pisteen (x_0, y_0) ympäristössä määritelty funktio. Funktio f on jatkuva pisteessä (x_0, y_0) , jos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Siis raja-arvon täytyy

- (a) olla olemassa ja
- (b) olla yhtäsuuri

Tarkastellaan seuraavaksi kahden muuttujan funktion jatkuvuutta. Tälle opintojaksolle riittävä määritelmä jatkuvuudelle on esitetty seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä

Olkoon f eräässä pisteen (x_0, y_0) ympäristössä määritelty funktio. Funktio f on jatkuva pisteessä (x_0, y_0) , jos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Siis raja-arvon täytyy

- (a) olla olemassa ja
- (b) olla yhtäsuuri

kuin funktion arvo tarkastelupisteessä.

Esimerkki (Reaalifunktio)

(a) Funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

Esimerkki (Reaalifunktio)

(a) Funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ei ole raja-arvoa origossa, joten funktio ei ole jatkuva origossa.

Esimerkki (Reaalifunktio)

(a) Funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ei ole raja-arvoa origossa, joten funktio ei ole jatkuva origossa.

(b) Funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

Esimerkki (Reaalifunktio)

(a) Funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ei ole raja-arvoa origossa, joten funktio ei ole jatkuva origossa.

(b) Funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

pätee $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, joten f on jatkuva origossa.

(c) Funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$$

Esimerkki (Reaalifunktio)

(a) Funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ei ole raja-arvoa origossa, joten funktio ei ole jatkuva origossa.

(b) Funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

pätee $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, joten f on jatkuva origossa.

(c) Funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$$

on raja-arvo 1 origossa, mutta tämä on erisuuri kuin funktion arvo origossa. Siis funktio ei ole jatkuva origossa.

Esimerkki

(a) Funktiolla f , jolle $f(0,0) = 7$ ja

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 2 \cos(\theta) \sin(\theta), \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

Esimerkki

(a) Funktiolla f , jolle $f(0,0) = 7$ ja

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 2 \cos(\theta) \sin(\theta), \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

missä $x = r \cos \theta$ ja $y = r \sin \theta$ ei ole raja-arvoa origossa. Siis funktio f ei ole jatkuva origossa.

Esimerkki

(a) Funktiolla f , jolle $f(0,0) = 7$ ja

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 2 \cos(\theta) \sin(\theta), \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

missä $x = r \cos \theta$ ja $y = r \sin \theta$ ei ole raja-arvoa origossa. Siis funktio f ei ole jatkuva origossa.

(b) Funktiolla f , jolle $f(0,0) = 2$ ja

$$f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

Esimerkki

(a) Funktiolla f , jolle $f(0,0) = 7$ ja

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 2 \cos(\theta) \sin(\theta), \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

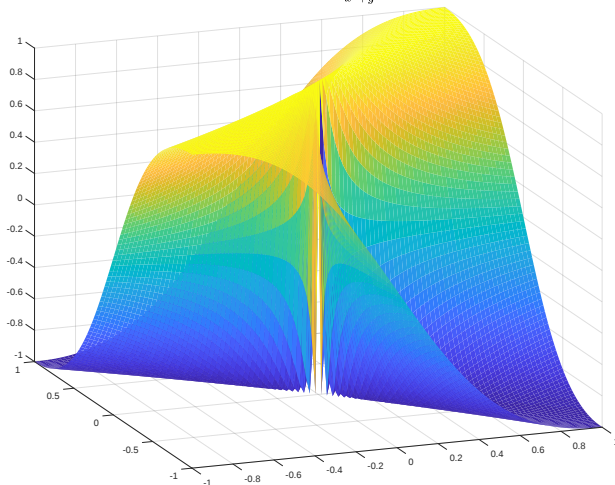
missä $x = r \cos \theta$ ja $y = r \sin \theta$ ei ole raja-arvoa origossa. Siis funktio f ei ole jatkuva origossa.

(b) Funktiolla f , jolle $f(0,0) = 2$ ja

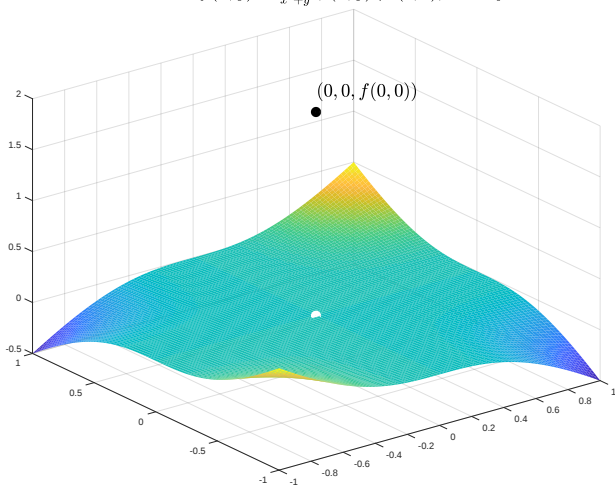
$$f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

on raja-arvo 0 origossa, mutta $f(0,0) = 2 \neq 0$. Siis funktio f ei ole jatkuva origossa.

Funktion $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ kuvaaja



Funktion $f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, kuvaaja



Esimerkki

Tutkitaan, ovatko funktiot

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = 2x - y^2$$

jatkuvia origossa.

Esimerkki

Tutkitaan, ovatko funktiot

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = 2x - y^2$$

jatkuvia origossa.

Funktio f ei ole määritelty pisteessä $(0, 0)$, joten se ei ole jatkuva kyseisessä pisteessä.

Esimerkki

Tutkitaan, ovatko funktiot

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = 2x - y^2$$

jatkuvia origossa.

Funktio f ei ole määritelty pisteessä $(0, 0)$, joten se ei ole jatkuva kyseisessä pisteessä.

Sen sijaan funktio g on määritelty kaikilla pisteillä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eli myös origossa. Lisäksi $g(0, 0) = 0$. Funktio g on jatkuva origossa, jos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = g(0, 0).$$

Esimerkki

Tutkitaan, ovatko funktiot

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = 2x - y^2$$

jatkuvia origossa.

Funktio f ei ole määritelty pisteessä $(0, 0)$, joten se ei ole jatkuva kyseisessä pisteessä.

Sen sijaan funktio g on määritelty kaikilla pisteillä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eli myös origossa. Lisäksi $g(0, 0) = 0$. Funktio g on jatkuva origossa, jos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = g(0, 0).$$

Saadaan

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (2x - y^2) = 2 \cdot 0 - 0^2 = 0 = g(0, 0)$$

Esimerkki

Tutkitaan, ovatko funktiot

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = 2x - y^2$$

jatkuvia origossa.

Funktio f ei ole määritelty pisteessä $(0, 0)$, joten se ei ole jatkuva kyseisessä pisteessä.

Sen sijaan funktio g on määritelty kaikilla pisteillä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eli myös origossa. Lisäksi $g(0, 0) = 0$. Funktio g on jatkuva origossa, jos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = g(0, 0).$$

Saadaan

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (2x - y^2) = 2 \cdot 0 - 0^2 = 0 = g(0, 0)$$

Huomautus

Tiedetään seuraavat asiat. (a) Kahden muuttujan polynomifunktiot ovat jatkuvia koko tasossa $\mathbb{R}^2$.

Huomautus

Tiedetään seuraavat asiat. (a) Kahden muuttujan polynomifunktiot ovat jatkuvia koko tasossa $\mathbb{R}^2$.

(b) Kahden muuttujan rationaalifunktiot ovat jatkuvia koko tasossa $\mathbb{R}^2$ lukuunottamatta nimittäjän nollakohtia.

Huomautus

Tiedetään seuraavat asiat. (a) Kahden muuttujan polynomifunktiot ovat jatkuvia koko tasossa $\mathbb{R}^2$.

(b) Kahden muuttujan rationaalifunktiot ovat jatkuvia koko tasossa $\mathbb{R}^2$ lukuunottamatta nimittäjän nollakohtia.

(c) Kahden kahden muuttujan jatkuvan funktion summa, erotus, tulo ja osamäärä ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan.

Huomautus

Tiedetään seuraavat asiat. (a) Kahden muuttujan polynomifunktiot ovat jatkuvia koko tasossa $\mathbb{R}^2$.

(b) Kahden muuttujan rationaalifunktiot ovat jatkuvia koko tasossa $\mathbb{R}^2$ lukuunottamatta nimittäjän nollakohtia.

(c) Kahden kahden muuttujan jatkuvan funktion summa, erotus, tulo ja osamäärä ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan.

(d) Jos $f : M_f \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g : f(M_f) \rightarrow \mathbb{R}$ ovat jatkuvia, niin yhdistetty funktio $g \circ f : M_f \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva.