

Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Yhden muuttujan funktion derivaatalle tunnetaan kaava

$$(af(x))' = af'(x), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Yhden muuttujan funktion derivaatalle tunnetaan kaava

$$(af(x))' = af'(x), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki

Funktion

$$f(x) = 3 \sin(x)$$

Yhden muuttujan funktion derivaatalle tunnetaan kaava

$$(af(x))' = af'(x), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki

Funktion

$$f(x) = 3 \sin(x)$$

derivaatta on

$$f'(x) = 3 \cos(x)$$

Yhden muuttujan funktion derivaatalle tunnetaan kaava

$$(af(x))' = af'(x), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki

Funktion

$$f(x) = 3 \sin(x)$$

derivaatta on

$$f'(x) = 3 \cos(x)$$

Tämä voidaan ajatella myös seuraukseksi tulon derivointikaavasta ja siitä, että vakion derivaatta on 0. Siis koska

Yhden muuttujan funktion derivaatalle tunnetaan kaava

$$(af(x))' = af'(x), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki

Funktion

$$f(x) = 3 \sin(x)$$

derivaatta on

$$f'(x) = 3 \cos(x)$$

Tämä voidaan ajatella myös seuraukseksi tulon derivointikaavasta ja siitä, että vakion derivaatta on 0. Siis koska

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \text{ja} \quad a' = 0,$$

Yhden muuttujan funktion derivaatalle tunnetaan kaava

$$(af(x))' = af'(x), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki

Funktion

$$f(x) = 3 \sin(x)$$

derivaatta on

$$f'(x) = 3 \cos(x)$$

Tämä voidaan ajatella myös seuraukseksi tulon derivointikaavasta ja siitä, että vakion derivaatta on 0. Siis koska

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \text{ja} \quad a' = 0,$$

niin

$$(af)' = \underbrace{a'}_{=0} f + f' a = 0 + f' a = af'.$$

Havainnollisesti sanottuna, **osittaisderivaatta** jonkin muuttujan suhteen lasketaan siten, että muita muuttujia pidetään vakiona.

Havainnollisesti sanottuna, **osittaisderivaatta** jonkin muuttujan suhteen lasketaan siten, että muita muuttujia pidetään vakiona. Jos funktiota $f(x, y)$ osittaisderivoidaan muuttujan x suhteen, voidaan käyttää merkintöjä

$$D_1 f, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \partial_x f, \quad f_x.$$

Havainnollisesti sanottuna, **osittaisderivaatta** jonkin muuttujan suhteen lasketaan siten, että muita muuttujia pidetään vakiona. Jos funktiota $f(x, y)$ osittaisderivoidaan muuttujan x suhteen, voidaan käyttää merkintöjä

$$D_1 f, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \partial_x f, \quad f_x.$$

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = x^2 \sin(y).$$

Havainnollisesti sanottuna, **osittaisderivaatta** jonkin muuttujan suhteen lasketaan siten, että muita muuttujia pidetään vakiona. Jos funktiota $f(x, y)$ osittaisderivoidaan muuttujan x suhteen, voidaan käyttää merkintöjä

$$D_1 f, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \partial_x f, \quad f_x.$$

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = x^2 \sin(y).$$

Nyt

$$f_x(x, y) = \partial_x \underbrace{(x^2 \sin(y))}_{\text{vakio}} = 2x \sin(y).$$

Vastaavasti

Havainnollisesti sanottuna, **osittaisderivaatta** jonkin muuttujan suhteen lasketaan siten, että muita muuttujia pidetään vakiona. Jos funktiota $f(x, y)$ osittaisderivoidaan muuttujan x suhteen, voidaan käyttää merkintöjä

$$D_1 f, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \partial_x f, \quad f_x.$$

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = x^2 \sin(y).$$

Nyt

$$f_x(x, y) = \partial_x(\underbrace{x^2}_{\text{vakio}} \sin(y)) = 2x \sin(y).$$

Vastaavasti

$$f_y(x, y) = \partial_y(\underbrace{x^2}_{\text{vakio}} \sin(y)) = x^2 \cos(y).$$

Määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktio. Funktion f **derivaatta** pisteessä $x \in \mathbb{R}$ on

Määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktio. Funktion f **derivaatta** pisteessä $x \in \mathbb{R}$ on

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

Määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktio. Funktion f **derivaatta** pisteessä $x \in \mathbb{R}$ on

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa.

Määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktio. Funktion f **derivaatta** pisteessä $x \in \mathbb{R}$ on

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa.

Huomautus

Funktion derivaatalle käytetään merkintöjä

$$f'(x), \quad Df(x), \quad \frac{d}{dx} f(x).$$

Kun lasketaan osittaisderivaatta, niin “muuta muuttujia pidetään vakiona”.

Kun lasketaan osittaisderivaatta, niin “muuta muuttujia pidetään vakiona”.

Määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kahden muuttujan funktio. Tällöin funktion f **osittaisderivaatta** muuttujan x suhteen on

Kun lasketaan osittaisderivaatta, niin “ muita muuttujia pidetään vakiona”.

Määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kahden muuttujan funktio. Tällöin funktion f **osittaisderivaatta** muuttujan x suhteen on

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$

Kun lasketaan osittaisderivaatta, niin “muuta muuttujia pidetään vakiona”.

Määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kahden muuttujan funktio. Tällöin funktion f **osittaisderivaatta** muuttujan x suhteen on

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa.

Huomautus

Funktion osittaisderivaatalle käytetään merkintöjä

$$f_x, \quad D_1 f, \quad D_x f, \quad \partial_x f, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x).$$

Kun lasketaan osittaisderivaatta, niin “ muita muuttujia pidetään vakiona”.

Määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kahden muuttujan funktio. Tällöin funktion f **osittaisderivaatta** muuttujan x suhteen on

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa.

Huomautus

Funktion osittaisderivaatalle käytetään merkintöjä

$$f_x, \quad D_1 f, \quad D_x f, \quad \partial_x f, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x).$$

Kirjain ∂ on tyylitelty “d” ja lausutaan yleensä “doo”. Vastaavasti integraali-

Kun lasketaan osittaisderivaatta, niin “ muita muuttujia pidetään vakiona”.

Määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kahden muuttujan funktio. Tällöin funktion f **osittaisderivaatta** muuttujan x suhteen on

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa.

Huomautus

Funktion osittaisderivaatalle käytetään merkintöjä

$$f_x, \quad D_1 f, \quad D_x f, \quad \partial_x f, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x).$$

Kirjain ∂ on tyylitelty “d” ja lausutaan yleensä “doo”. Vastaavasti integraalimerkki $\int$ on tyylitelty “S” ja (viittaa pienten viipaleiden summaamiseen).

Kun lasketaan osittaisderivaatta, niin “muuta muuttujia pidetään vakiona”.

Kun lasketaan osittaisderivaatta, niin “muuta muuttujia pidetään vakiona”.

Määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kahden muuttujan funktio. Tällöin funktion f **osittaisderivaatta** muuttujan x suhteen on

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa.

Kun lasketaan osittaisderivaatta, niin “ muita muuttujia pidetään vakiona”.

Määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kahden muuttujan funktio. Tällöin funktion f **osittaisderivaatta** muuttujan x suhteen on

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa.

Määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kahden muuttujan funktio. Tällöin funktion f **osittaisderivaatta** muuttujan y suhteen on

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h},$$

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa.

Määritelmä

Olkoon f määritelty pisteen (x_0, y_0) ympäristössä.

Määritelmä

Olkoon f määritelty pisteen (x_0, y_0) ympäristössä. Jos molemmat osittaisderivaatat ovat olemassa pisteessä (x_0, y_0) , niin funktio on **derivoituva** kyseisessä pisteessä.

Määritelmä

Olkoon f määritelty pisteen (x_0, y_0) ympäristössä. Jos molemmat osittaisderivaatat ovat olemassa pisteessä (x_0, y_0) , niin funktio on **derivoituva** kyseisessä pisteessä. Funktio on derivoituva joukossa $A \subset \mathbb{R}^2$, jos se on derivoituva jokaisessa joukon pisteessä.

Huomautus

Mikäli osittaisderivaatta $f_x(x, y)$ on olemassa, niin se saadaan lasketuksi tavallisilla yhden muuttujan funktion derivoimissäännöillä pitämällä muuttujaa y vakiona ja derivoimalla muuttujan x suhteen.

Huomautus

Mikäli osittaisderivaatta $f_x(x, y)$ on olemassa, niin se saadaan lasketuksi tavallisilla yhden muuttujan funktion derivoimissäännöillä pitämällä muuttujaa y vakiona ja derivoimalla muuttujan x suhteen. Vastaavasti $f_y(x, y)$ saadaan pitämällä x vakiona ja derivoimalla muuttujan y suhteen.

Huomautus

Mikäli osittaisderivaatta $f_x(x, y)$ on olemassa, niin se saadaan lasketuksi tavallisilla yhden muuttujan funktion derivoimissäännöillä pitämällä muuttujaa y vakiona ja derivoimalla muuttujan x suhteen. Vastaavasti $f_y(x, y)$ saadaan pitämällä x vakiona ja derivoimalla muuttujan y suhteen.

Siis derivointisäännöt pätevät, esimerkiksi

$$(fg)_x = f_x g + f g_x, \quad \left(\frac{f}{g} \right)_x = \frac{g f_x - f g_x}{g^2}.$$