

Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Huomautus

Mikäli osittaisderivaatta $f_x(x, y)$ on olemassa, niin se saadaan lasketuksi tavallisilla yhden muuttujan funktion derivoimissäännöillä pitämällä muuttujaa y vakiona ja derivoimalla muuttujan x suhteen. Vastaavasti $f_y(x, y)$ saadaan pitämällä x vakiona ja derivoimalla muuttujan y suhteen.

Huomautus

Mikäli osittaisderivaatta $f_x(x, y)$ on olemassa, niin se saadaan lasketuksi tavallisilla yhden muuttujan funktion derivoimissäännöillä pitämällä muuttujaa y vakiona ja derivoimalla muuttujan x suhteen. Vastaavasti $f_y(x, y)$ saadaan pitämällä x vakiona ja derivoimalla muuttujan y suhteen.

Siis derivointisäännöt pätevät, esimerkiksi

$$(fg)_x = f_x g + f g_x, \quad \left(\frac{f}{g}\right)_x = \frac{g f_x - f g_x}{g^2}.$$

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = x^2 \cos(y) + x + y^2.$$

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = x^2 \cos(y) + x + y^2.$$

Nyt

$$f_x(x, y) = 2x \cos(y) + 1, \quad f_y(x, y) = -x^2 \sin(y) + 2y.$$

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = x^2 \cos(y) + x + y^2.$$

Nyt

$$f_x(x, y) = 2x \cos(y) + 1, \quad f_y(x, y) = -x^2 \sin(y) + 2y.$$

Huomaa, että $f_x(x, y) \neq f_y(x, y)$. Edelleen

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = x^2 \cos(y) + x + y^2.$$

Nyt

$$f_x(x, y) = 2x \cos(y) + 1, \quad f_y(x, y) = -x^2 \sin(y) + 2y.$$

Huomaa, että $f_x(x, y) \neq f_y(x, y)$. Edelleen

$$f_x(\pi, 0) = 2\pi \cos(0) + 1 = 2\pi + 1.$$

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y).$$

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y).$$

Määrä $D_1 f(x, y)$, $D_1 f(0, \pi)$ ja $D_2 f(x, y)$.

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y).$$

Määrä $D_1 f(x, y)$, $D_1 f(0, \pi)$ ja $D_2 f(x, y)$.

Derivoidaan funktiota f ensin ensimmäisen muuttujan x suhteen. Tulon derivoimissäännöllä ja pitämällä muuttujaa y vakiona saadaan

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y).$$

Määää $D_1 f(x, y)$, $D_1 f(0, \pi)$ ja $D_2 f(x, y)$.

Derivoidaan funktiota f ensin ensimmäisen muuttujan x suhteen. Tulon derivoimissäännöllä ja pitämällä muuttujaa y vakiona saadaan

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (e^{xy} \cos(x + y)) \\ &= e^{xy} \cdot y \cdot \cos(x + y) + e^{xy} \cdot (-\sin(x + y) \cdot 1) \\ &= ye^{xy} \cos(x + y) - e^{xy} \sin(x + y). \end{aligned}$$

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y).$$

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y).$$

Määrä $D_1 f(x, y)$, $D_1 f(0, \pi)$ ja $D_2 f(x, y)$.

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y).$$

Määrä $D_1 f(x, y)$, $D_1 f(0, \pi)$ ja $D_2 f(x, y)$.

Saatiin

$$D_1 f(x, y) = ye^{xy} \cos(x + y) - e^{xy} \sin(x + y).$$

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y).$$

Määrittää $D_1 f(x, y)$, $D_1 f(0, \pi)$ ja $D_2 f(x, y)$.

Saatiin

$$D_1 f(x, y) = ye^{xy} \cos(x + y) - e^{xy} \sin(x + y).$$

Siis

$$\begin{aligned} D_1 f(0, \pi) &= \pi^{0 \cdot \pi} \cos(0 + \pi) - e^{0 \cdot \pi} \sin(0 + \pi) \\ &= \pi \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y).$$

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y).$$

Määrä $D_1 f(x, y)$, $D_1 f(0, \pi)$ ja $D_2 f(x, y)$.

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y).$$

Määrä $D_1 f(x, y)$, $D_1 f(0, \pi)$ ja $D_2 f(x, y)$.

Derivoidaan funktiota f sitten toisen muuttujan y suhteen. Tulon derivoimissäännöllä ja pitämällä muuttujaa x vakiona saadaan

Esimerkki

Olkoon

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y).$$

Määrä $D_1 f(x, y)$, $D_1 f(0, \pi)$ ja $D_2 f(x, y)$.

Derivoidaan funktiota f sitten toisen muuttujan y suhteen. Tulon derivoimissäännöllä ja pitämällä muuttujaa x vakiona saadaan

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (e^{xy} \cos(x + y)) \\ &= e^{xy} \cdot x \cdot \cos(x + y) + e^{xy} \cdot (-\sin(x + y) \cdot 1) \\ &= x e^{xy} \cos(x + y) - e^{xy} \sin(x + y). \end{aligned}$$