

Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Määritelmä

Derivoimalla ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaattoja uudestaan jomman kumman muuttujan suhteen saadaan **toisen kertaluvun osittaisderivaattoja**. Nämä ovat

Määritelmä

Derivoimalla ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaattoja uudestaan jomman kumman muuttujan suhteen saadaan **toisen kertaluvun osittaisderivaattoja**. Nämä ovat

$$D_{11}f(x, y) = D_1(D_1f(x, y)) = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x, y)$$

$$D_{22}f(x, y) = D_2(D_2f(x, y)) = f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x, y)$$

$$D_{12}f(x, y) = D_2(D_1f(x, y)) = f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x, y)$$

$$D_{21}f(x, y) = D_1(D_2f(x, y)) = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x, y)$$

Määritelmä

Derivoimalla ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaattoja uudestaan jomman kumman muuttujan suhteen saadaan **toisen kertaluvun osittaisderivaattoja**. Nämä ovat

$$D_{11}f(x, y) = D_1(D_1f(x, y)) = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x, y)$$

$$D_{22}f(x, y) = D_2(D_2f(x, y)) = f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x, y)$$

$$D_{12}f(x, y) = D_2(D_1f(x, y)) = f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x, y)$$

$$D_{21}f(x, y) = D_1(D_2f(x, y)) = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x, y)$$

Vastaavasti kertalukua n olevat osittaisderivaatat saadaan derivoimalla kertalukua $n - 1$ olevia osittaisderivaattoja.

Esimerkki

Olkoon $f(x, y) = x^3y^4$.

Esimerkki

Olkoon $f(x, y) = x^3 y^4$. Lasketaan $D_{11}f(x, y)$, $D_{22}f(x, y)$, $D_{12}f(x, y)$, $D_{21}f(x, y)$.

Esimerkki

Olkoon $f(x, y) = x^3y^4$. Lasketaan $D_{11}f(x, y)$, $D_{22}f(x, y)$, $D_{12}f(x, y)$, $D_{21}f(x, y)$. Aluksi täytyy laskea

$$D_1f(x, y) = 3x^2y^4, \quad D_2f(x, y) = 4x^3y^3.$$

Esimerkki

Olkoon $f(x, y) = x^3y^4$. Lasketaan $D_{11}f(x, y)$, $D_{22}f(x, y)$, $D_{12}f(x, y)$, $D_{21}f(x, y)$. Aluksi täytyy laskea

$$D_1f(x, y) = 3x^2y^4, \quad D_2f(x, y) = 4x^3y^3.$$

Edelleen

$$D_{11}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^4) = 6xy^4$$

$$D_{12}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^3) = 12x^2y^3$$

$$D_{21}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^3) = 12x^2y^3$$

$$D_{22}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^3) = 12x^3y^2$$

Esimerkki

Olkoon $f(x, y) = x^3y^4$. Lasketaan $D_{11}f(x, y)$, $D_{22}f(x, y)$, $D_{12}f(x, y)$, $D_{21}f(x, y)$. Aluksi täytyy laskea

$$D_1f(x, y) = 3x^2y^4, \quad D_2f(x, y) = 4x^3y^3.$$

Edelleen

$$D_{11}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^4) = 6xy^4$$

$$D_{12}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^3) = 12x^2y^3$$

$$D_{21}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^3) = 12x^2y^3$$

$$D_{22}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^3) = 12x^3y^2$$

Huomataan, että $D_{12} = D_{21}$. Tämä pätee usein.

Lause

Olkoon f funktio, jonka kaikki osittaisderivaatat ovat jatkuvia kertalukuun n saakka.

Lause

Olkoon f funktio, jonka kaikki osittaisderivaatat ovat jatkuvia kertalukuun n saakka. Tällöin kertaluvun n osittaisderivaatat ovat riippumattomia derivoimisjärjestyksestä.

Lause

Olkoon f funktio, jonka kaikki osittaisderivaatat ovat jatkuvia kertalukuun n saakka. Tällöin kertaluvun n osittaisderivaatat ovat riippumattomia derivoimisjärjestyksestä.

Todistus.

Usean muuttujan funktioiden analyysin kurssi.



Esimerkki

Olkoon $f(x, y, z) = e^{x-2y-3z}$. Lasketaan f_{223} , f_{232} ja f_{322} .

Esimerkki

Olkoon $f(x, y, z) = e^{x-2y-3z}$. Lasketaan f_{223} , f_{232} ja f_{322} .

Funktio f on muotoa $\exp(p(x, y, z))$, missä p on polynomi.

Esimerkki

Olkoon $f(x, y, z) = e^{x-2y-3z}$. Lasketaan f_{223} , f_{232} ja f_{322} .

Funktio f on muotoa $\exp(p(x, y, z))$, missä p on polynomi. Kun funktiota f osittaisderivoi saa muotoa $q(x, y, z) \exp(p(x, y, z))$ olevan funktion, jossa q on polynomi.

Esimerkki

Olkoon $f(x, y, z) = e^{x-2y-3z}$. Lasketaan f_{223} , f_{232} ja f_{322} .

Funktio f on muotoa $\exp(p(x, y, z))$, missä p on polynomi. Kun funktiota f osittaisderivoi saa muotoa $q(x, y, z) \exp(p(x, y, z))$ olevan funktion, jossa q on polynomi. Edelleen derivoimalla saadaan muotoa $a(x, y, z)e^{b(x, y, z)}$ olevia termejä, joissa $a(x, y, z)$ ja $b(x, y, z)$ ovat polynomeja.

Esimerkki

Olkoon $f(x, y, z) = e^{x-2y-3z}$. Lasketaan f_{223} , f_{232} ja f_{322} .

Funktio f on muotoa $\exp(p(x, y, z))$, missä p on polynomi. Kun funktiota f osittaisderivoi saa muotoa $q(x, y, z) \exp(p(x, y, z))$ olevan funktion, jossa q on polynomi. Edelleen derivoimalla saadaan muotoa $a(x, y, z)e^{b(x, y, z)}$ olevia termejä, joissa $a(x, y, z)$ ja $b(x, y, z)$ ovat polynomeja.

Saadut osittaisderivaattojen termit $a(x, y, z)e^{b(x, y, z)}$ ovat jatkuvia. Edellämainitun lauseen nojalla $f_{223} = f_{232} = f_{322}$.

Esimerkki

Olkoon $f(x, y, z) = e^{x-2y-3z}$. Funktion f kaikki osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia, joten $f_{223} = f_{232} = f_{322}$. Saadaan

Esimerkki

Olkoon $f(x, y, z) = e^{x-2y-3z}$. Funktion f kaikki osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia, joten $f_{223} = f_{232} = f_{322}$. Saadaan

$$\begin{aligned} f_{223}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} e^{x-2y-3z} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} - 2e^{x-2y-3z} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} 4e^{x-2y-3z} \\ &= -12e^{x-2y-3z} \\ &= f_{232}(x, y, z) = f_{322}(x, y, z). \end{aligned}$$