

Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Huomautus

Merkitään

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Huomautus

Merkitään

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Tällöin gradientti voidaan tulkita vektorin ∇ ja skalaarin $f(x, y)$ tuloksi

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \mathbf{j} \\ &= (f_x(x, y), f_y(x, y)).\end{aligned}$$

Esimerkki

Tarkastellaan funktiota f , $f(x, y) = x^2 + y^2$. Määrä f gradientti $\nabla f(x, y)$.

Esimerkki

Tarkastellaan funktiota f , $f(x, y) = x^2 + y^2$. Määrä f gradientti $\nabla f(x, y)$.

Funktion f osittaisderivaatat ovat

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y.$$

Esimerkki

Tarkastellaan funktiota f , $f(x, y) = x^2 + y^2$. Määrä f gradientti $\nabla f(x, y)$.

Funktion f osittaisderivaatat ovat

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y.$$

Siis funktion gradientti on

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}.$$

Esimerkki

Tarkastellaan funktiota f , $f(x, y) = x^2 + y^2$. Määrä funktion f gradientti $\nabla f(x, y)$.

Funktion f osittaisderivaatat ovat

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y.$$

Siis funktion gradientti on

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}.$$

Esimerkiksi pisteessä $(1, 2)$ evaluoituna funktion f gradientti on vektori

$$\nabla f(1, 2) = (2 \cdot 1)\mathbf{i} + (2 \cdot 2)\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = (2, 4).$$

Huomautus

Vastaavasti kolmen muuttujan funktiolle f saadaan

Huomautus

Vastaavasti kolmen muuttujan funktiolle f saadaan

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \text{grad } f(x, y, z) \\ &= D_1 f(x, y, z)\mathbf{i} + D_2 f(x, y, z)\mathbf{j} + D_3 f(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)),\end{aligned}$$

Huomautus

Vastaavasti kolmen muuttujan funktiolle f saadaan

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \text{grad } f(x, y, z) \\ &= D_1 f(x, y, z)\mathbf{i} + D_2 f(x, y, z)\mathbf{j} + D_3 f(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)),\end{aligned}$$

missä

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Esimerkki

Lasketaan funktion $f(x, y, z) = x + x \sin(y) + y^2 z^3$ gradientti.

Esimerkki

Lasketaan funktion $f(x, y, z) = x + x \sin(y) + y^2 z^3$ gradientti.

Osittaisderivaatat ovat

$$f_x(x, y, z) = 1 + \sin(y)$$

$$f_y(x, y, z) = x \cos(y) + 2yz^3$$

$$f_z(x, y, z) = 3y^2 z^2.$$

Esimerkki

Lasketaan funktion $f(x, y, z) = x + x \sin(y) + y^2 z^3$ gradientti.

Osittaisderivaatat ovat

$$f_x(x, y, z) = 1 + \sin(y)$$

$$f_y(x, y, z) = x \cos(y) + 2yz^3$$

$$f_z(x, y, z) = 3y^2 z^2.$$

Siis gradientti on vektori

$$\nabla f(x, y, z) = (1 + \sin(y), x \cos(y) + 2yz^3, 3y^2 z^2).$$

Esimerkki

Lasketaan funktion $f(x, y, z) = x + x \sin(y) + y^2 z^3$ gradientti.

Osittaisderivaatat ovat

$$f_x(x, y, z) = 1 + \sin(y)$$

$$f_y(x, y, z) = x \cos(y) + 2yz^3$$

$$f_z(x, y, z) = 3y^2 z^2.$$

Siis gradientti on vektori

$$\nabla f(x, y, z) = (1 + \sin(y), x \cos(y) + 2yz^3, 3y^2 z^2).$$

Kantavektorien avulla kirjoitettuna

$$\nabla f(x, y, z) = (1 + \sin(y))\mathbf{i} + (x \cos(y) + 2yz^3)\mathbf{j} + 3y^2 z^2\mathbf{k}.$$

Esimerkki

Funktion $f(x, y) = x^2y$ gradientti on $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$.

Esimerkki

Funktion $f(x, y) = x^2y$ gradientti on $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$.

Gradientin arvo pisteessä $(3, 4)$ on $\nabla f(3, 4) = (2 \cdot 3 \cdot 4, 3^2) = (24, 9)$.

Esimerkki

Funktion $f(x, y) = x^2y$ gradientti on $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$.

Gradientin arvo pisteessä $(3, 4)$ on $\nabla f(3, 4) = (2 \cdot 3 \cdot 4, 3^2) = (24, 9)$.

Funktion arvo kyseisessä pisteessä on $f(3, 4) = 3^2 \cdot 4 = 36$.

Esimerkki

Funktion $f(x, y) = x^2y$ gradientti on $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$.

Gradientin arvo pisteessä $(3, 4)$ on $\nabla f(3, 4) = (2 \cdot 3 \cdot 4, 3^2) = (24, 9)$.

Funktion arvo kyseisessä pisteessä on $f(3, 4) = 3^2 \cdot 4 = 36$.

On odotettavaa, että $f(4, 4) \approx 36 + 24 = 60$ ja $f(2, 4) \approx 36 - 24 = 12$.

Esimerkki

Funktion $f(x, y) = x^2y$ gradientti on $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$.

Gradientin arvo pisteessä $(3, 4)$ on $\nabla f(3, 4) = (2 \cdot 3 \cdot 4, 3^2) = (24, 9)$.

Funktion arvo kyseisessä pisteessä on $f(3, 4) = 3^2 \cdot 4 = 36$.

On odotettavaa, että $f(4, 4) \approx 36 + 24 = 60$ ja $f(2, 4) \approx 36 - 24 = 12$.

On odotettavaa, että $f(3, 5) \approx 36 + 9 = 45$ ja $f(3, 3) \approx 36 - 9 = 27$.

Funktion $f(x, y) = x^2y$ arvoja $f(j, k)$, missä $j = 2, 3, 4$ ja $k = 3, 4, 5$.

