Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali

Esimerkki

Funktion $f(x,y) = x^2y$ derivaatta suuntaan x eli suuntaan $(1,0)$ on
$f_x(x,y) = 2xy$

UNIVERSITY OF EASTERN FINLAND

Esimerkki

Funktion $f(x,y) = x^2y$ derivaatta suuntaan x eli suuntaan $(1,0)$ on
$f_x(x,y) = 2xy$

ja derivaatta suuntaan y eli suuntaan $(0,1)$ on $f_y(x,y) = x^2$.

Esimerkki

Funktion $f(x, y) = x^2 y$ derivaatta suuntaan x eli suuntaan $(1, 0)$ on
$f_x(x, y) = 2xy$

ja derivaatta suuntaan y eli suuntaan $(0, 1)$ on $f_y(x, y) = x^2$.
Pisteessä $(1, 1)$

$$f_x(1,1) = 2 \quad \text{ja} \quad f_y(1,1) = 1.$$

Suunnattu derivaatta

Esimerkki

Funktion $f(x, y) = x^2 y$ derivaatta suuntaan x eli suuntaan $(1, 0)$ on
$f_x(x, y) = 2xy$

ja derivaatta suuntaan y eli suuntaan $(0, 1)$ on $f_y(x, y) = x^2$.
Pisteessä $(1, 1)$

$$f_x(1, 1) = 2 \quad \text{ja} \quad f_y(1, 1) = 1.$$

Tässä kummankin vektorin $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ pituus on 1.

Esimerkki

Funktion $f(x, y) = x^2 y$ derivaatta suuntaan x eli suuntaan $(1, 0)$ on
$f_x(x, y) = 2xy$

ja derivaatta suuntaan y eli suuntaan $(0, 1)$ on $f_y(x, y) = x^2$.
Pisteessä $(1, 1)$

$$f_x(1, 1) = 2 \quad \text{ja} \quad f_y(1, 1) = 1.$$

Tässä kummankin vektorin $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ pituus on 1.

On mahdollista laskea derivaatta myös johonkin muuhun suuntaan, esimerkiksi suuntaan $(7, -2)$.

Suunnattu derivaatta

Olkoon (a, b) yksikkövektori eli $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$. Merkitään $h_1 = ah$ ja $h_2 = bh$. Kun $h \to 0$, niin myös $h_1, h_2 \to 0$.

Olkoon (a, b) yksikkövektori eli $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$. Merkitään $h_1 = ah$ ja $h_2 = bh$. Kun $h \to 0$, niin myös $h_1, h_2 \to 0$.

Voidaan laskea

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2)}{h_1}\frac{h_1}{h} + \frac{f(x, y+h_2) - f(x,y)}{h_1}\frac{h_2}{h} \\
&= f_x(x,y)a + f_y(x,y)b \\
&= \underbrace{(f_x(x,y), f_y(x,y))}_{=\nabla f} \cdot (a, b).
\end{aligned}
$$

Olkoon (a, b) yksikkövektori eli $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$. Merkitään $h_1 = ah$ ja $h_2 = bh$. Kun $h \to 0$, niin myös $h_1, h_2 \to 0$.

Voidaan laskea

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y + h_2)}{h_1}\frac{h_1}{h} + \frac{f(x, y + h_2) - f(x, y)}{h_1}\frac{h_2}{h} \\
&= f_x(x, y)a + f_y(x, y)b \\
&= \underbrace{(f_x(x, y), f_y(x, y))}_{=\nabla f} \cdot (a, b).
\end{aligned}$$

Määritelmä (derivaatta yksikkövektorin suuntaan)

Kun $|(a, b)| = 1$, niin saatu raja-arvo

$$D[a, b]f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot (a, b).$$

on funktion f suunnattu derivaatta suuntaan (a, b) pisteessä (x, y).

Suunnattu derivaatta

Määritelmä (derivaatta yksikkövektorin suuntaan)

Kun $|(a, b)| = 1$, niin saatu raja-arvo

$$D[a, b]f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot (a, b).$$

on funktion f suunnattu derivaatta suuntaan (a, b) pisteessä (x, y).

Suunnattu derivaatta

Määritelmä (derivaatta yksikkövektorin suuntaan)

Kun $|(a,b)| = 1$, niin saatu raja-arvo

$$D[a,b]f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) \cdot (a,b).$$

on funktion f suunnattu derivaatta suuntaan (a,b) pisteessä (x,y).

Jos (a,b) ei ole nollavektori, niin $(c,d) = (a,b)/|(a,b)|$ on yksikkövektori ja saadaan

$$D[c,d]f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) \cdot (c,d) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) \cdot \frac{(a,b)}{|(a,b)|}.$$

UNIVERSITY OF EASTERN FINLAND

Määritelmä (erikoistapaus)

Kun $|(a, b)| = 1$, niin saatu raja-arvo

$$D[a, b]f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot (a, b).$$

on funktion f suunnattu derivaatta suuntaan (a, b) pisteessä (x, y).

Määritelmä (erikoistapaus)

Kun $|(a,b)| = 1$, niin saatu raja-arvo

$$D[a,b]f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) \cdot (a,b).$$

on funktion f suunnattu derivaatta suuntaan (a,b) pisteessä (x,y).

Määritelmä

Jos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä (x,y) ja $(a,b) \neq (0,0)$, niin

$$D[a,b]f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) \cdot (a,b) \cdot \frac{1}{|(a,b)|}.$$

on funktion f suunnattu derivaatta suuntaan (a,b) pisteessä (x,y).

Suunnattu derivaatta

Lasketaan pisteessä $(3,4)$ funktion $f(x,y) = x^2y$ derivaatta suuntaan $H = (1,1)$.

Suunnattu derivaatta

Lasketaan pisteessä $(3,4)$ funktion $f(x,y) = x^2y$ derivaatta suuntaan $H = (1,1)$. Nyt $|H| = |(1,1)| = \sqrt{2}$.

Suunnattu derivaatta

Lasketaan pisteessä $(3,4)$ funktion $f(x,y) = x^2 y$ derivaatta suuntaan $H = (1,1)$. Nyt $|H| = |(1,1)| = \sqrt{2}$. Lisäksi

$$(f_x(x,y), f_y(x,y)) = (2xy, x^2), \quad (f_x(3,4), f_y(3,4)) = (24, 9).$$

Lasketaan pisteessä $(3,4)$ funktion $f(x,y) = x^2y$ derivaatta suuntaan $H = (1,1)$. Nyt $|H| = |(1,1)| = \sqrt{2}$. Lisäksi

$$(f_x(x,y), f_y(x,y)) = (2xy, x^2), \quad (f_x(3,4), f_y(3,4)) = (24, 9).$$

Siis

$$D[1,1]f(3,4) = (24,9) \cdot (1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{33}{\sqrt{2}} = 23.33.$$

Suunnattu derivaatta

Suunta voidaan ilmaista vektorin (a, b) sijaan antamalla kulma, siis muodossa $c = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Suunta voidaan ilmaista vektorin (a, b) sijaan antamalla kulma, siis muodossa $c = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Tällöin automaattisesti $|c| = 1$.

Suunta voidaan ilmaista vektorin (a, b) sijaan antamalla kulma, siis muodossa $c = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Tällöin automaattisesti $|c| = 1$.

Määritelmä

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : A \to \mathbb{R}$ derivoituva funktio.

Suunta voidaan ilmaista vektorin (a, b) sijaan antamalla kulma, siis muodossa $c = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Tällöin automaattisesti $|c| = 1$.

Määritelmä

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : A \to \mathbb{R}$ derivoituva funktio.

Funktion f suunnattu derivaatta suuntaan α pisteessä (x_0, y_0) on

$$D[\alpha]f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot (\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Lasketaan pisteessä $(3, 4$ funktion $f(x, y) = x^2y$ derivaatta suuntaan $\alpha = 30^\circ$.

Suunnattu derivaatta

Lasketaan pisteessä $(3, 4$ funktion $f(x, y) = x^2 y$ derivaatta suuntaan $\alpha = 30^\circ$. Muistikolmion perusteella $\sin(30^\circ) = 0.5$ ja $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$.

Lasketaan pisteessä $(3, 4$ funktion $f(x, y) = x^2 y$ derivaatta suuntaan $\alpha = 30^\circ$. Muistikolmion perusteella $\sin(30^\circ) = 0.5$ ja $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$.

Aiemmin laskettin

$$(f_x(3, 4), f_y(3, 4)) = (24, 9).$$

Lasketaan pisteessä $(3, 4$ funktion $f(x, y) = x^2 y$ derivaatta suuntaan $\alpha = 30°$. Muistikolmion perusteella $\sin(30°) = 0.5$ ja $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$.

Aiemmin laskettin

$$(f_x(3, 4), f_y(3, 4)) = (24, 9).$$

Saadaan

$$\begin{aligned} D[\alpha = 30°]f(x, y) &= (f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot (\cos\alpha, \sin\alpha) \\ &= (24, 9) \cdot (0.5, 0.866) \\ &= 12 + 7.79 = 19.79. \end{aligned}$$

Suunnattu derivaatta

Nähdään, että gradienttivektori

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

on hyödyllinen tässä yhteydessä.

Suunnattu derivaatta

Nähdään, että gradienttivektori

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

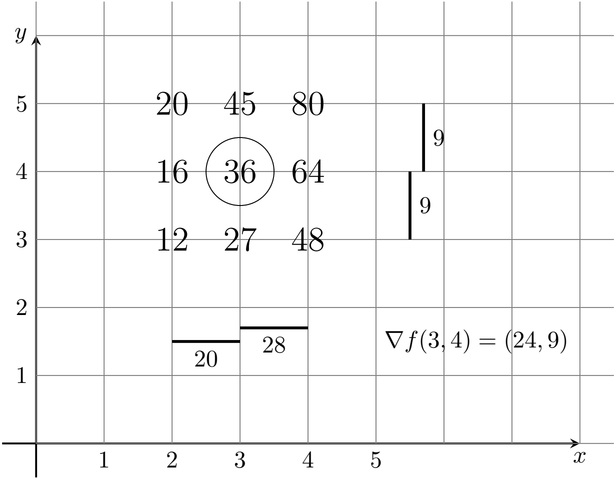
on hyödyllinen tässä yhteydessä.

Erityisesti merkinnöistä

$$\nabla f(3, 4) = (f_x(3, 4), f_y(3, 4)) = (f_x, f_y)(3, 4)$$

$\nabla f(3, 4)$ lienee selkein.

Funktion $f(x, y) = x^2 y$ arvoja $f(j, k)$, missä $j = 2, 3, 4$ ja $k = 3, 4, 5$.



Funktion $f(x,y) = x^2y$ arvoja $f(3+\cos(\alpha), 4+\sin(\alpha))$ sekä suunnattuja derivaattoja $D[\alpha]f(3,4)$, missä $\alpha = 0°, 45°, \ldots, 360°$.