

Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Määritelmä

Jos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä (x, y) ja $(a, b) \neq (0, 0)$, niin

$$D[a, b]f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot (a, b) \cdot \frac{1}{|(a, b)|}.$$

on funktion f **suunnattu derivaatta** suuntaan (a, b) pisteessä (x, y) .

Määritelmä

Jos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä (x, y) ja $(a, b) \neq (0, 0)$, niin

$$D[a, b]f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot (a, b) \cdot \frac{1}{|(a, b)|}.$$

on funktion f **suunnattu derivaatta** suuntaan (a, b) pisteessä (x, y) .

Määritelmä

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva funktio.

Funktion f suunnattu derivaatta suuntaan α pisteessä $(x_0, y_0) \in A$ on

$$D[\alpha]f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Gradientin avulla lausuttuna $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ lausekkeet yksinkertaistuvat.

Gradientin avulla lausuttuna $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ lausekkeet yksinkertaistuvat.

Määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä (x, y) .

Gradientin avulla lausuttuna $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ lausekkeet yksinkertaistuvat.

Määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä (x, y) .

(a) Jos $(a, b) \neq (0, 0)$, niin funktion f **suunnattu derivaatta** suuntaan (a, b) pisteessä (x, y) on

$$D[a, b]f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot (a, b) \cdot \frac{1}{|(a, b)|}.$$

Gradientin avulla lausuttuna $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ lausekkeet yksinkertaistuvat.

Määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä (x, y) .

(a) Jos $(a, b) \neq (0, 0)$, niin funktion f **suunnattu derivaatta** suuntaan (a, b) pisteessä (x, y) on

$$D[a, b]f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot (a, b) \cdot \frac{1}{|(a, b)|}.$$

(b) Jos $\alpha \in [0, 2\pi)$ on kulma, niin funktion f **suunnattu derivaatta** suuntaan α pisteessä (x, y) on

$$D[\alpha]f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Funktion $f(x, y) = x^2y$ gradientti $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$. Pisteessä $(3, 4)$ saadaan

Funktion $f(x, y) = x^2y$ gradientti $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$. Pisteessä $(3, 4)$ saadaan

$$\nabla f(3, 4) = (24, 9).$$

Funktion $f(x, y) = x^2y$ gradientti $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$. Pisteessä $(3, 4)$ saadaan

$$\nabla f(3, 4) = (24, 9).$$

Saadaan

$$D[\alpha]f(3, 4) = 24 \cos(\alpha) + 9 \sin(\alpha).$$

Funktion $f(x, y) = x^2y$ gradientti $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$. Pisteessä $(3, 4)$ saadaan

$$\nabla f(3, 4) = (24, 9).$$

Saadaan

$$D[\alpha]f(3, 4) = 24 \cos(\alpha) + 9 \sin(\alpha).$$

Merkitään lyhyemmin $D[\alpha] = D[\alpha]f(3, 4)$. Nyt esimerkiksi

Funktion $f(x, y) = x^2y$ gradientti $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$. Pisteessä $(3, 4)$ saadaan

$$\nabla f(3, 4) = (24, 9).$$

Saadaan

$$D[\alpha]f(3, 4) = 24 \cos(\alpha) + 9 \sin(\alpha).$$

Merkitään lyhyemmin $D[\alpha] = D[\alpha]f(3, 4)$. Nyt esimerkiksi

$$D[0^\circ] = 24, \quad D[90^\circ] = 9, \quad D[180^\circ] = -24, \quad D[270^\circ] = -9.$$

Funktion $f(x, y) = x^2y$ gradientti $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$. Pisteessä $(3, 4)$ saadaan

$$\nabla f(3, 4) = (24, 9).$$

Saadaan

$$D[\alpha]f(3, 4) = 24 \cos(\alpha) + 9 \sin(\alpha).$$

Merkitään lyhyemmin $D[\alpha] = D[\alpha]f(3, 4)$. Nyt esimerkiksi

$$D[0^\circ] = 24, \quad D[90^\circ] = 9, \quad D[180^\circ] = -24, \quad D[270^\circ] = -9.$$

Lisäksi

$$D[20.5^\circ] = 25.63, \quad D[110.5^\circ] = 0.025.$$

Funktion $f(x, y) = x^2y$ gradientti $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$. Pisteessä $(3, 4)$ saadaan

$$\nabla f(3, 4) = (24, 9).$$

Saadaan

$$D[\alpha]f(3, 4) = 24 \cos(\alpha) + 9 \sin(\alpha).$$

Merkitään lyhyemmin $D[\alpha] = D[\alpha]f(3, 4)$. Nyt esimerkiksi

$$D[0^\circ] = 24, \quad D[90^\circ] = 9, \quad D[180^\circ] = -24, \quad D[270^\circ] = -9.$$

Lisäksi

$$D[20.5^\circ] = 25.63, \quad D[110.5^\circ] = 0.025.$$

Suunta $\alpha = 20.5^\circ$ tuottaa luvulle $D[\alpha]f(3, 4)$ maksimiarvon ja suunta $\alpha = 90^\circ + 20.5^\circ = 110.5^\circ$ minimiarvon.

Funktion $f(x, y) = x^2y$ gradientti $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$. Pisteessä $(3, 4)$ saadaan

$$\nabla f(3, 4) = (24, 9).$$

Saadaan

$$D[\alpha]f(3, 4) = 24 \cos(\alpha) + 9 \sin(\alpha).$$

Merkitään lyhyemmin $D[\alpha] = D[\alpha]f(3, 4)$. Nyt esimerkiksi

$$D[0^\circ] = 24, \quad D[90^\circ] = 9, \quad D[180^\circ] = -24, \quad D[270^\circ] = -9.$$

Lisäksi

$$D[20.5^\circ] = 25.63, \quad D[110.5^\circ] = 0.025.$$

Suunta $\alpha = 20.5^\circ$ tuottaa luvulle $D[\alpha]f(3, 4)$ maksimiarvon ja suunta $\alpha = 90^\circ + 20.5^\circ = 110.5^\circ$ minimiarvon.

Miten nämä suunnat voi löytää helpoimmin?

Muistetaan vektorilaskennasta, että

$$(c, d) \cdot (a, b) = |(c, d)| |(a, b)| \cos \varphi,$$

Muistetaan vektorilaskennasta, että

$$(c, d) \cdot (a, b) = |(c, d)| |(a, b)| \cos \varphi,$$

missä φ on vektorien (c, d) ja (a, b) välinen kulma.

Muistetaan vektorilaskennasta, että

$$(c, d) \cdot (a, b) = |(c, d)| |(a, b)| \cos \varphi,$$

missä φ on vektorien (c, d) ja (a, b) välinen kulma. Pistetulon maksimiarvo

$$\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |(c, d)| |(a, b)| \cos \varphi = |(c, d)| |(a, b)|$$

Muistetaan vektorilaskennasta, että

$$(c, d) \cdot (a, b) = |(c, d)| |(a, b)| \cos \varphi,$$

missä φ on vektorien (c, d) ja (a, b) välinen kulma. Pistetulon maksimiarvo

$$\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |(c, d)| |(a, b)| \cos \varphi = |(c, d)| |(a, b)|$$

saadaan, kun $\varphi = 0$

Muistetaan vektorilaskennasta, että

$$(c, d) \cdot (a, b) = |(c, d)| |(a, b)| \cos \varphi,$$

missä φ on vektorien (c, d) ja (a, b) välinen kulma. Pistetulon maksimiarvo

$$\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |(c, d)| |(a, b)| \cos \varphi = |(c, d)| |(a, b)|$$

saadaan, kun $\varphi = 0$ eli vektorit (c, d) ja (a, b) ovat samansuuntaiset.

Olkoon φ vektorien $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ ja (a, b) välinen kulma. Tällöin

Olkoon φ vektorien $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ ja (a, b) välinen kulma. Tällöin

$$\begin{aligned} D[a, b]f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot (a, b) \cdot \frac{1}{|(a, b)|} \\ &= |\nabla f(x, y)| |(a, b)| \cos(\varphi) \cdot \frac{1}{|(a, b)|} \\ &= |\nabla f(x, y)| \cos \varphi. \end{aligned}$$

Olkoon φ vektorien $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ ja (a, b) välinen kulma. Tällöin

$$\begin{aligned} D[a, b]f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot (a, b) \cdot \frac{1}{|(a, b)|} \\ &= |\nabla f(x, y)| |(a, b)| \cos(\varphi) \cdot \frac{1}{|(a, b)|} \\ &= |\nabla f(x, y)| \cos \varphi. \end{aligned}$$

Merkitsemällä $\varphi = \text{kulma}(\nabla f(x, y), (a, b))$, saadaan

Olkoon φ vektorien $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ ja (a, b) välinen kulma. Tällöin

$$\begin{aligned} D[a, b]f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot (a, b) \cdot \frac{1}{|(a, b)|} \\ &= |\nabla f(x, y)| |(a, b)| \cos(\varphi) \cdot \frac{1}{|(a, b)|} \\ &= |\nabla f(x, y)| \cos \varphi. \end{aligned}$$

Merkitsemällä $\varphi = \text{kulma}(\nabla f(x, y), (a, b))$, saadaan

$$D[a, b]f(x, y) = |\nabla f(x, y)| \cos(\text{kulma}(\nabla f(x, y), (a, b))).$$

Olkoon φ vektorien $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ ja (a, b) välinen kulma. Tällöin

$$\begin{aligned} D[a, b]f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot (a, b) \cdot \frac{1}{|(a, b)|} \\ &= |\nabla f(x, y)| |(a, b)| \cos(\varphi) \cdot \frac{1}{|(a, b)|} \\ &= |\nabla f(x, y)| \cos \varphi. \end{aligned}$$

Merkitsemällä $\varphi = \text{kulma}(\nabla f(x, y), (a, b))$, saadaan

$$D[a, b]f(x, y) = |\nabla f(x, y)| \cos(\text{kulma}(\nabla f(x, y), (a, b))).$$

Muotoillaan tulos lauseeksi.

Lause

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva funktio.

Lause

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva funktio. Olkoon $(a, b) \neq (0, 0)$. Funktion f suunnattu derivaatta suuntaan (a, b) voidaan laskea kaavalla

Lause

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva funktio. Olkoon $(a, b) \neq (0, 0)$. Funktion f suunnattu derivaatta suuntaan (a, b) voidaan laskea kaavalla

$$D[a, b]f(x, y) = |\nabla f(x, y)| \cos(\text{kulma}(\nabla f(x, y), (a, b))).$$

Lause

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva funktio. Olkoon $(a, b) \neq (0, 0)$. Funktion f suunnattu derivaatta suuntaan (a, b) voidaan laskea kaavalla

$$D[a, b]f(x, y) = |\nabla f(x, y)| \cos(\text{kulma}(\nabla f(x, y), (a, b))).$$

Todistus.

Tarvittavat laskut tehtiin edellä.



Lause

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva funktio. Olkoon $(a, b) \neq (0, 0)$. Funktion f suunnattu derivaatta suuntaan (a, b) voidaan laskea kaavalla

Lause

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva funktio. Olkoon $(a, b) \neq (0, 0)$. Funktion f suunnattu derivaatta suuntaan (a, b) voidaan laskea kaavalla

$$D[a, b]f(x, y) = |\nabla f(x, y)| \cos(\text{kulma}(\nabla f(x, y), (a, b))).$$

Lause

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva funktio. Olkoon $(a, b) \neq (0, 0)$. Funktion f suunnattu derivaatta suuntaan (a, b) voidaan laskea kaavalla

$$D[a, b]f(x, y) = |\nabla f(x, y)| \cos(\text{kulma}(\nabla f(x, y), (a, b))).$$

Seuraus

Suunnattu derivaatta $D[a, b]f(x, y)$ saa maksiminsa, kun $\nabla f(x, y) \parallel (a, b)$. Siis gradientti kertoo funktion voimakkaimman kasvusuunnan.

Lause

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva funktio. Olkoon $(a, b) \neq (0, 0)$. Funktion f suunnattu derivaatta suuntaan (a, b) voidaan laskea kaavalla

$$D[a, b]f(x, y) = |\nabla f(x, y)| \cos(\text{kulma}(\nabla f(x, y), (a, b))).$$

Seuraus

Suunnattu derivaatta $D[a, b]f(x, y)$ saa maksiminsa, kun $\nabla f(x, y) \parallel (a, b)$. Siis gradientti kertoo funktion voimakkaimman kasvusuunnan.

Seuraus

Suunnattu derivaatta $D[a, b]f(x, y)$ on nolla, kun $\nabla f(x, y) \perp (a, b)$. Siis suunnattu derivaatta on nolla, kun liikutaan gradienttia vastaan kohtisuoraan suuntaan.

Seuraus

Suunnattu derivaatta $D[a, b]f(x, y)$ on nolla, kun $\nabla f(x, y) \perp (a, b)$. Siis suunnattu derivaatta on nolla, kun liikutaan gradienttia vastaan kohtisuoraan suuntaan.

Seuraus

Suunnattu derivaatta $D[a, b]f(x, y)$ on nolla, kun $\nabla f(x, y) \perp (a, b)$. Siis suunnattu derivaatta on nolla, kun liikutaan gradienttia vastaan kohtisuoraan suuntaan.

Seuraus

Gradienttivektori $\nabla f(x, y)$ on kohtisuorassa funktion tasa-arvokäyriä vastaan.

Esimerkki

Olkoon $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Mihin suuntaan funktio f **kasvaa** voimakkaimmin pisteessä $(1, 1)$?

Esimerkki

Olkoon $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Mihin suuntaan funktio f **kasvaa** voimakkaimmin pisteessä $(1, 1)$?

Suuntaan $\nabla f(1, 1)$. Saadaan $\nabla f(x, y) = (2x, 3y)$, joten $\nabla f(1, 1) = (2, 3)$.

Esimerkki

Olkoon $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Mihin suuntaan funktio f **vähenee** voimakkaimmin pisteessä $(1, 1)$?

Esimerkki

Olkoon $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Mihin suuntaan funktio f **vähenee** voimakkaimmin pisteessä $(1, 1)$?

Suuntaan $-\nabla f(1, 1) = -(2, 3)$.

Esimerkki

Olkoon $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Mihin suuntaan funktion f tasa-arvokäyrä menee pisteessä $(1, 1)$? Mikä on tasa-arvokäyrän tangentin yhtälö?

Esimerkki

Olkoon $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Mihin suuntaan funktion f tasa-arvokäyrä menee pisteessä $(1, 1)$? Mikä on tasa-arvokäyrän tangentin yhtälö?

Funktio kasvaa voimakkaimmin suuntaan $\nabla f(1, 1) = (2, 3) = (c, d)$.

Esimerkki

Olkoon $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Mihin suuntaan funktion f tasa-arvokäyrä menee pisteessä $(1, 1)$? Mikä on tasa-arvokäyrän tangentin yhtälö?

Funktio kasvaa voimakkaimmin suuntaan $\nabla f(1, 1) = (2, 3) = (c, d)$. Eräs vektorille (c, d) kohtisuora vektori on $(d, -c)$, koska $(c, d) \cdot (d, -c) = cd - cd = 0$.

Esimerkki

Olkoon $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Mihin suuntaan funktion f tasa-arvokäyrä menee pisteessä $(1, 1)$? Mikä on tasa-arvokäyrän tangentin yhtälö?

Funktio kasvaa voimakkaimmin suuntaan $\nabla f(1, 1) = (2, 3) = (c, d)$. Eräs vektorille (c, d) kohtisuora vektori on $(d, -c)$, koska $(c, d) \cdot (d, -c) = cd - cd = 0$. Siis tasa-arvokäyrä menee suuntaan $(3, -2)$.

Esimerkki

Olkoon $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Mihin suuntaan funktion f tasa-arvokäyrä menee pisteessä $(1, 1)$? Mikä on tasa-arvokäyrän tangentin yhtälö?

Funktio kasvaa voimakkaimmin suuntaan $\nabla f(1, 1) = (2, 3) = (c, d)$. Eräs vektorille (c, d) kohtisuora vektori on $(d, -c)$, koska $(c, d) \cdot (d, -c) = cd - cd = 0$. Siis tasa-arvokäyrä menee suuntaan $(3, -2)$.

Tasa-arvokäyrän tangenti on muotoa $2x + 3y = A$.

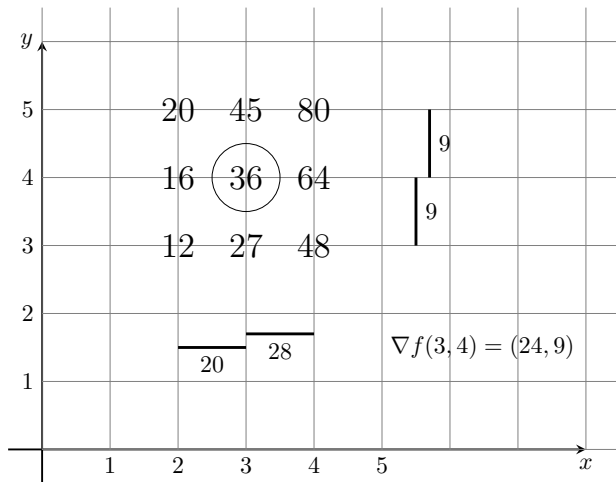
Esimerkki

Olkoon $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Mihin suuntaan funktion f tasa-arvokäyrä menee pisteessä $(1, 1)$? Mikä on tasa-arvokäyrän tangentin yhtälö?

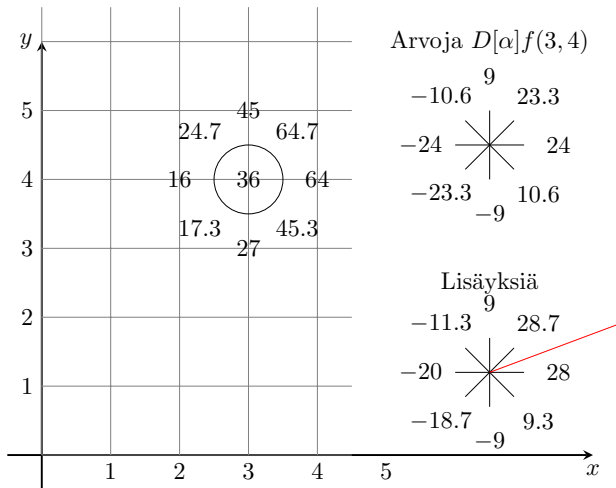
Funktio kasvaa voimakkaimmin suuntaan $\nabla f(1, 1) = (2, 3) = (c, d)$. Eräs vektorille (c, d) kohtisuora vektori on $(d, -c)$, koska $(c, d) \cdot (d, -c) = cd - cd = 0$. Siis tasa-arvokäyrä menee suuntaan $(3, -2)$.

Tasa-arvokäyrän tangentti on muotoa $2x + 3y = A$. Valitsemalla $A = 5$, tangentti kulkee pisteen $(1, 1)$ kautta.

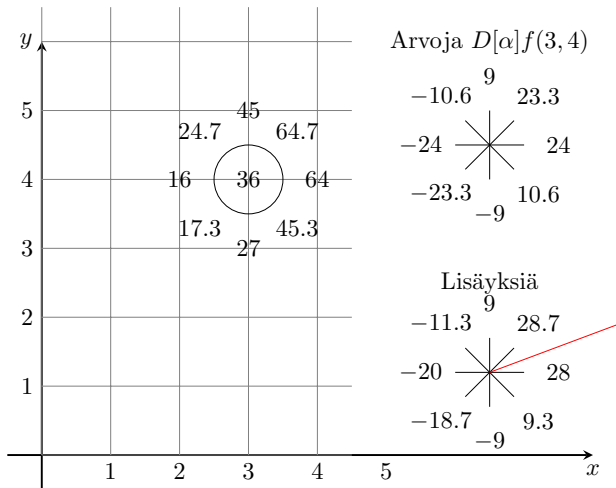
Funktion $f(x, y) = x^2y$ arvoja $f(j, k)$, missä $j = 2, 3, 4$ ja $k = 3, 4, 5$.



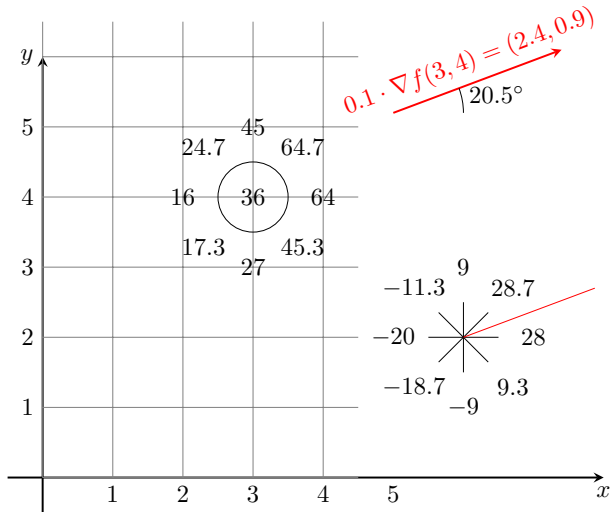
Funktion $f(x, y) = x^2y$ arvoja $f(3 + \cos(\alpha), 4 + \sin(\alpha))$ sekä suunnattuja derivaattoja $D[\alpha]f(3, 4)$, missä $\alpha = 0^\circ, 45^\circ, \dots, 360^\circ$.



Funktion $f(x, y) = x^2y$ arvoja $f(3 + \cos(\alpha), 4 + \sin(\alpha))$ sekä suunnattuja derivaattoja $D[\alpha]f(3, 4)$, missä $\alpha = 0^\circ, 45^\circ, \dots, 360^\circ$.



Funktion $f(x, y) = x^2y$ kasvaa pisteessä $(3, 4)$ voimakkaimmin gradientin $\nabla f(3, 4) = (24, 9)$ suuntaan.



Funktion $f(x, y) = x^2y$ gradientti ja tasa-arvokäyriä.

