

Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Esimerkki

Eksponenttifunktiota e^x voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$e^x \approx 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Esimerkki

Eksponenttifunktiota e^x voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$e^x \approx 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Yleisesti, sileää funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

Esimerkki

Eksponenttifunktiota e^x voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$e^x \approx 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Yleisesti, sileää funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$f(x) \approx a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Esimerkki

Eksponenttifunktiota e^x voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$e^x \approx 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Yleisesti, sileää funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$f(x) \approx a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Mutta, miten kertoimet a , b , c , d saadaan?

Sileää funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$f(x) \approx a + bx + cx^2 + dx^3 = p(x).$$

Mutta, miten kertoimet a , b , c , d saadaan?

Halutaan, että funktiot saavat saman arvon origossa, joten asetetaan

Sileää funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$f(x) \approx a + bx + cx^2 + dx^3 = p(x).$$

Mutta, miten kertoimet a , b , c , d saadaan?

Halutaan, että funktiot saavat saman arvon origossa, joten asetetaan

$$f(0) = a = p(0),$$

Sileää funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$f(x) \approx a + bx + cx^2 + dx^3 = p(x).$$

Mutta, miten kertoimet a , b , c , d saadaan?

Halutaan, että funktiot saavat saman arvon origossa, joten asetetaan

$$f(0) = a = p(0),$$

siis $a = f(0)$.

Sileää funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$f(x) \approx f(0) + bx + cx^2 + dx^3 = p(x).$$

Sileää funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$f(x) \approx f(0) + bx + cx^2 + dx^3 = p(x).$$

Miten kertoimet b , c , d saadaan?

Halutaan, että funktiot kasvavat yhtä nopeasti origossa. Kasvunopeuden kertoo derivaatta, joten asetetaan

Sileää funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$f(x) \approx f(0) + bx + cx^2 + dx^3 = p(x).$$

Miten kertoimet b , c , d saadaan?

Halutaan, että funktiot kasvavat yhtä nopeasti origossa. Kasvunopeuden kertoo derivaatta, joten asetetaan

$$f'(0) = b = p'(0),$$

Sileää funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$f(x) \approx f(0) + bx + cx^2 + dx^3 = p(x).$$

Miten kertoimet b , c , d saadaan?

Halutaan, että funktiot kasvavat yhtä nopeasti origossa. Kasvunopeuden kertoo derivaatta, joten asetetaan

$$f'(0) = b = p'(0),$$

siis $b = f'(0)$.

Sileää funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + cx^2 + dx^3 = p(x).$$

Miten kertoimet c , d saadaan?

Sileää funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + cx^2 + dx^3 = p(x).$$

Miten kertoimet c , d saadaan?

Derivoimalla saadaan

$$f''(x) \approx 2c + 3dx = p'''(x), \quad f'''(x) \approx 3 \cdot 2 \cdot d,$$

Sileää funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + cx^2 + dx^3 = p(x).$$

Miten kertoimet c , d saadaan?

Derivoimalla saadaan

$$f''(x) \approx 2c + 3dx = p'''(x), \quad f'''(x) \approx 3 \cdot 2 \cdot d,$$

joten valitaan $c = \frac{1}{2}f''(0)$ ja $d = \frac{1}{3!}f'''(0)$.

Lause (Taylorin kaava)

Jos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on $n + 1$ kertaa derivoituva origossa, niin

Lause (Taylorin kaava)

Jos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on $n + 1$ kertaa derivoituva origossa, niin

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x),$$

Lause (Taylorin kaava)

Jos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on $n + 1$ kertaa derivoituva origossa, niin

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x),$$

missä virhefunktio $\varepsilon(x) \rightarrow 0$, kun $x \rightarrow 0$.

Tarkastelupisteen ei tarvitse olla origo. Voidaan merkitä $x = t - t_0$. Tällöin $x = 0$, jos ja vain jos $t = t_0$.

Tarkastelupisteen ei tarvitse olla origo. Voidaan merkitä $x = t - t_0$. Tällöin $x = 0$, jos ja vain jos $t = t_0$.

Lause (Taylorin kaava)

Jos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on $n + 1$ kertaa derivoituva pisteessä x_0 , niin

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}x^3 \\ & + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0), \end{aligned}$$

missä virhefunktio $\varepsilon(x - x_0) \rightarrow 0$, kun $x \rightarrow x_0$.

Lause (Taylorin kaava)

Jos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on $n + 1$ kertaa derivoituva pisteessä x_0 , niin

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}x^3 \\ &\quad + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0) \\ &= T[f, x_0, n](x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0), \end{aligned}$$

missä virhefunktio $\varepsilon(x - x_0) \rightarrow 0$, kun $x \rightarrow x_0$.

Lause (Taylorin kaava)

Jos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on $n + 1$ kertaa derivoituva pisteessä x_0 , niin

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}x^3 \\ &\quad + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0) \\ &= T[f, x_0, n](x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0), \end{aligned}$$

missä virhefunktio $\varepsilon(x - x_0) \rightarrow 0$, kun $x \rightarrow x_0$.

Määritelmä

Funktio $T[f, x_0, n]$ on funktion f **Taylorin polynomi**. Lisäksi luku x_0 on **kehityskeskus** ja polynomin **aste** on n .