

Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Johdetaan luonnolliselle logaritmille joitakin sarjakehitelmiä.

Johdetaan luonnolliselle logaritmille joitakin sarjakehitelmiä.

Merkitään $f(x) = \ln(1 + x)$, jolloin $f(0) = 0$. Derivoimalla saadaan

Johdetaan luonnolliselle logaritmille joitakin sarjakehitelmiä.

Merkitään $f(x) = \ln(1+x)$, jolloin $f(0) = 0$. Derivoimalla saadaan

$$f'(x) = \frac{(1+x)'}{(1+x)} = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}.$$

Johdetaan luonnolliselle logaritmille joitakin sarjakehitelmiä.

Merkitään $f(x) = \ln(1+x)$, jolloin $f(0) = 0$. Derivoimalla saadaan

$$f'(x) = \frac{(1+x)'}{(1+x)} = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}.$$

Tähän voidaan soveltaa geometrisen sarjan kaavaa, saadaan

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

Johdetaan luonnolliselle logaritmille joitakin sarjakehitelmiä.

Merkitään $f(x) = \ln(1+x)$, jolloin $f(0) = 0$. Derivoimalla saadaan

$$f'(x) = \frac{(1+x)'}{(1+x)} = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}.$$

Tähän voidaan soveltaa geometrisen sarjan kaavaa, saadaan

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

Integroimalla termeittäin saadaan

$$f(x) = c + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Johdetaan luonnolliselle logaritmille joitakin sarjakehitelmiä.

Merkitään $f(x) = \ln(1+x)$, jolloin $f(0) = 0$. Derivoimalla saadaan

$$f'(x) = \frac{(1+x)'}{(1+x)} = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}.$$

Tähän voidaan soveltaa geometrisen sarjan kaavaa, saadaan

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

Integroimalla termeittäin saadaan

$$f(x) = c + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Koska $f(0) = 0$, niin $c = 0$.

Siis

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Siis

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Vaihtamalla luvun x paikalle $-x$, saadaan

Siis

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Vaihtamalla luvun x paikalle $-x$, saadaan

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Siis

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Vaihtamalla luvun x paikalle $-x$, saadaan

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Siis

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \dots$$

Siis

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Vaihtamalla luvun x paikalle $-x$, saadaan

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Siis

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \dots$$

Kertomalla puolittain vakiolla $1/2$ saadaan

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

Siis

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots,$$

kun $|x| < 1$. Saadaan

$$\frac{1+x}{1-x} = y, \quad \text{kun } x = \frac{y-1}{y+1}.$$

Jos $y = 3$, niin $x = 0.5$, joten

$$\frac{1}{2} \ln(3) \approx 0.5 + \frac{0.5^3}{3} + \frac{0.5^5}{5} \approx 0.5 + 0.041 + 0.01025 = 0.5432.$$

Tarkka arvo on $0.5 \ln(3) = 0.549$.

Saatiin

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Jos $a = 1 + x/100$, niin $a^p = 2$, kun $p \ln(a) = \ln(2)$ eli kun

$$p = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} \approx \frac{0.7}{\ln(1+x/100)} \approx \frac{0.7}{x/100} = \frac{70}{x}.$$

Esimerkki

Rahastotilin tuotto on 2 % vuodessa. Kuinka suuressa ajassa sijoituksen nimellisarvo kaksinkertaistuu? Nyt $x = 2$ ja $a = 1,02$. Saadaan

$$p = \frac{70}{x} = \frac{70}{2} = 35.$$

Siis sijoituksen nimellisarvo kaksinkertaistuu 35 vuodessa.