

Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Esimerkki

Tunnetaan reaalifunktioiden sarjakehitelmät

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots$$

ja

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \dots$$

Esimerkki

Funktiota $\sin(x)e^y/x$ voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)e^y}{x} &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots\right) \left(1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \dots\right) \\ &= 1 + y - \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2y}{6} - \dots\end{aligned}$$

Esimerkki

Funktiota $\sin(x)e^y/x$ voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)e^y}{x} &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots\right) \left(1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \dots\right) \\ &= 1 + y - \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2y}{6} - \dots\end{aligned}$$

Yleisesti kahden muuttujan funktiota voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$f(x, y) = a + (bx + cy) + (dx^2 + exy + fy^2) + (gx^3 + hx^2y + ixy^2 + jy^3) + \dots$$

Mutta, miten kertoimet $a, b, c, \dots$ löydetään?

Kahden muuttujan funktiota voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$f(x, y) = a + (bx + cy) + (dx^2 + exy + fy^2) + (gx^3 + hx^2y + ixy^2 + jy^3) + \dots$$

Lasketaan joitakin osittaisderivaattoja ja arvoja

$$f(x, y) = a + (bx + cy) + \dots \qquad f(0, 0) = a$$

$$f_x(x, y) = (b + 0) + (2dx + ey + 0) + \dots \qquad f_x(0, 0) = b$$

$$f_y(x, y) = (0 + c) + (0 + ex + 2fy) + \dots \qquad f_y(0, 0) = c$$

$$f_{xx}(x, y) = 2d + (6gx + 2hy + 0 + 0) \dots \qquad f_{xx}(0, 0) = 2d$$

$$f_{xy}(x, y) = e + (0 + 2hx + 2iy + 0) \dots \qquad f_{xy}(0, 0) = e$$

$$f_{yy}(x, y) = 2f + (0 + 0 + 2ix + 6jy) \dots \qquad f_{yy}(0, 0) = 2f$$

Kahden muuttujan funktiota voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$f(x, y) = a + (bx + cy) + (dx^2 + exy + fy^2) + (gx^3 + hx^2y + ixy^2 + jy^3) + \dots$$

Osittaisderivaattojen arvoja voi päätellä suoraan esityksestä.

Kahden muuttujan funktiota voidaan arvioida origon ympäristössä polynomilla

$$f(x, y) = a + (bx + cy) + (dx^2 + exy + fy^2) + (gx^3 + hx^2y + ixy^2 + jy^3) + \dots$$

Osittaisderivaattojen arvoja voi päätellä suoraan esityksestä.

Merkitään lyhyesti $f_x = f_x(0, 0)$. Origossa pätee

$$\begin{aligned} f &= a, \\ f_x &= b, \quad f_y(0, 0) = c, \\ f_{xx} &= 2d, \quad f_{xy} = e, \quad f_{yy} = 2f, \\ f_{xxx} &= 6g, \quad f_{xxy} = 2h, \quad f_{xyy} = 2i, \quad f_{yyy} = 6j. \end{aligned}$$

Merkitään

$$\partial_x^{(j)} = \frac{\partial^j}{\partial x^j} = \underbrace{\partial_x \partial_x \cdots \partial_x}_{j \text{ kpl}}.$$

Lause (Taylorin kaava kahden muuttujan funktioille)

Jos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on sileä origon ympäristössä, niin

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=j+k} \frac{\partial_x^{(j)} \partial_y^{(k)} f}{j!k!} x^j y^k \\ &= f(0, 0) + (f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y) \\ &\quad + \left(\frac{f_{xx}(0, 0)}{2 \cdot 1} x^2 + \frac{f_{xy}(0, 0)}{1 \cdot 1} xy + \frac{f_{yy}(0, 0)}{1 \cdot 2} y^2 \right) + \dots \end{aligned}$$

Lause (Taylorin kaava kahden muuttujan funktioille)

Jos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on sileä origon ympäristössä, niin

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=j+k} \frac{\partial_x^{(j)} \partial_y^{(k)} f}{j!k!} x^j y^k \\ &= f(0, 0) + (f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y) \\ &\quad + \left(\frac{f_{xx}(0, 0)}{2 \cdot 1} x^2 + \frac{f_{xy}(0, 0)}{1 \cdot 1} xy + \frac{f_{yy}(0, 0)}{1 \cdot 2} y^2 \right) + \dots \end{aligned}$$

Siis

$$f(x, y) \approx f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y.$$

Siis

$$f(x, y) \approx f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y,$$

kun $x, y \approx 0$.

Esimerkki

$$\cos(x)e^y \approx 1 + 0 + y,$$

kun $x, y \approx 0$.

Lause (Taylorin kaava kolmen muuttujan funktioille)

Jos $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ on sileä origon ympäristössä, niin

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=j+k+m} \frac{\partial_x^{(j)} \partial_y^{(k)} \partial_z^{(m)} f}{j!k!m!} x^j y^k z^m \\ &= f(0, 0, 0) + (f_x(0, 0, 0)x + f_y(0, 0, 0)y + f_z(0, 0, 0)z) \\ &\quad + \left(\frac{f_{xx}(0, 0, 0)}{2 \cdot 1 \cdot 1} x^2 + \frac{f_{xy}(0, 0, 0)}{1 \cdot 1 \cdot 1} xy + \frac{f_{xz}(0, 0, 0)}{1 \cdot 1 \cdot 1} xz \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_{yy}(0, 0, 0)}{1 \cdot 2 \cdot 1} y^2 + \frac{f_{yz}(0, 0, 0)}{1 \cdot 1 \cdot 1} yz + \frac{f_{zz}(0, 0, 0)}{1 \cdot 1 \cdot 2} z^2 \right) + \dots \end{aligned}$$

Siis

$$f(x, y, z) \approx f(0, 0, 0) + f_x(0, 0, 0)x + f_y(0, 0, 0)y + f_z(0, 0, 0)z,$$

kun $x, y, z \approx 0$.

Siis

$$f(x, y, z) \approx f(0, 0, 0) + f_x(0, 0, 0)x + f_y(0, 0, 0)y + f_z(0, 0, 0)z.$$

Esimerkki

Esimerkiksi

$$\sin(x) \cos(y) e^z \approx 0 + x + 0 + z = x + z,$$

kun $x, y, z \approx 0$.