

Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Esimerkki

Lasketaan likiarvo luvulle $\sqrt{102}$. Merkitään $f(x) = \sqrt{x}$. Nyt

Esimerkki

Lasketaan likiarvo luvulle $\sqrt{102}$. Merkitään $f(x) = \sqrt{x}$. Nyt

$$f'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Esimerkki

Lasketaan likiarvo luvulle $\sqrt{102}$. Merkitään $f(x) = \sqrt{x}$. Nyt

$$f'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Siis

$$f'(100) = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Esimerkki

Lasketaan likiarvo luvulle $\sqrt{102}$. Merkitään $f(x) = \sqrt{x}$. Nyt

$$f'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Siis

$$f'(100) = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Pätee

$$f(x) \approx f(100) + f'(100)(x - 100),$$

Esimerkki

Lasketaan likiarvo luvulle $\sqrt{102}$. Merkitään $f(x) = \sqrt{x}$. Nyt

$$f'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Siis

$$f'(100) = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Pätee

$$f(x) \approx f(100) + f'(100)(x - 100),$$

kun $x \approx 100$. Siis

Esimerkki

Lasketaan likiarvo luvulle $\sqrt{102}$. Merkitään $f(x) = \sqrt{x}$. Nyt

$$f'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Siis

$$f'(100) = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Pätee

$$f(x) \approx f(100) + f'(100)(x - 100),$$

kun $x \approx 100$. Siis

$$\sqrt{102} \approx f(102) = 10 + 0,05 \cdot 2 = 10,1.$$

Esimerkki

Lasketaan likiarvo luvulle $\sqrt{102}$. Merkitään $f(x) = \sqrt{x}$. Nyt

$$f'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Siis

$$f'(100) = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Pätee

$$f(x) \approx f(100) + f'(100)(x - 100),$$

kun $x \approx 100$. Siis

$$\sqrt{102} \approx f(102) = 10 + 0,05 \cdot 2 = 10,1.$$

Nähdään, että $10,1^2 = 102,01$, joten likiarvo on hyvä.

Menettely perustuu siihen, että koska

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

Menettely perustuu siihen, että koska

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

niin pienellä muuttujan h arvolla

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{eli} \quad f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h.$$

Menettely perustuu siihen, että koska

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

niin pienellä muuttujan h arvolla

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{eli} \quad f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h.$$

Merkitsemällä $f(x+h) - f(x) = \Delta f$ ja $h = \Delta x$, saadaan

$$\Delta f = f'(x)\Delta x.$$

Menettely perustuu siihen, että koska

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

niin pienellä muuttujan h arvolla

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{eli} \quad f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h.$$

Merkitsemällä $f(x+h) - f(x) = \Delta f$ ja $h = \Delta x$, saadaan

$$\Delta f = f'(x)\Delta x.$$

Täsmällisemmin voidaan käyttää Taylorin polynomeja.

Olkoon $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolle ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia.

Olkoon $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolle ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia. Olkoon $(x_0, y_0) \in A$. Tällöin funktion f arvoja voidaan approksimoida funktion

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Olkoon $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolle ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia. Olkoon $(x_0, y_0) \in A$. Tällöin funktion f arvoja voidaan approksimoida funktion

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

arvoilla. Siis $f(x, y) \approx L(x, y)$ lähellä pistettä (x_0, y_0) .

Olkoon $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolle ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia. Olkoon $(x_0, y_0) \in A$. Tällöin funktion f arvoja voidaan approksimoida funktion

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

arvoilla. Siis $f(x, y) \approx L(x, y)$ lähellä pistettä (x_0, y_0) .

Huomautus

Merkitään $\Delta x = x - x_0$ ja $\Delta y = y - y_0$. Tällöin funktion arvon muutos Δf on

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.\end{aligned}$$

Määritelmä

Lauseketta

$$\begin{aligned}\Delta f &= df \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.\end{aligned}$$

kutsutaan kokonaisdifferentiaaliksi.

Esimerkki

Tarkastellaan suoran ympyrälieriön muotoista astiaa. Mittauksissa on saatu lieriön pohjan halkaisijaksi $d = 12.00 \pm 0.05$ (cm) ja lieriön korkeudeksi $h = 15.00 \pm 0.05$ (cm). Määrää lieriön tilavuus virherajoineen.

Esimerkki

Tarkastellaan suoran ympyrälieriön muotoista astiaa. Mittauksissa on saatu lieriön pohjan halkaisijaksi $d = 12.00 \pm 0.05$ (cm) ja lieriön korkeudeksi $h = 15.00 \pm 0.05$ (cm). Määrää lieriön tilavuus virherajoineen.

Suoran ympyrälieriön tilavuus V riippuu lieriön pohjan halkaisijasta ja korkeudesta siten, että

Esimerkki

Tarkastellaan suoran ympyrälieriön muotoista astiaa. Mittauksissa on saatu lieriön pohjan halkaisijaksi $d = 12.00 \pm 0.05$ (cm) ja lieriön korkeudeksi $h = 15.00 \pm 0.05$ (cm). Määrää lieriön tilavuus virherajoiheen.

Suoran ympyrälieriön tilavuus V riippuu lieriön pohjan halkaisijasta ja korkeudesta siten, että

$$V(d, h) = \pi(d/2)^2 h = \frac{\pi d^2 h}{4}.$$

Esimerkki

Tarkastellaan suoran ympyrälieriön muotoista astiaa. Mittauksissa on saatu lieriön pohjan halkaisijaksi $d = 12.00 \pm 0.05$ (cm) ja lieriön korkeudeksi $h = 15.00 \pm 0.05$ (cm). Määrää lieriön tilavuus virherajoiheen.

Suoran ympyrälieriön tilavuus V riippuu lieriön pohjan halkaisijasta ja korkeudesta siten, että

$$V(d, h) = \pi(d/2)^2 h = \frac{\pi d^2 h}{4}.$$

Kun $d = 12$ (cm) ja $h = 15$ (cm), saadaan tilavuudeksi

Esimerkki

Tarkastellaan suoran ympyrälieriön muotoista astiaa. Mittauksissa on saatu lieriön pohjan halkaisijaksi $d = 12.00 \pm 0.05$ (cm) ja lieriön korkeudeksi $h = 15.00 \pm 0.05$ (cm). Määrää lieriön tilavuus virherajoiheen.

Suoran ympyrälieriön tilavuus V riippuu lieriön pohjan halkaisijasta ja korkeudesta siten, että

$$V(d, h) = \pi(d/2)^2 h = \frac{\pi d^2 h}{4}.$$

Kun $d = 12$ (cm) ja $h = 15$ (cm), saadaan tilavuudeksi

$$V(12, 15) = \frac{\pi}{4} 12^2 \cdot 15 \approx 1696.46 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Virherajojen selvittämiseksi lasketaan funktion

$$V(d, h) = \pi(d/2)^2 h = \frac{\pi d^2 h}{4}.$$

Virherajojen selvittämiseksi lasketaan funktion

$$V(d, h) = \pi(d/2)^2 h = \frac{\pi d^2 h}{4}.$$

osittaisderivaatat. Saadaan

$$V_d(d, h) = \frac{\pi}{2} h d, \quad V_h(d, h) = \frac{\pi}{4} d^2.$$

Virherajojen selvittämiseksi lasketaan funktion

$$V(d, h) = \pi(d/2)^2 h = \frac{\pi d^2 h}{4}.$$

osittaisderivaatat. Saadaan

$$V_d(d, h) = \frac{\pi}{2} h d, \quad V_h(d, h) = \frac{\pi}{4} d^2.$$

Kun halkaisijan mittausvirhe on Δd ja korkeuden mittausvirhe Δh ,

Virherajojen selvittämiseksi lasketaan funktion

$$V(d, h) = \pi(d/2)^2 h = \frac{\pi d^2 h}{4}.$$

osittaisderivaatat. Saadaan

$$V_d(d, h) = \frac{\pi}{2} h d, \quad V_h(d, h) = \frac{\pi}{4} d^2.$$

Kun halkaisijan mittausvirhe on Δd ja korkeuden mittausvirhe Δh , niin lieriön tilavuuden määrittämisessä tehty maksimivirhe on kokonaisdifferentiaalin avulla arvioituna itseisarvoltaan

Virherajojen selvittämiseksi lasketaan funktion

$$V(d, h) = \pi(d/2)^2 h = \frac{\pi d^2 h}{4}.$$

osittaisderivaatat. Saadaan

$$V_d(d, h) = \frac{\pi}{2} h d, \quad V_h(d, h) = \frac{\pi}{4} d^2.$$

Kun halkaisijan mittausvirhe on Δd ja korkeuden mittausvirhe Δh , niin lieriön tilavuuden määrittämisessä tehty maksimivirhe on kokonaisdifferentiaalin avulla arvioituna itseisarvoltaan

$$\begin{aligned} |\Delta V| &= |V(12 + \Delta d, 15 + \Delta h) - V(12, 15)| \\ &\approx \left| \frac{\partial V}{\partial d}(d, h) \Delta d + \frac{\partial V}{\partial h}(d, h) \Delta h \right|. \end{aligned}$$

Maksimivirheen itseisarvo on siis

$$|\Delta V| \approx \left| \frac{\partial V}{\partial d}(d, h)\Delta d + \frac{\partial V}{\partial h}(d, h)\Delta h \right|.$$

Maksimivirheen itseisarvo on siis

$$|\Delta V| \approx \left| \frac{\partial V}{\partial d}(d, h) \Delta d + \frac{\partial V}{\partial h}(d, h) \Delta h \right|.$$

Kolmioepäyhtälön $|x + y| \leq |x| + |y|$ nojalla saadaan

$$|\Delta V| \leq \left| \frac{\partial V}{\partial d}(d, h) \Delta d \right| + \left| \frac{\partial V}{\partial h}(d, h) \Delta h \right|.$$

Maksimivirheen itseisarvo on siis

$$|\Delta V| \approx \left| \frac{\partial V}{\partial d}(d, h)\Delta d + \frac{\partial V}{\partial h}(d, h)\Delta h \right|.$$

Kolmioepäyhtälön $|x + y| \leq |x| + |y|$ nojalla saadaan

$$|\Delta V| \leq \left| \frac{\partial V}{\partial d}(d, h)\Delta d \right| + \left| \frac{\partial V}{\partial h}(d, h)\Delta h \right|.$$

Muistetaan $V_d(d, h) = \frac{\pi}{2}hd$ ja $V_h(d, h) = \frac{\pi}{4}d^2$ ja sijoitetaan $d = 12$ ja $h = 15$, jolloin saadaan

Maksimivirheen itseisarvo on siis

$$|\Delta V| \approx \left| \frac{\partial V}{\partial d}(d, h) \Delta d + \frac{\partial V}{\partial h}(d, h) \Delta h \right|.$$

Kolmioepäyhtälön $|x + y| \leq |x| + |y|$ nojalla saadaan

$$|\Delta V| \leq \left| \frac{\partial V}{\partial d}(d, h) \Delta d \right| + \left| \frac{\partial V}{\partial h}(d, h) \Delta h \right|.$$

Muistetaan $V_d(d, h) = \frac{\pi}{2}hd$ ja $V_h(d, h) = \frac{\pi}{4}d^2$ ja sijoitetaan $d = 12$ ja $h = 15$, jolloin saadaan

$$|\Delta V| \leq \left| \frac{\pi}{2} \cdot 15 \cdot 12 \cdot 0.05 \right| + \left| \frac{\pi}{4} \cdot 12^2 \cdot 0.05 \right| \approx 19.79.$$

Maksimivirheen itseisarvo on siis

$$|\Delta V| \approx \left| \frac{\partial V}{\partial d}(d, h) \Delta d + \frac{\partial V}{\partial h}(d, h) \Delta h \right|.$$

Kolmioepäyhtälön $|x + y| \leq |x| + |y|$ nojalla saadaan

$$|\Delta V| \leq \left| \frac{\partial V}{\partial d}(d, h) \Delta d \right| + \left| \frac{\partial V}{\partial h}(d, h) \Delta h \right|.$$

Muistetaan $V_d(d, h) = \frac{\pi}{2}hd$ ja $V_h(d, h) = \frac{\pi}{4}d^2$ ja sijoitetaan $d = 12$ ja $h = 15$, jolloin saadaan

$$|\Delta V| \leq \left| \frac{\pi}{2} \cdot 15 \cdot 12 \cdot 0.05 \right| + \left| \frac{\pi}{4} \cdot 12^2 \cdot 0.05 \right| \approx 19.79.$$

Siis lieriön tilavuus on $V = 1696 \pm 20 = 1700 \pm 20 \text{ (cm}^3\text{)}.$